

Grupe - 4. domača naloga
oddaj do 17. 6. 2004

- (1) Naj bo $R = \mathbb{C}[G]$ in naj bo

$$M = m_1 V_1 \oplus \dots \oplus m_r V_r, N = n_1 V_1 \oplus \dots \oplus n_r V_r$$

kjer so $V_1, \dots, V_r$ enostavni paroma neizomorfni R -moduli in $m_i, n_i \in \mathbb{N}$ za $i = 1, \dots, r$. Pri tem $m_i V_i$ pomeni direktno vsoto m_i kopij modula V_i . Za vsak $i = 1, \dots, r$ naj bo $M(i)$ vsota (ne nujno direktna) vseh podmodulov modula M , ki so izomorfni V_i . Podobno $N(i)$. Dokaži:

- (a) $M(i) = m_i V_i$,
 - (b) za vsak $i = 1, \dots, r$ in za vsak homomorfizem R modulov $\phi: M \rightarrow N$ velja $\phi(M(i)) \subseteq N(i)$,
 - (c) če je $m_i V_i \cong n_i V_i$, potem je $m_i = n_i$.
- (2) Naj bo $\rho: G \rightarrow M_d(\mathbb{C})$ reprezentacija in χ njen karakter. Definirajmo

$$\ker \chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}.$$

- (a) Če sta ρ in χ kot zgoraj, potem je $\ker \chi = \ker \rho$. Dokaži!
- (b) Dokaži, da je $\ker \chi_1 \cap \dots \cap \ker \chi_r = \{1\}$, kjer so $\chi_1, \dots, \chi_r$ vsi nerazcepni karakterji grupe G .
- (c) Dokaži, da je vsaka edinka grupe G enaka preseku jeder neke družine nerazcepnih karakterjev na G .
- (d) Dokaži, da je grupa G ni enostavna natanko tedaj, ko obstajata tak netrivialen nerazcepen karakter χ na G in tak netrivialen element $g \in G$, da je $\chi(g) = \chi(1)$.

- (3) Naj bo

$$Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle, D_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

- (a) Določi tabeli karakterjev grup Q_8 in D_8 . (Nasvet: Najprej poišči nerazcepne karakterje grupe G/G' , in jih na naraven način dvigni na G .)
 - (b) Poišči reprezentacije, ki ustrezajo nerazcepnim karakterjem.
 - (c) Dokaži, da grupi Q_8 in D_8 nista izomorfni.
 - (d) Dokaži, da sta algebri $\mathbb{C}[Q_8]$ in $\mathbb{C}[D_8]$ izomorfni, algebri $\mathbb{R}[Q_8]$ in $\mathbb{R}[D_8]$ pa ne.
- (4) Za vsak konjugiranostni razred C_i grupe G ($i = 1, \dots, r$) naj bo $c_i \in \mathbb{C}[G]$ njegova karakteristična funkcija, $\sigma_i \in C_i$ poljuben element in h_i število elementov v C_i . Naj bo $e_i \in \mathbb{C}[G]$ element ki ustreza identični matriki v $M_{d_i}(\mathbb{C})$ (kjer $\mathbb{C}[G] = M_{d_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{d_r}(\mathbb{C})$.)
- (a) Dokaži, da je

$$c_j = \sum_{i=1}^r \frac{h_j \chi_i(\sigma_j)}{d_i} e_i \text{ in } e_i = \frac{d_i}{|G|} \sum_{j=1}^r \chi_i(\sigma_j^{-1}) c_j.$$

- (b) Dokaži, da so stolpci v tabeli karakterjev paroma pravokotni, se pravi

$$\sum_{k=1}^r \chi_k(\sigma_i) \chi_k(\sigma_j^{-1}) = \frac{|G|}{h_i} \delta_{ij}.$$