Razmišljanje o matematiki

Matej Brešar

Čeprav se z matematiko srečujemo vsi, se je drži pridih skrivnostnosti. Kaj sta njen smisel in pomen? Zakaj jo matematiki pojmujejo kot obliko umetnosti? In kaj sploh počenjajo? Sestavek se bo dotaknil teh vprašanj in poskusil odškrniti vrata v svet matematike in matematikov.

Ker ne gre za strokovno besedilo, ampak osebno razmišljanje, si bom dovolil prvoosebni zapis.

1 Predstave o matematiki

Večina ljudi matematiko povezuje s številkami, računanjem, togimi pravili in suhoparnimi formulami. Poznajo jo kot zahteven in pogosto nepriljubljen šolski predmet. Marsikdo misli, da matematiki ubijamo čas z računanjem z zelo velikimi števili. Toda tudi med bolje poučenimi in tistimi, ki so matematiki naklonjeni, je precej nerazumevanja tako glede pomena matematike kot glede dela matematikov. Predstavljajo si, da se matematiki ukvarjamo z dolgimi, zapletenimi izrazi, v katerih mrgoli ulomkovih črt, binomskih koeficientov, integralov in drugih matematičnih simbolov. Oboroženi s poznavanjem neštetih formul in računskih tehnik jih s samo nam lastno potrpežljivostjo in pedantnostjo preoblikujemo in preračunavamo, dokler ne dobimo želenega rezultata. Skoraj nikogar ni, ki ne bi od matematika pričakoval, da bo uspel hitreje in spretneje od drugih rešiti kako rutinsko računsko nalogo, kot na primer sešteti ali zmnožiti nekaj števil. Vse to so stereotipi, ki imajo le malo podlage v resničnosti. Večina matematikov se s konkretnimi števili ne srečuje nič bolj pogosto kot drugi ljudje, preoblikovanje matematičnih izrazov pa nam bolj kot kaj drugega vzbudi spomin na šolske klopi.

Nekatere pogoste predstave o matematiki pa so vendarle bolj točne. Natančnost, doslednost in miselna disciplina se upravičeno povezujejo z matematiko. Tudi zavedanje, da je matematika - pa če jo imaš rad ali ne - koristna, je splošno razširjeno. Osnovno matematiko uporabljamo vsi. Nekolika zahtevnejša matematika se v znanosti uporablja kot osnovno orodje in jezik, ki omogoča eksakten opis. Fizika, ki je od nekdaj neločljivo povezana z matematiko, potrebuje zelo globoko matematiko, fizikalni problemi pa pogosto porajajo novo matematiko. Tudi deli nekaterih drugih znanosti so tesno povezani z matematiko, na primer deli računalništva (računalniška matematika), ekonomije (finančna matematika) in, morda presenetljivo, biologije (matematična biologija ali biomatematika).

Zaradi nesporne uporabnosti in domnevne težavnosti matematika običajno vzbuja spoštovanje. Razkriti novim znancem, da si po poklicu matematik, zato ponavadi ni neprijetno. Misli, da je ta poklic za pusteže in dolgočasneže, tako ali tako ostanejo neizrečene. Nekoliko se bojiš le neizbežnega odziva v slogu "joj, to meni ni šlo..." ali "jaz pa nisem za številke...". Kako pojasniti, da tudi tebi ni dosti mar za številke, števila pa se ti zdijo neizmerno lepa?

2 Matematika – veda o računanju?

Matematika nas največkrat spomni na računanje. Pri matematičnih predmetih na vseh ravneh izobraževanja, od osnovne šole do univerze, imamo neprestano opravka s takimi in drugačnimi računi. Ko se matematiki ukvarjamo s precej bolj abstraktnimi problemi, ki matematičnega laika ne bi v ničemer spomnili na računanje iz njegovega šolanja, v žargonu pogosto govorimo o računanju. Zakaj torej vprašaj v naslovu?

Pred odgovorom si oglejmo preprosta primera, ki ponazarjata matematični način razmišljanja. Najprej slovita anekdota o enem najznamenitejših matematikov vseh časov, *Carlu Friedrichu Gaussu* (1777–1855). Matematiki jo radi ponavljamo, gotovo je zato marsikateremu bralcu znana. Nič zato - nudi lepo iztočnico za pojasnjevanje bistva matematike in ima svoj čar. Nekateri v resničnost zgodbe sicer dvomijo. Toda ali je pri anekdotah sploh pomembno, ali so resnične?

Anekdota sega v čas, ko je bil Gauss majhen deček, šolar. Med šolsko uro je učitelj vsem učencem zadal nalogo, naj seštejejo prvih sto naravnih števil, torej poiščejo vsoto $1 + 2 + \cdots + 100$. Domnevno si je učitelj želel le kupiti nekaj miru. Učence je zaposlil z nalogo, ki vzame ogromno časa in je zato praktično nerešljiva, čeprav zahteva samo najosnovnejše računsko znanje. Na presenečenje vseh je Gauss skoraj takoj povedal pravilen odgovor. Razmišljal je namreč takole. Vsota prvega in zadnjega števila, $1 + 100$, je enaka 101. Tudi vsota drugega in predzadnjega števila, $2 + 99$, je enaka 101. In tako dalje. Tudi $50+51 = 101$. Samo 50-krat moramo število 101 prišteti samemu sebi. Odgovor je torej $50 \times 101 = 5050$.

Naj kot zanimivost povem, da iranska matematičarka *Maryam Mirzakhani*, prva ženska prejemnica Fieldsove medalje,[1] anekdoto v intervjujih omenja kot prvi spomin na očaranost nad matematiko. Tudi sam se spomnim, da je name naredila močan vtis, ko mi jo je v otroštvu povedal oče. Njena privlačnost je gotovo tudi v tem, da bister otrok preseneti in morda celo osmeši učitelja, ki zadaja nesmiselne naloge. Toda kaj je njeno matematično sporočilo? Načeloma se naloga zdi rešljiva, tudi če slepo sledimo njeni formulaciji in števila seštevamo po vrsti. Ker pa nismo stroji, ampak ljudje, bi se na katerem koraku skoraj zagotovo zmotili. Če bi učitelj zahteval, naj učenci izračunajo vsoto prvih milijon

[1] Fieldsova medalja se podeljuje vsaka štiri leta na kongresu Mednarodne matematične zveze največ štirim matematikom, ki morajo biti mlajši od 40 let. Po prestižnosti jo lahko primerjamo z Nobelovo nagrado (ki se za matematiko ne podeljuje). Maryam Mirzakhani jo je skupaj s še tremi matematiki prejela na zadnji podelitvi v Seulu leta 2014.

naravnih števil, bi bila naloga v nekem smislu lažja. Vsakomur bi bilo namreč jasno, da mora razmišljati o načinu reševanja, saj po neposredni poti ne bo mogel priti do rezultata. Naloga bi bila še jasnejša, če bi spraševala po vsoti prvih n naravnih števil, kjer je n katerokoli naravno število.[2] Potem bi vedeli, da ni treba iskati kakih posebnosti števila sto in da naloga zahteva odkritje pametnega načina seštevanja. Težja in abstraktnejša kot je naloga na pogled, "lažja" je v resnici. Tudi ko rešujemo konkreten problem, se izplača razmišljati abstraktno, izstopiti iz okvirjev in si zastavljati vprašanja. To velja za vse človekove dejavnosti, toda pri matematiki pride do izraza v izčiščeni obliki.

Še drugi primer. Tudi ta je znan, čeprav veliko manj kot anekdota o Gaussu. Zamislimo si teniški turnir, ki se odvija po sistemu izpadanja. Koliko je tekem? Denimo, da je igralcev 16. V prvem krogu je 8 iger, v drugem 4, v tretjem 2 in še finalna igra v zadnjem krogu. Skupno število tekem je torej $8+4+2+1 = 15$. Če je igralcev 32, 64, 128 itd., do rezultata pridemo po istem vzorcu. Kaj pa, če se je na turnir prijavilo kako bolj nesrečno število tekmovalcev, kot na primer 13? Dogovorimo se, da v primeru lihega števila igralcev v naslednji krog eden napreduje z žrebom, ostali pa tekmujejo. Tako je v prvem krogu 6 tekem, ostane 7 igralcev. V drugem krogu so 3 tekme, ostanejo 4 igralci. Sledita polfinalni in nazadnje še finalna tekma, skupaj $6 + 3 + 2 + 1 = 12$ tekem. In če je na turnirju n igralcev, kjer je n katerokoli število? Prvi vtis je, da je problem malce siten. V vsakem krogu bomo morali razmisliti, ali je ostalo liho ali sodo število tekmovalcev. Toda oglejmo si ga iz naslednjega zornega kota. V vsaki tekmi se zgodi en poraz (in ena zmaga), zato je število tekem enako številu vseh porazov. Število porazov pa je enako številu tekmovalcev, ki so bili kdaj poraženi. Vsak je namreč lahko poražen le enkrat, zatem ne tekmuje več. Koliko pa je poražencev? Vsi razen zmagovalca turnirja. Število tekem je torej enako $n - 1$.

V matematiki vselej iščemo zorni kot, iz katerega bi videli bistvo problema. Torej zorni kot, ki omogoča odmik od konkretnega. Kot radi rečemo, želimo videti gozd in ne le posameznih dreves. Matematik je pri raziskovalnem delu podoben pohodniku na goro, ki ga obseda misel, da bi našel razgled, iz katerega bo končno uzrl vsa pobočja in doline. Ob tem ne ve, če taka razgledna točka sploh obstaja, kaj šele, katera pot vodi do nje. Išče. Vselej se lahko vrne v dolino in opusti misel na razgled. Brez vztrajnosti, včasih že kar kljubovalnosti, razgleda zagotovo ne bo našel.

Je torej matematika veda o računanju? Seveda se ukvarja z računanjem, toda tak opis bi bil preveč površen in tudi zavajajoč. Koliko je bilo računanja v zgornjih primerih? Oba problema sta bila na prvi pogled računsko zahtevna. Prvega smo z razmislekom prevedli na en sam preprost račun, drugega pa rešili brez vsakega računa. Ustreznejši opis bi bil, da je matematika veda o tem, kako se računanju izogniti.

[2] Odgovor je $\frac{n(n+1)}{2}$, kot lahko z Gaussovim načinom hitro preverimo.

3 Čista matematika

Kot vsaka znanstvena disciplina se matematika deli na številna področja. Osnovna in širši javnosti manj znana je delitev na *uporabno matematiko* in *čisto matematiko* (uporablja se tudi izraz *teoretična matematika*, ki pa se mi zdi manj primeren). Včasih je težko potegniti mejo med obema deloma matematike, saj se nenehno prelivata drug v drugega, v grobem pa ta delitev obstaja. Večina matematikov bi se zmogla opredeliti za bodisi "uporabne" bodisi "čiste".

Uporabna matematika se ukvarja z uporabo matematičnih metod na različnih področjih znanosti in tehnologije. Ta uporaba je izredno raznovrstna in zanimiva, toda o tem ne bom govoril. O uporabni matematiki vem premalo.

Kaj je čista matematika? Najbolj enostaven odgovor je, da je to matematika zaradi matematike. Njena gonilna sila je matematika sama, izvira sama iz sebe. Ukvarja se z intelektualnimi izzivi, ki se jim ne moremo upreti. Obstaja že tisočletja. Želja po raziskovanju čiste matematike nam je očitno prirojena.

Njena osnovna značilnost je abstraktnost. Ukvarja se s pojmi, ki živijo le v naših mislih. Že tako enostavni pojmi, kot so števila ena, dva, tri itd., ne obstajajo izven naše zavesti.

Naravoslovne znanosti ne morejo dati dokončnih odgovorov. Nasprotno pa odgovori, ki jih daje čista matematika, ne morejo biti drugačni kot dokončni. Čista matematika namreč temelji na dokazovanju, ki ne dopušča dvomov o pravilnosti. Naj to pojasnim bolj natančno. "Pravila igre" v čisti matematiki so jasna in vnaprej določena. Izhodišče je peščica splošno sprejetih temeljnih resnic, ki jim pravimo *aksiomi*. Z logičnim sklepanjem iz aksiomov izpeljemo matematične ugotovitve. Zaporedju logičnih sklepov, ki vodijo do neke ugotovitve, pravimo *dokaz*, ugotovitvi pa *izrek* (ali *teorem*, vendar je ta tujka v slovenskem prostoru skoraj izginila). Če so vsi logični sklepi v dokazu izreka pravilni, potem izreku nihče ne more oporekati. Lahko se krešejo mnenja o njegovi zanimivosti, pomembnosti, izvirnosti, ne pa o njegovi pravilnosti, o njegovi resničnosti. V matematiki ima tako beseda dokaz drugačen pomen, kot smo ga vajeni. Kadar v vsakdanjem življenju, pa tudi v drugih znanostih, rečemo, da je nekaj dokazano, imamo v mislih, da je utemeljeno tako prepričljivo, da dvomiti ni več smiselno. Tak dokaz je lahko boljši, bolj prepričljiv, ali slabši, manj prepričljiv. Kot preprost dokaz, da je Zemlja okrogla, na primer navedemo dejstvo, da ladje izginejo za obzorjem. Fotografije Zemlje iz vesolja seveda dajo neprimerno boljši dokaz. Dokazi v matematiki so vsi enako, to je popolnoma prepričljivi. Seveda so nekateri bolj in drugi manj nazorni, eni lažje in drugi težje razumljivi. Za posamezen izrek tako pogosto najdemo različne dokaze. Vsak izmed njih ima lahko kako prednost pred drugimi, toda vsi enako nedvoumno potrjujejo resničnost izreka. Seveda tu govorim o pravilnih dokazih, tj. dokazih brez ene same napake. V dolgem in zapletenem dokazu sicer ni enostavno preveriti, ali se ni vanj prikradla kaka napaka. Toda kaj je in kaj ni napaka, je popolnoma nesporno. Če je odkrita v tvojem domnevnem dokazu, se hočeš nočeš s tem sprijazniš in poskušaš del, v katerem se je našla napaka, spremeniti in s tem napako odpraviti. Morda uspeš. Če ne, je bilo celotno delo brez vrednosti in lahko začneš spet od začetka. Prav nič ti ne pomaga, da je bilo stotine logičnih sklepov pravilnih, napačen pa en sam.

Cilj čiste matematike ni samo (s)poznavanje matematičnih dejstev, ampak tudi ali predvsem njihovo razumevanje. Dokaz izreka nam ne da samo rešitve problema, z njim pridobimo vpogled v problematiko. Vprašanje "zakaj" je pogosto bolj vznemirljivo kot vprašanje "kaj". Denimo, poznati formulo za vsoto prvih n naravnih števil je sicer koristno, toda formula sama nas pusti hladne. Fascinira nas njena izpeljava. Želimo razumeti, ne le vedeti.

V čisti matematiki je nekaj brezčasnega. Seveda ne more uiti spremembam, a te so zelo počasne. Ko dobim v roke sto let star matematični članek, se mi zdi, da bi ga lahko včeraj napisal kolega iz sosednje pisarne, če ga ne bi izdale okorne oznake in staromoden tisk. Navade glede citiranja znanstvenih objav so v matematiki zato drugačne kot v večini drugih znanosti. Velikokrat se sklicujemo na razmeroma stare vire. Najbolj citirani matematični članki pogosto v prvih letih po objavi sploh niso opaženi. Tudi od tehnološkega razvoja je čista matematika razmeroma neodvisna. Razvoj računalništva je naredil veliko revolucijo v znanstvenih metodah naravoslovja in tehnike, večjega dela čiste matematike pa se skoraj ni dotaknil. Z računalnikom sicer včasih lahko na primer preverimo, da kaka matematična domneva velja za zelo velika števila. Ne moremo pa si s tem pomagati pri dokazu, da velja za vsa števila. Od še tako velikega števila do neskončnosti je namreč ravno tako daleč kot od ena do neskončnosti.

Uporabnost na drugih področjih ni osnovni cilj čiste matematike. Inspiracijo za probleme, ki jih obravnava, sicer pogosto dobi iz fizike in drugih področij. Toda čez čas se ti problemi prevedejo v abstraktnejši matematični jezik, se matematično osamosvojijo in matematiki jih obravnavamo kot zanimive same po sebi.

In zakaj bi družba omogočala posameznikom, da se ukvarjajo s početjem, ki se ne meni za svojo koristnost? Vsaj en odgovor je na dlani. Čista matematika je steber uporab(n)e matematike, njeno teoretično ozadje. Toda pomen čiste matematike je večplasten. O tem bo tekla beseda v nadaljevanju sestavka, v naslednjih vrsticah pa le kratek povzetek. Na čisti matematiki sloni matematična kultura, ki neopazno, a pomembno zaznamuje družbo. Čista matematika je tudi oblika umetnosti. In nazadnje, nekateri izsledki čiste matematike se povsem nenačrtovano, praviloma šele desetletja ali stoletja po njihovih odkritjih, izkažejo za uporabne v znanosti in tehnologiji.

Ko bom odslej govoril o matematiki, bom imel praviloma v mislih čisto matematiko.

4 Matematična kultura in vzgojni pomen matematike

Matematični svet je v svoji brezkompromisni zavezanosti resnici drugačen od sveta, v katerem živimo. To je svet, kot bi si ga želeli. Realnega sveta ne more spremeniti, lahko pa ga dela boljšega ali vsaj znosnejšega. Matematična kultura se namreč dotakne vsakega izmed nas in vpliva na izoblikovanje naših osebnosti.

Matematika nas nauči spoštovati argument. Prizna se le tisto, kar se ne da ovreči. Ena napaka, mala nepazljivost v dolgem matematičnem razmisleku popolnoma izniči ves trud. Kaj nam torej preostane drugega, kot da skrbno pretehtamo vsako misel? Navadimo se tudi nekaj previdnosti pri izražanju svojih mnenj. Tudi naše zmote so namreč dokazljive.

Skozi matematiko se naučimo, da je razmišljanje bližnjica do cilja in ne izguba časa. Razmišljati se izplača! Razmišljati ni le koristno, tudi zabavno je. Veselje ob rešitvi, do katere smo se dokopali z miselnim trudom, je včasih neizmerno.

Ukvarjanje z matematiko po eni strani krepi samozavest. Po drugi strani pa nam da spoznanje o naših omejenih zmožnostih. Tako o svojih lastnih kot o zmožnostih človeka. Kolikokrat ne znaš rešiti problema, ki se kasneje izkaže za enostavnega. In koliko dozdevno enostavnih problemov človeštvo doslej ni zmoglo rešiti.

V matematiki ne rečeš, da si nekaj "skoraj dokazal". Si ali nisi, vmes ni ničesar. Pri reševanju problema moraš zaobjeti vse možnosti, sicer nisi naredil nič. Študij matematike je zato odličen miselni trening, naši diplomanti pa se dobro znajdejo v različnih poklicih. Učimo jih izreke in dokaze, naučimo pa nekaj drugega: natančnosti, sistematičnosti, abstraktnega razmišljanja in osredotočanja na bistvo. Učenje "nepraktične" matematike ima nadvse praktične posledice.

Raziskovalni rezultati nas, profesionalnih matematikov, nimajo takojšnjega in neposrednega vpliva na svet okoli nas. Menim, da je eno naših glavnih poslanstev, da z matematično kulturo "okužujemo" družbo. Čeprav posreden, je s tem naš vpliv na razvoj družbe vseeno pomemben.

5 Estetika v matematiki

Matematika je lepa. O tem nameravam pisati. Ob tem se zavedam, da lahko s tako mislijo izpadem vsiljivo ali pokroviteljsko. Ljudje matematiko razumljivo povezujejo predvsem s šolskim drilom, v katerem res ni nič posebej lepega. Toda tudi v učenju notnega zapisa ni nič čudovitega. Čudovita je glasba.

Da je lepa, lahko rečemo za znanost nasploh. V vsakem znanstvenem odkritju, torej stiku z dotlej neznano resnico, je nekaj lepega. Toda lepota v matematiki ima še druge razsežnosti. Estetika je eden izmed kriterijev za vrednotenje matematičnih del. Matematični dokaz ali izrek lahko opredelimo kot *eleganten*. Ta besedo se je pač usidrala, v bistvu gre le za nekoliko zadržano sopomenko besede *lep*. Recenzent našega matematičnega članka na primer napiše "Dokaz glavnega izreka je eleganten". Kako radi to preberemo! Ni lepše pohvale.

Kaj je tisto, kar je v matematiki lepo? Na to je težko odgovoriti, saj je lepota bolj stvar srca kot razuma. Naj rečem le, da nas matematična dela s presenetljivostjo, včasih enostavnostjo in drugič prepletenostjo z drugimi idejami navdajo z občutkom vzradoščenosti, značilnim za doživljanje umetnosti. Seveda je matematična umetnost nekoliko hermetična. Toda tudi druge umetnosti v vseh odtenkih razumejo le redki.

V več elementih je matematika bliže umetnosti kot znanosti. Vzemimo abstraktnost, kot najbolj izrazito značilnost matematike. Tudi deli umetnosti so abstraktni. Še posebej glasba, ki je, kot je znano, matematikom pogosto posebej blizu. Veliko uspešnih matematikov se ukvarja tudi z glasbo. Druga pomembna značilnost matematike je nenehno iskanje bistva. Tudi v umetnosti se išče bistvo. Slikar ali pisatelj izpostavita podrobnost, ki pove več kot to, kar izstopa na površju in opazimo sami. Pomemben element matematike je tudi njen specifični slog. Skop nabor besed, dozdevna enoličnost, asketskost, rituali (definicija, izrek, dokaz; in spet definicija, izrek, dokaz...). Vtis zadržanosti in nevsiljivosti. Izčiščenost. Vse to so tudi lastnosti nekaterih umetniških slogov, na primer minimalizma.

Matematiki posvečamo oznakam in ponazoritvi naših spoznanj veliko pozornost. Estetiko tako najdemo tudi v matematični simboliki in slikah. Naj za zgled napišem eno najbolj znanih enakosti

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

ki povezuje pet najpomembnejših števil v matematiki: celi števili 0 in 1, naravno konstanto e, s krogom povezano konstanto π in imaginarno enoto i (kompleksno število z lastnostjo $i^2 = -1$). Vsako izmed njih ima svoje lastne korenine. Ta enakost pa jih splete v eno.

Matematiki smo pri svojem delu svobodni, spet tako kot umetniki. Nismo zavezani zgolj razkrivanju našega sveta. Lahko si zastavimo kakršnakoli vprašanja, ki se nam zdijo zanimiva in predstavljajo intelektualni izziv. Omejeni smo le z enim: z resnico.

Matematika je svet, o katerem sanjamo. Svet popolne pravičnosti in harmonije. Tudi umetnost odkriva svetove naših sanj. Če je umetnik iskalec lepote in znanstvenik iskalec resnice, je matematik iskalec lepe resnice.

6 Praštevila in brezčasnost

Ko matematiki želimo matematičnim laikom s primeri ponazoriti zanimivost in lepoto matematike, pogosto pridemo v težave. Matematika se ukvarja z abstraktnimi pojmi, ki jim dajemo imena. Brez poznavanja teh imen pogovor ni možen. Pravzaprav samo poznavanje ne zadošča. O teh pojmih lahko razpravljamo le, če jih res dobro razumemo, za to pa so potrebna leta študija.

Pa bom vseeno poskusil. Izbral bom temo, ki se z izogibanjem podrobnostim da predstaviti razumljivo, hkrati pa je matematično globoka. Praštevila.

Definicija. Naravno število $p \neq 1$ je *praštevilo*, če je deljivo le z 1 in s p.

Na primer, 2 in 3 sta praštevili, 4 pa ni, ker je deljivo z 2. Praštevila so osnovni gradniki števil. Z izjemo števila 1 je namreč vsako število iz njih sestavljeno - enako je produktu nekih praštevil. Na primer, $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ ipd. Po dogovoru tudi za vsako praštevilo p rečemo, da je enako produktu praštevil. V tem produktu pač nastopa en sam faktor, praštevilo p samo.

Zapišimo omenjeno dejstvo kot izrek in ga dokažimo.

Izrek. *Vsako naravno število razen števila 1 je produkt praštevil.*

Dokaz. Denimo, da to ni res, da torej obstajajo od 1 različna naravna števila, ki jih ne moremo zapisati kot produkt praštevil. Označimo z n najmanjše izmed teh števil. Vsako od n manjše število razen 1 se torej da zapisati kot produkt praštevil, za n pa to ne velja. Med drugim to pomeni, da n ni praštevilo. Zato ga lahko zapišemo kot $n = rs$, kjer sta r in s naravni števili, različni od 1 in n. Ker sta obe manjši kot n, je po predpostavki vsako izmed njiju enako produktu praštevil. Toda potem je tudi število n, kot njun produkt, enako produktu praštevil - namreč vseh tistih praštevil, iz katerih sta sestavljeni števili r in s. Prišli smo v protislovje. Predpostavili smo, da števila n ne moremo zapisati kot produkt praštevil, zdaj pa smo do takega zapisa prišli. To protislovje izvira iz začetne predpostavke, da se nekatera od 1 različna števila ne dajo zapisati kot produkt praštevil. Torej takih števil ni in izrek je dokazan.

Ta izrek je preprost. Vsaj intuitivno razlago njegove pravilnosti, če že ne strogega dokaza, bi našel vsakdo z nekaj matematičnega posluha.[3] Naslednji izrek je globlji.

Izrek. *Praštevil je neskončno mnogo.*

Dokaz. Denimo, da je praštevil končno mnogo. Označimo njihovo število z n. Edina praštevila so potem $p_1, p_2, \ldots, p_n$.[4] Označimo z N za ena povečan produkt vseh praštevil, torej

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Po prejšnjem izreku je število N enako produktu nekih praštevil. Zato obstaja praštevilo p_j, ki ga deli. Torej je $N = qp_j$ za neko naravno število q. Tako velja

$$qp_j = p_1 p_2 \cdots p_j \cdots p_n + 1,$$

kar lahko zapišemo kot

$$(q - p_1 p_2 \cdots p_{j-1} p_{j+1} \cdots p_n) p_j = 1.$$

Toda produkt celega števila s praštevilom ne more biti enak 1! Predpostavka, da je praštevil končno mnogo, nas je torej vodila v protislovje. Zato jih je neskončno mnogo.

[3] Če število ni praštevilo, ga zapišemo kot produkt dveh manjših števil. Če katero izmed njiju ni praštevilo, tudi tega zapišemo kot produkt dveh manjših števil. To ponavljamo tako dolgo, dokler ne pridemo do samih nerazstavljivih števil, torej praštevil. Ta ideja je jasna, vendar jo je v eksaktnem matematičnem jeziku morda nekoliko težje zapisati kot zgornji dokaz.

[4] Lahko na primer vzamemo $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, in tako dalje, vse do največjega praštevila p_n. Za dokaz ni pomembno, da praštevila uredimo po velikosti. To opombo sem dodal le zaradi lažje predstave.

Dokaz je iz Evklidove knjige *Elementi* izpred treh stoletij pred našim štetjem. Samo preveden je v modernejši jezik, sicer je ostal nespremenjen. In nepresežen. Kaj še ostane nespremenjeno in nepreseženo po več tisoč letih? Prvovrstna matematika je brezčasna, nesmrtna. Dobra matematika pa se stara zelo počasi.

Naj pojasnim, kaj mislim z nepreseženostjo. Študentom še vedno predstavimo Evklidov dokaz,[5] čeprav zdaj poznamo veliko drugih. Nekateri izmed njih so čudoviti in presenetljivi. Toda nobeden ni tako enostaven kot Evklidov. V matematiki pa je enostavnost vrednota. Enostavnost, jasnost, razumljivost. To so cilji matematike. Matematika ni zapletena. Zapleten je svet.

Razumevanje praštevil ostaja večni matematični izziv. Še vedno je veliko enostavno razumljivih problemov v zvezi s praštevili nerešenih. Naj omenim dva. *Goldbachova domneva* iz leta 1742 sprašuje, ali je z izjemo števila 2 vsako sodo naravno število vsota dveh praštevil. (Bralec lahko preizkusi pravilnost domneve za nekaj majhnih sodih števil.) Drugi znameniti problem sprašuje, ali obstaja neskončno mnogo praštevilskih dvojčkov. Par praštevil imenujemo *praštevilski dvojček*, če se ti praštevili razlikujeta le za 2 (na primer 3 in 5, 5 in 7, 11 in 13 itd.). Nedavno je bil v zvezi s tem problemom narejen pomemben premik.[6] Morda pa bo kateri izmed teh dveh problemov rešen še za časa naših življenj. Ali vsaj preden ljudje uničimo svet.

Študij praštevil je klasična tema čiste matematike. Najčistejše čiste matematike, ki nima nobenega namena biti uporabna izven matematike. Toda rezultati o praštevilih so se v modernem času izkazali za uporabne v kriptografiji. To je veda, ki se ukvarja z varnim prenašanjem sporočil od pošiljatelja do prejemnika (kot je na primer bančno poslovanje na spletu). Ena prvih zares učinkovitih metod kriptografije sloni na t.i. Fermatovem malem izreku. *Pierre de Fermat* (1607-1665) je bil pravnik in ljubiteljski matematik. *Fermatov mali izrek* pravi, da je število $a^p - a$ deljivo s p za vsako praštevilo p in vsako naravno število a. Zamislimo si francoskega pravnika, po duši matematika, ki se sredi 17. stoletja zvečer ob svečah kratkočasi z nekoristnim razmišljanjem o praštevilih. Nakar neka njegova ugotovitev v 20. stoletju dobi široko uporabo v svetovnem spletu in še kje. Zveni neverjetno! Pa to še zdaleč ni edini primer uporabe čiste matematike v tehnologiji. Naj omenim le, da spletni iskalniki slonijo na teoretičnih rezultatih linearne algebre.

Res pa ima vsaka medalja dve plati. Kriptografijo potrebuje tudi vojaška industrija. Tudi prenašanje in iskanje informacij po spletu je dvorezen meč. Čista matematika lahko nenačrtovano prinese marsikaj dobrega, prav tako nenačrtovano pa tudi kaj slabega.

---

[5] Ko sem sam obiskoval gimnazijo, nas je profesorica seznanila z Evklidovim dokazom kot zgledom matematičnega dokaza. Spomnim se, da se mi je že takrat zdel lep. Zdaj ga srednješolci več ne spoznajo. Škoda. Ne vzame veliko časa, dijakom z nagnjenjem do matematike pa bi to nekaj pomenilo.

[6] Kitajsko-ameriški matematik *Yitang Zhang* je leta 2013 našel (zelo veliko!) število c s tole lastnostjo: obstaja neskončno mnogo takih parov praštevil, da se praštevili iz vsakega para med seboj ne razlikujeta za več kot c. Problem o praštevilskih dvojčkih sprašuje, če ta ugotovitev velja za $c = 2$. Kasneje so drugi sicer uspeli Zhangovo število c bistveno zmanjšati, toda velikemu cilju še nismo povsem blizu.

7 Razvoj algebre in pomen abstraktnega matematičnega koncepta

Matematika obravnava abstraktne koncepte. Preprost primer je koncept števila. Vsi razumemo njegov smisel in ga zato sprejemamo. Večina matematičnih konceptov je precej težje razumljivih, zato jih spočetka težko vzamemo za svoje. Lahko vzbudijo celo odpor, saj se zdijo preveč oddaljeni od našega sveta. Toda ravno ti koncepti so bistvo matematike.

Eno temeljnih matematičnih področij je algebra. Na kratko bom orisal njen razvoj in preko tega poskusil prikazati pomen abstraktnih matematičnih konceptov.

Do 19. stoletja je algebra pomenila reševanje polinomskih enačb nizkih stopenj. Linearna enačba $ax + b = 0$ ima rešitev $x = -\frac{b}{a}$, kvadratna enačba

$$ax^2 + bx + c = 0$$

pa, kot smo se naučili v srednji šoli, rešitev

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

To so odkrile že različne stare civilizacije. Stari Babilonci denimo že kakih 1700 let pred našim štetjem. Njihova rešitev je bila v bistvu enaka današnji, čeprav izražena le skozi preproste konkretne primere.

Do rešitve kubične enačbe

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

se je čakalo več kot tri tisočletja, vse do obdobja renesanse. Ključen je poseben primer te enačbe $x^3 = px + q$, ki ima rešitev

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Splošna kubična enačba, kot tudi splošna enačba četrte stopnje, se namreč prevedeta na ta primer. To so odkrili italijanski matematiki v 16. stoletju. Rešitev je dokumentirana v knjigi *Gerolama Cardana* z naslovom *Velika umetnost* iz leta 1545. V tistih časih matematiki sicer svojih rezultatov običajno niso objavljali, pač pa so z njimi med seboj tekmovali za denar. Rezultati iz Cardanove knjige pravzaprav niso njegovi. Še več, Cardano je prelomil obljubo matematiku *Niccolu Fontani Tartaglii*, da rešitve ne bo nikomur izdal. Toda zgodovina je včasih muhasta - formule za rešitev enačb tretje in četrte stopnje se danes imenujejo po Cardanu.

Naj omenim, da v Cardanovih časih še ni obstajal pojem števila, kot ga poznamo danes. Prav tako niso poznali simboličnega zapisa enačb. Vse je bilo izraženo z besedami. Danes nam je veliko laže. Nasploh igrajo v matematiki oznake izredno pomembno vlogo. Med drugim usmerjajo naš način razmišljanja.

Vpeljava zapisa, ki najbolje opisuje bistvo obravnavanega pojma, je del matematične znanosti.

Po uspehu italijanskih matematikov je bila naslednji izziv enačba pete stopnje:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0.$$

Pričakovali bi, da se dajo rešitve izraziti s podobno formulo kot pri enačbah nižjih stopenj, le da bi vključevala tudi peti koren. Iskana formula je najbrž le bolj zapletena in zato težje izsledljiva. Toda izkazalo se je nekaj bistveno bolj zanimivega: take formule ni! Rešitve sicer obstajajo,[7] toda ne dajo se izraziti s formulo, kot bi jo pričakovali. To je leta 1824 dokazal norveški matematik *Niels Henrik Abel* (1802–1829) (pred njim sicer tudi italijanski matematik *Paolo Ruffini*, vendar je imel njegov dokaz napako). Potreben je bil miselni preskok. Ni res, da problema nismo uspeli rešiti zato, ker nismo dovolj sposobni ali prizadevni. Problem preprosto ni rešljiv.

Problemi, s katerimi se matematiki ukvarjamo, imajo praviloma le dva možna odgovora: "da" in "ne". Z vsakim od obeh smo zadovoljni. Včasih je odgovor "ne" še bolj vznemirljiv, ker odpira nova vprašanja. Kot zanimivost naj povem, da je Abel najprej mislil, da je formulo za rešitev enačbe pete stopnje našel, a je čez čas v svojem dokazu našel napako. Ko matematiki rešujemo problem, se pogosto motimo in naše razmišljanje je večkrat bolj intuitivno kot razumsko. S povsem logičnim razmišljanjem, tako značilnim za matematiko, pričnemo šele, ko se soočamo s podrobnostmi dokazov.

Kako lahko vemo, da formule za rešitev enačbe pete stopnje ne more biti? Na to lažje odgovorimo z opisom odkritja francoskega matematika *Évarista Galoisa* (1811–1832) nekaj let po Abelu. Dokazal je, da obstajajo enačbe pete in višje stopnje, katerih rešitve se ne izražajo s koeficienti enačbe (torej s števili $a, b, c, \dots$) s pomočjo seštevanja, odštevanja, množenja, deljenja in n-tih korenov. Torej tudi iskana formula ne more obstajati. Prav o Galoisovem delu imam namen govoriti že od začetka. Postavilo je mejnik v razvoju matematike. Ne le zaradi rezultatov, predvsem zaradi metode reševanja.

Galois je vpeljal naslednji pojem,[8] ki mu je pomagal rešiti problem.

Definicija. Naj bo G neprazna množica. Denimo, da za vsak par elementov x in y iz G obstaja enolično določen element $x * y$ iz G (temu rečemo, da je G opremljena z binarno operacijo $*$). Če velja:

(i) $(x * y) * z = x * (y * z)$ za vse $x, y, z \in G$,

(ii) G vsebuje tak element e, da je $e * x = x * e = x$ za vse $x \in G$,

(iii) za vsak $x \in G$ obstaja tak $x' \in G$, da je $x * x' = x' * x = e$,

potem množici G skupaj z binarno operacijo $*$ pravimo *grupa*.

Ta pojem je težko dojeti brez podrobnejše razlage. Toda namen tega sestavka ni matematično izobraževanje. Definicijo grupe sem napisal v eksaktnem jeziku le zato, da bi si bralec lahko ustvaril vtis. Za lažjo predstavo dodajam še

[7] Tako imenovani osnovni izrek algebre pravi, da ima vsaka polinomska enačba (katerekoli pozitivne stopnje) vsaj eno rešitev. Vendar ta rešitev ni nujno realno število, lahko je kompleksno. Na primer, rešitvi enačbe $x^2 + 1 = 0$ sta kompleksni števili i in $-i$.

[8] Galoisova definicija je bila sicer malce drugačna, toda tej ekvivalentna.

dva enostavna primera. Množica realnih števil je grupa za operacijo seštevanja (torej $x * y$ pomeni $x + y$). Tu je e število 0, število x' pa je enako $-x$. Množica vseh od 0 različnih realnih števil pa je grupa za operacijo množenja (torej je $x * y = x \cdot y$). Tu je $e = 1$ in $x' = \frac{1}{x}$. Mimogrede, Galoisa so zanimale povsem drugačne grupe. Elementi so bile permutacije, $*$ pa njihovo množenje.

Gotovo je presenetljivo, da si je Galois za rešitev tako konkretnega problema (enačbe pete stopnje!) omislil tako abstrakten koncept. Še bolj presenetljivo pa je nadaljnje življenje pojma grupe. Galoisovo delo je bilo objavljeno in priznano šele po njegovi smrti. Čez čas so matematiki začeli opažati, da se različni primeri grup pojavljajo na številnih matematičnih področjih. Grupe pravzaprav kar mrgolijo vsepovsod po matematiki in tudi po fiziki. Zato so jih pričeli obravnavati kot zanimive same po sebi in ne le kot orodje pri reševanju konkretnih problemov. Vpeljali so se še nekateri grupam sorodni koncepti, kot so kolobarji, obsegi in vektorski prostori. Moderna algebra je študij teh abstraktnih konceptov. Razvile so se čudovite algebraične teorije, ki so se izkazale za uporabne na drugih področjih matematike in tudi izven matematike. Naj omenim samo en klasičen zgled. Vse do 19. stoletja so bili nerešeni trije znameniti geometrijski problemi iz antike: *podvojitev kocke* (ali lahko z ravnilom in šestilom iz dane kocke konstruiramo kocko z dvakratno prostornino?), *trisekcija kota* (ali lahko vsak kot z ravnilom in šestilom razdelimo na tri enake dele?) in *kvadratura kroga* (ali lahko z ravnilom in šestilom iz danega kroga konstruiramo kvadrat z isto ploščino?). Na vsa tri vprašanja je odgovor "ne" in pot do njega vodi preko algebraičnih konceptov. Dokazi niti niso tako zapleteni. Danes je težko razumeti, zakaj se je na rešitve problemov čakalo tako dolgo. Mislim, da je razlog v moči globokih in dobro zamišljenih abstraktnih matematičnih konceptov. Vodijo nas do zornega kota, iz katerega vidimo dostop do konkretnega problema.

8 Lov za idejo

Morda sta bralcu padli v oči letnici rojstva in smrti Abela in Galoisa. Mladeniča pri dvajsetih sta spremenila tok zgodovine matematike. Razlog za prezgodnjo Abelovo smrt je bila bolezen, Galois pa je umrl v dvoboju.

Mladost je pri matematiki velika prednost. So tudi izjeme,[9] večina matematikov pa do svojih najboljših rezultatov pride v mladih letih. Zakaj? Seveda ima mladost očitne prednosti, kot so svežina, iskrivost in neustrašnost. Po drugi strani pa človek z leti pridobi izkušnje, pameti pa tudi kar tako ne izgubi. Zakaj ravno pri matematiki znanje in izkušenost ne prideta bolj do izraza? Mislim, da je eden izmed pomembnih razlogov način dela. V marsikaterem pogledu raziskovalno delo matematika pravzaprav ni naporno. Drugače kot pri študiju ali na primer matematičnih tekmovanjih ni tako pomembno, ali si v razmišljanju hiter ali ne. Časovnega pritiska ni, vse se odvija počasi. Zato bi težko rekel,

[9] Y. Zhang, ki smo ga omenili v zvezi s problemom praštevilskih dvojčkov, je do svojega velikega odkritja prišel krepko po petdesetem letu. Še bolj nenavadno je to, da pred tem ni objavil omembe vrednih del. Zato dolgo ni dobil primerne zaposlitve in se je v nekem obdobju življenja preživljal s priložnostnimi deli.

da je delo matematika stresno. Zna pa biti zelo frustrirajoče. Ko se spopadeš s problemom, najprej iščeš prebojno idejo. In to lahko traja. In traja. Dolgo se ne zgodi popolnoma nič. Vrtiš se v krogu. Minejo dnevi, minejo tedni, minejo meseci. Rezultat: nič! Čez čas te začne kljuvati. Zidar je zidal, pek pekel, zdravnik zdravil, kaj si danes naredil ti? Nič! Je od mene sploh kaka korist? Sem še zmožen kaj narediti? Je zadnji spodoben rezultat že za menoj? Iskanje prebojne ideje je praviloma tudi precej samotarsko početje. Nihče ga ne more opraviti namesto tebe. V matematiki tudi ni eksperimentov. Edino, kar imamo, je razmišljanje. Svoj "laboratorij" tako matematik nosi vedno s seboj in ga ne more izključiti, tudi če bi ga želel. Ponedeljek dopoldne ali sobota zvečer? Takrat, ko imaš kaj v glavi. Tak način dela, pravzaprav način življenja, zna biti psihično naporen. Bistveno laže ga je prenašati v mladosti.

In potem včasih pride. Prebojna ideja. Kar tako, nepovabljena. Navsezgodaj v polsnu, na sprehodu, med vožnjo, v čakalnici... Kot da njen prihod nima nobene zveze s tvojim prizadevanjem, s tvojim večtedenskim, večmesečnim, včasih tudi večletnim trudom. Zdi se ti, da si se za hip dotaknil nečesa, kar te presega in česar si ne zaslužiš. Zidar je hišo sezidal, tvoja hiša pa se je pojavila kar sezidana pred teboj. Kot darilo z neba. Kljub temu se predaš trenutku. Občutek veselja je nepopisen. Naenkrat si ti tisti nogometaš, ki je dal gol, se valja po travi in mu vzklika cel stadion. Pa kaj potem, če si na tem "stadionu" v resnici sam. Trenutek evforije ti je bil podarjen, užij ga!

Prebojni ideji sledi srečno obdobje piljenja dokazov, iskanja ilustrativnih primerov in posledic glavnih rezultatov. Že ko se zjutraj zbudiš, veš, kaj boš čez dan počel in veseliš se vsakega trenutka. Na koncu vse skrbno zapišeš, projekt je zaključen. In se lotiš novega problema. Mogoče bo kaj nastalo. Mogoče pa ne...

9 Matematika danes

Kot druge znanosti se je tudi matematika v 20. stoletju zelo razvejala. Pred sto leti so nekateri matematiki še imeli pregled nad celotno matematiko. Danes jih ni več. Porajajo se nove in nove matematične teorije, s katerimi se rešujejo problemi, ki so se včasih zdeli nedostopni. Lep primer, ki priča o moči sodobne matematike, je dokaz zadnjega Fermatovega izreka. To je ena najbolj znanih matematičnih zgodb. Naj jo na kratko zapišem.

Naj bo $n \geq 2$ naravno število. Ali obstajajo taka naravna števila a, b in c, da je

$$a^n + b^n = c^n?$$

Za $n = 2$ je odgovor očitno "da". Rešitvam pravimo pitagorejske trojice; preprost primer so števila $a = 3$, $b = 4$ in $c = 5$. Pierre de Fermat, ki smo ga že omenili, je leta 1637 na robu strani v Diofantovi knjigi *Aritmetika* napisal, da je našel čudovit dokaz, da za noben $n \geq 3$ takih naravnih števil a, b, c ni, le na robu strani je premalo prostora za njegov zapis. Fermatove trditve se je prijelo ime *Fermatov zadnji izrek*. Glede dokaza se je Fermat skoraj zanesljivo zmotil, čeprav resnice seveda nikoli ne bomo izvedeli. Problem, ali ta izrek res velja, je namreč zatem ostal odprt več kot 350 let. Z njim so se spopadali nekateri največji matematiki, popularen pa je bil tudi med matematičnimi amaterji, saj se je zdelo, da je za rešitev morda potreben le genialen preblisk. Šele leta 1995 je angleški matematik *Andrew Wiles* objavil popoln dokaz Fermatovega zadnjega izreka. V njem se uporabljajo različna moderna matematična orodja. Dolg je čez sto strani in je v celoti razumljiv le redkim matematikom, ki premorejo potrebno tehnično znanje. Zanimivo je, da je Wiles, sicer že prej priznan matematik, problem reševal skrivoma. Po šestih letih dela je javno oznanil, da je našel rešitev. Toda kmalu zatem se je v njegovem dokazu našla napaka. Podrl se mu je svet... Po več kot letu dni je napako uspel odpraviti in specialisti s področja so potrdili, da je dokaz popoln. Leta 2016 je pri triinšestdesetih Wiles postal doslej najmlajši prejemnik Abelove nagrade.[10]

Svetovna matematika dosega velike uspehe. Tudi za slovensko matematiko upam trditi, da je zelo spodobna, odprta v svet in v svetu vidna. Ni se pustila zapeljati skušnjavi majhnih okolij, da bi zadovoljno obdelovala svoj mali vrtiček.

Kljub temu naj na koncu dodam še nekaj kritičnih misli. V današnjem svetu, tudi matematičnem, prevladuje čedalje večja tekmovalnost. Tekmujemo za projekte, napredovanja, revije, citate, poznanstva, sodelovanja... Socialna spretnost ima tako čedalje večjo vlogo tudi pri karieri matematika. Ko smo se pred dobrim letom poslovili od očeta moderne slovenske matematike, akademika Ivana Vidava, sem se večkrat vprašal, ali bi bil človek kot je on, silno skromen in zadržan, v današnjem času lahko tako uspešen in priznan, kot je bil v svojem. Nisem prepričan. Občutek imam, da je resnična predanost matematiki danes redkost in da se z raziskovalno matematiko ukvarja čedalje več ljudi, ki za to nimajo notranjega vzgiba. Tako se v znanstvenih revijah objavlja veliko sicer tehnično zahtevne matematike, ki pa ni lepa in ne prinaša novih idej. Toda mi samo preštevamo - ta je objavil deset člankov, ta dvajset, oni pa že petdeset. Se dovolj pogosto vprašamo, kaj je v teh člankih?

Matematiko vidim kot staro, imenitno damo. Tako staro, da hodi zelo počasi. Očarajo jo samo zares izvirne in zares lepe ideje. Teh je malo in ne pridejo na silo. Z udarniško miselnostjo - čim več in čim hitreje - je ne bomo očarali. Mogoče se ji zdimo celo malo otročji. Kaj si misli o meni, ne vem. Vem pa, da mi je dala veliko več, kot ji lahko vrnem.

[10]Abelova nagrada je najvišje matematično priznanje za življensko delo. Podeljuje ga Norveška akademija znanosti.