

Grupe - 2. domača naloga

- (1) Naj bo n naravno število in $f : G^n \rightarrow A$ poljubna preslikava. Če je $0 \leq i \leq n$ in če je $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, kadar katero od prvih i spremenljivk zamenjamo z 1, potem pravimo, da je koveriga f i -normalizirana (normalizirane koverige so n -normalizirane, običajne pa 0-normalizirane). Definirajmo zaporedje $f_0, \dots, f_n$ rekurzivno z

$$\begin{aligned} f_0 &= f, f_i = f_{i-1} - \delta g_i, \\ g_i(x_1, \dots, x_{n-1}) &= (-1)^i f_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Dokaži:

- (a) Če je za nek $i = 0, \dots, n$ koveriga f_i i -normalizirana, potem sta tudi koverigi f_{i+1} in g_{i+1} i -normalizirani in velja zveza

$$\begin{aligned} f_{i+1}(x_1, \dots, x_i, 1, x_{i+2}, \dots, x_n) &= \\ = (-1)^i \delta f_i(x_1, \dots, x_i, 1, 1, x_{i+2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

- (b) Če je koveriga δf normalizirana, potem je za vsak $i = 0, \dots, n$ koveriga f_i i -normalizirana in velja $\delta f_i = \delta f$.
(c) Vsak kocikel je kohomologen normaliziranemu kociklu in vsaka normalizirana koveriga, ki je slika kake koverige, je tudi slika normalizirane koverige.

Kohomološke grupe običajnega in normaliziranega kompleksa so izomorfne.

- (2) Naj bosta G in H poljubni grupi in naj bo $P_n = \mathbb{Z}[G^{n+1}]$ in $P'_n = \mathbb{Z}[H^{n+1}]$. Za poljubni preslikavi množic $x, y : G \rightarrow H$ definiramo homomorfizme Abelovih grup

$$\begin{aligned} \tau_n^x, \tau_n^y : P_n &\rightarrow P'_n, \phi_n^{x,y} : P_n \rightarrow P'_{n+1}, \\ \tau_n^x(g_0, \dots, g_n) &= (x(g_0), \dots, x(g_n)), \\ \tau_n^y(g_0, \dots, g_n) &= (y(g_0), \dots, y(g_n)), \\ \phi_n^{x,y}(g_0, \dots, g_n) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j (x(g_0), \dots, x(g_j), y(g_j), \dots, y(g_n)). \end{aligned}$$

Dokaži, da velja

$$\phi_{n-1}^{x,y} \circ d_n + d'_{n+1} \circ \phi_n^{x,y} = \tau_n^y - \tau_n^x.$$

(3) Naj bo H pogrupa v G končnega indeksa m in naj bo $G = Hs_1 \cup \dots Hs_m$.

(a) Dokaži, da obstaja vsaj ena preslikava $x : G \rightarrow H$ z lastnostjo $x(hg) = hx(g)$ za poljubna $h \in H$ in $g \in G$.

(b) Naj bo A desni modul nad G , $a \in A$ in $\mathbf{g} \in P_n$. Dokaži, da sta preslikavi

$$\begin{aligned} T_n^x : C_n(G, A) &\rightarrow C_n(H, A), \\ T_n^x(a \otimes_G \mathbf{g}) &= \sum_{i=1}^m as_i^{-1} \otimes_H \tau_n^x(s_i \mathbf{g}), \\ \Phi_n^{x,y} : C_n(G, A) &\rightarrow C_{n+1}(H, A) \\ \Phi_n^{x,y}(a \otimes_G \mathbf{g}) &= \sum_{i=1}^m as_i^{-1} \otimes_H \phi_n^{x,y}(s_i \mathbf{g}) \end{aligned}$$

dobro definirani, če je $x : G \rightarrow H$ kot v (a). Dokaži tudi, da je T_n^x verižna preslikava, homomorfizem Abelovih grup, je neodvisna od izbire elementov $s_1, \dots, s_m$ in zadošča

$$\Phi_{n-1}^{x,y} \circ \partial_n^G + \partial_{n+1}^H \circ \Phi_n^{x,y} = T_n^y - T_n^x$$

(Pomagaj si z nalogo 2!) Izpelj odtod, da T_n^x in T_n^y inducirata isto preslikavo $\text{Cor}_n : H_n(G, A) \rightarrow H_n(H, A)$ in da je $\text{Res}_n \circ \text{Cor}_n$ ravno množenje z m .

(c) Naj bo A levi modul nad G , Dokaži, da sta preslikavi

$$\begin{aligned} T_x^n : C^n(H, A) &\rightarrow C^n(G, A), \\ T_x^n(f)(\mathbf{g}) &= \sum_{i=1}^m s_i^{-1} f(\tau_n^x(s_i \mathbf{g})), \\ \Phi_{x,y}^n : C^n(H, A) &\rightarrow C^{n-1}(G, A), \\ \Phi_{x,y}^n(f)(\mathbf{g}) &= \sum_{i=1}^m s_i^{-1} f(\phi_{n-1}^{x,y}(s_i \mathbf{g})) \end{aligned}$$

dobro definirani, če je $x : G \rightarrow H$ kot v (a). Dokaži tudi, da je T_x^n verižna preslikava, homomorfizem Abelovih grup, je neodvisna od izbire elementov $s_1, \dots, s_m$ in zadošča

$$\delta_H^{n-1} \circ \Phi_{x,y}^n + \Phi_{x,y}^{n+1} \circ \delta_G^n = T_y^n - T_x^n.$$

(Pomagaj si z nalogo 2!) Izpelj odtod, da T_x^n in T_y^n inducirata isto preslikavo $\text{Cor}^n : H^n(H, A) \rightarrow H^n(G, A)$ in da je $\text{Cor}^n \circ \text{Res}^n$ ravno množenje z m .