

PRIMERI IZPITNIH VPRAŠANJ IZ MATEMATIKE

JAKA CIMPRIČ, APRIL 2004

Izpit sestavlja 4-5 vprašanj. Vsako ima več podvprašanj.

1. ŠTEVILA

- (1) (Definicija realnih števil)
 - (a) Naštej aksiome obsega.
 - (b) Naštej lastnosti relacije urejenosti.
 - (c) Kaj pravi Dedekindov aksiom?
 - (d) Definiraj različne vrste intervalov in jih grafično pojasni.
- (2) (Omejene množice) Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$.
 - (a) Kaj je gornja meja množice A ?
 - (b) Kaj je supremum množice A ?
 - (c) Kaj je maksimum množice A ?
 - (d) Na primeru razloži, v čem je razlika med maksimumom in supremumom.
- (3) (Decimalni zapis)
 - (a) Grafično pojasni, kako realnemu številu priredimo njegov decimalni zapis.
 - (b) Kako iz decimalnega zapisa dobimo pripadajoče realno število? Pojasni z vrstami.
 - (c) Dokaži, da vsakemu racionalnemu številu pripada periodičen decimalni zapis.
 - (d) Na primeru pojasni, kako iz periodičnega decimalnega zapisa dobimo pripadajoče racionalno število.
- (4) (Absolutna vrednost)
 - (a) Kaj je absolutna vrednost realnega števila?
 - (b) Naštej nekaj znanih identitet in neenakosti, v katerih nastopa absolutna vrednost.
 - (c) Kako definiramo odprti interval (a, b) in zaprti interval $[a, b]$ s pomočjo absolutne vrednosti?
 - (d) Reši neenačbo : $|5 - \frac{2}{x}| < 1$.

2. ZAPOREDJA

- (1) (Stekališča in limite)
 - (a) Kaj je zaporedje?
 - (b) Kaj je stekališče zaporedja?
 - (c) Kaj je limita zaporedja?
 - (d) Na primerih pojasni, v čem je razlika med stekališčem in limito.
- (2) (Omejena in monotona zaporedja)

- (a) Kaj pomeni, da je zaporedje omejeno? Kaj je supremum (infimum) omejenega zaporedja?
- (b) Kaj vemo o stekališčih omejenega zaporedja?
- (c) Kaj pomeni, da je zaporedje monotono?
- (d) Kaj vemo o stekališčih monotoni zapredij?
- (3) (Podzaporedje)
 - (a) Kaj je podzaporedje danega zaporedja? Povej tudi primer.
 - (b) Dokaži, da je podzaporedje konvergentnega zaporedja vedno konvergentno. V kakšni zvezi sta limiti obeh zapredij.
 - (c) Kakšna je zveza med stekališči danega zaporedja in limitami njegovih podzaporedij. Napiši izrek in ga razloži na konkretnem primeru.

3. VRSTE

- (4) (Vsota vrste)
 - (a) Kaj je zaporedje delnih vsot dane vrste?
 - (b) Kaj je vsota dane vrste?
 - (c) Napiši en primer konvergentne in en primer divergentne vrste. Odgovor dobro utemelji.
- (5) (Cauchyjev kriterij)
 - (a) Kaj pravi Cauchyjev kriterij za konvergenco vrst?
 - (b) Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, potem je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dokaži!
 - (c) Poišči tako vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, vendar vrsta divergira. Odgovor dobro utemelji.
- (6) (Absolutno konvergentne vrste)
 - (a) Kaj je absolutno konvergentna vrsta?
 - (b) S pomočjo Cauchyjevega kriterija pokaži, da je vsaka absolutno konvergentna vrsta tudi konvergentna.
 - (c) Poišči primer vrste, ki je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna. Odgovor dobro utemelji.
- (7) (Konvergenčni kriteriji za vrste)
 - (a) Kaj pravi primerjalni kriterij za konvergenco vrst?
 - (b) Kaj pravi kvocientni kriterij? Izpelji ga iz primerjalnega.
 - (c) Kaj pravi korenski kriterij? Izpelji ga iz primerjalnega.

Loči primer vrste s pozitivnimi členi od splošnega primera.
- (8) (Alternirajoče vrste).
 - (a) Kaj je alternirajoča vrsta? Podaj tudi primer.
 - (b) Kaj pravi Leibnitzev konvergenčni kriterij?
 - (c) Poišči primer alternirajoče vrste, ki je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna.

4. REALNE FUNKCIJE ENE SPREMENLJIVKE

- (1) (Definicija funkcije)
 - (a) Kaj je funkcija ene realne spremenljivke?
 - (b) Kaj je graf funkcije? Kdaj je dana krivulja graf neke funkcije?
 - (c) Kaj je definicijsko območje funkcije? Kako ga določimo iz grafa?
 - (d) Kaj je zaloga vrednosti funkcije? Kako jo določimo iz grafa?
- (2) (Injektivnost)

- (a) Kako je definirana injektivnost preslikave? Kako injektivnost preverimo na grafu?
- (b) Dokaži, da je kompozitum injektivnih preslikav injektivna preslikava in da iz injektivnosti preslikave $g \circ f$ sledi injektivnost preslikave f .
- (c) Naj bo A končna množica in f injektivna preslikava iz A v A . Dokaži, da je f surjektivna. Poišči neskončno množico B in injektivno preslikavo iz B v B , ki ni surjektivna.
- (3) (Surjektivnost)
 - (a) Kako je definirana surjektivnost preslikave? Kako surjektivnost preverimo na grafu?
 - (b) Dokaži, da je kompozitum surjektivnih preslikav surjektivna preslikava in da iz surjektivnosti preslikave $g \circ f$ sledi surjektivnost preslikave g .
 - (c) Naj bo A končna množica in f surjektivna preslikava iz A v A . Dokaži, da je f injektivna. Poišči neskončno množico B in surjektivno preslikavo iz B v B , ki ni injektivna.
- (4) (Inverz funkcije)
 - (a) Za kakšne funkcije f obstaja inverz f^{-1} ?
 - (b) Kako je inverz funkcije definiran, se pravi kaj je njegovo definicijsko območje, zaloga vrednosti in predpis?
 - (c) Kako iz grafa funkcije f ugotovimo, ali ima inverz? Kako iz grafa funkcije f dobimo graf funkcije f^{-1} .
 - (d) Poišči inverz funkcije $y = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$.
- (5) (Elementarne funkcije)
 - (a) Kaj so osnovni tipi elementarnih funkcij?
 - (b) Kako definiramo vsoto, produkt in kompozitum dveh funkcij? Kaj je elementarna funkcija?
 - (c) Povej primer elementarne funkcije, ki ni osnovnega tipa. Povej primer funkcije, ki ni elementarna.
 - (d) Kaj veš o zveznosti in odvedljivosti elementarnih funkcij?
- (6) (Ciklometrične funkcije)
 - (a) Kako sta definirani funkciji $\arcsin x$ in $\arccos x$? Nariši njuna grafa!
 - (b) Nariši grafa funkcij $\sin(\arcsin(x))$ in $\arcsin(\sin(x))$.
 - (c) Dokaži, da velja $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ za vsak $x \in [-1, 1]$.

5. LIMITA FUNKCIJE

- (1) (Definicija limite)
 - (a) Kako definiramo limito funkcije s pomočjo ϵ in δ ?
 - (b) Kako definiramo limito funkcije s pomočjo zaporedij?
 - (c) Razloži gornji definiciji geometrijsko.
- (2) (Limite in neenakosti)
 - (a) Naj bosta $f(x)$ in $g(x)$ taki funkciji, da velja $f(x) \leq g(x)$ za vsak x blizu a . V kakšni zvezi sta potem limiti teh funkcij v točki a . Odgovor utemelji.
 - (b) Dokaži, da za vsak neničeln $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ velja

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x.$$

- (c) S pomočjo gornjih točk dokaži, da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- (3) (Neskončne limite in limite v neskončnosti)
- (a) Kaj pomeni, da je limita funkcije v končni točki neskončna? Napiši definicijo!
 - (b) Kakšna je zveza med neskončnimi limitami v končnih točkah in vertikalnimi asimptotami?
 - (c) Kaj pomeni, da je limita funkcije v neskončni točki končna? Napiši definicijo!
 - (d) Kakšna je zveza med končnimi limitami v neskončnih točkah in horizontalnimi asimptotami?
- (4) (Definicija števila e)
- (a) Kako je definirano število e ?
 - (b) Koliko je $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$?
 - (c) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$.
 - (d) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
- (5) (Substitucija v limiti)
- (a) Izračunaj limito $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ s pomočjo substitucije $t = 2x$.
 - (b) Naj bo $\phi(t)$ taka funkcija, ki zadošča $\lim_{t \rightarrow b} \phi(t) = a$ in $\phi(t) \neq a$ za vsak $t \neq b$. Dokaži, da velja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow b} f(\phi(t))$.
 - (c) S primerom pokaži, da gornja trditev ne drži nujno, če je $\phi(t)$ konstantna funkcija a .

6. ZVEZNOST

- (1) (Definicija zveznosti) Kako definiramo zveznost funkcije v točki
- (a) s pomočjo limite,
 - (b) s pomočjo ϵ in δ ,
 - (c) s pomočjo limit zaporedij?
- (2) (Operacije z zveznimi funkcijami in limitami)
- (a) Kako sta definirani vsota in produkt funkcij.
 - (b) Dokaži, da je limita vsote enaka vsoti limit. Podobno za produkte.
 - (c) Dokaži, da je vsota zveznih funkcij zvezna funkcija. Podobno za produkte.
- (3) (Leve in desne limite, zveznost in odvodi) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \\ b, & x = a \\ h(x), & x > a \end{cases}$$

- (a) Kako sta definirani leva limita funkcije $g(x)$ v a in desna limita funkcije $h(x)$ v a . Kdaj obstaja limita funkcije $f(x)$ v a ?
 - (b) Kako definiramo levo zveznost funkcije $g(x)$ v a in desno zveznost funkcije $h(x)$ v a . Kdaj je funkcija $f(x)$ zvezna v a ?
 - (c) Kako definiramo levi odvod funkcije $g(x)$ v a in desni odvod funkcije $h(x)$ v a . Kdaj je funkcija $f(x)$ odvedljiva v a ?
- (4) (Kompozitum zveznih funkcij)
- (a) Natančno formuliraj izrek, da je kompozitum zveznih funkcij zvezna funkcija, in ga dokaži.

- (b) Naj bo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ in naj bo $g(x)$ zvezna v točki b . Dokaži, da velja $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$.
- (c) S pomočjo gornjega izreka izračunaj $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{4/3}$.
- (5) (Ničle zveznih funkcij)
 - (a) Kaj pomeni, da ima funkcija $f(x)$ ničlo na intervalu $[a, b]$?
 - (b) Kdaj ima zvezna funkcija zagotovo ničlo na intervalu $[a, b]$?
 - (c) Opiši metodo bisekcije.
 - (d) Poišči približek za ničlo enačbe $x^3 + x - 1 = 0$ na intervalu $[0, 1]$ s pomočjo treh korakov bisekcije.
- (6) (Zvezne funkcije na zaprtem in omejenem intervalu) Natančno formuliraj naslednje lastnosti zvezne funkcije na zaprtem in omejenem intervalu:
 - (a) omejenost in obstoj ekstremov,
 - (b) katere vrednosti zavzame,
 - (c) kdaj je njen inverz zagotovo zvezna funkcija.

7. ODVOD

- (1) (Definicija odvoda)
 - (a) Kako je definiran odvod funkcije v točki?
 - (b) Dokaži, da iz odvedljivosti sledi zveznost.
 - (c) Napiši pravila za odvajanje vsote, razlike, produkta in inverza. Enega dokaži!
 - (d) Napiši pravili za odvajanje kompozituma in inverzne funkcije. Enega dokaži!
- (2) (Uporaba odvoda)
 - (a) Kako izračunamo povprečno hitrost?
 - (b) Kako izračunamo trenutno hitrost?
 - (c) Kako se glasi enačba sekante?
 - (d) Kako se glasi enačba tangente?
- (3) (Diferencial)
 - (a) Kaj je diferencial funkcije?
 - (b) Kaj je geometrijski pomen diferenciala?
 - (c) Kako uporabimo diferencial za računanje približnih vrednosti funkcij? Razloži na primeru!
- (4) (Rolleov in Lagrangeov izrek)
 - (a) Formuliraj Rolleov izrek.
 - (b) Formuliraj Lagrangeov izrek in ga izpelji iz Rolleovega izreka.
 - (c) Naj bo $f(x)$ taka funkcija, da je $f'(x) \geq 0$ za vsak x . Dokaži, da je $f(x)$ naraščajoča.
 - (d) Funkcija $f(x) = -\frac{1}{x}$ zadošča $f'(x) \geq 0$ za vsak x , vendar ni naraščajoča, ker $f(-1) > f(1)$. V čem je problem?
- (5) (Lokalni ekstremini)
 - (a) Kaj je lokalni ekstrem funkcije?
 - (b) Formuliraj potreben pogoj za nastop ekstrema.
 - (c) Formuliraj zadostni pogoj za nastop ekstrema s prvim odvodom.
 - (d) Formuliraj zadostni pogoj za nastop ekstrema z drugim odvodom.
- (6) (Globalni ekstremini)
 - (a) Kaj je globalni ekstrem funkcije?
 - (b) Kaj so kandidati za globalni ekstrem?

- (c) Določi globalne ekstrem funkcije $f(x) = |\sin x|$ na intervalu $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.
- (7) (Konveksnost, konkavnost, prevoji)
 - (a) Kaj je definicija konveksne in konkavne funkcije?
 - (b) Kako določimo konveksnost in konkavnost z drugim odvodom?
 - (c) Kaj je definicija prevoja?
 - (d) Kako določimo prevoje s pomočjo drugega odvoda?
- (8) (Cauchyjev izrek in L' Hospitalovo pravilo) Naj bosta funkciji $f(x)$ in $g(x)$ zvezni na zaprtem intervalu $[a, b]$ in odvedljivi na odprtem intervalu (a, b) .
 - (a) Dokaži, da funkcija

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$$
 zadošča predpostavkam Rolleovega izreka.
 - (b) Dokaži, da obstaja tak $c \in (a, b)$, da velja

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
 - (c) Formuliraj L' Hospitalovo pravilo in ga dokaži.

8. NEDOLOČENI INTEGRAL

- (1) (Definicija, obstoj, enoličnost nedoločenega integrala)
 - (a) Kako je definiran nedoločeni integral funkcije?
 - (b) Kaj vemo o enoličnosti nedoločenega integrala?
 - (c) Kaj vemo o obstoju nedoločenega integrala?
- (2) (Integracija po delih)
 - (a) Kaj pravi pravilo za odvajanje produkta?
 - (b) Povej pravilo za integracijo po delih za nedoločeni integral in ga izpelji.
 - (c) Povej pravilo za integracijo po delih za določeni integral in ga izpelji.
- (3) (Integracija s substitucijo)
 - (a) Kaj pravi pravilo za odvajanje posredne funkcije?
 - (b) Povej pravilo za substitucijo v nedoločenem integralu in ga izpelji.
 - (c) Povej pravilo za substitucijo v določenem integralu in ga izpelji.
- (4) (Osnovni tipi nedoločenih integralov) Naj bo $R(x)$ racionalna funkcija.
 - (a) Kako izračunamo $\int R(x)dx$?
 - (b) Kako izračunamo $\int R(e^x)dx$?
 - (c) Kako izračunamo $\int R(\cos x) \sin x dx$ in $\int R(\sin x) \cos x dx$?

9. DOLOČENI INTEGRALI

- (1) (Definicija določenega integrala)
 - (a) Kaj je delitev intervala? Kaj je premer delitve?
 - (b) Kako dani delitvi in dani izbiri točk priredimo Riemannovo vsoto?
 - (c) Kako je definiran Riemannov integral?
- (2) (Približno računanje določenega integrala)
 - (a) Razloži geometrijski pomen določenega integrala.
 - (b) Kako izračunamo približek za $\int_a^b f(x)dx$ s pomočjo Riemannovih vsot?
 - (c) Kako izračunamo približek za $\int_a^b f(x)dx$ s pomočjo trapezne metode?
- (3) (Povprečje)
 - (a) Kako je definirano povprečje funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$?
 - (b) Kaj pravi izrek o povprečni vrednosti?

- (c) Kaj je geometrijska interpretacija izreka o povprečni vrednosti?
- (4) (Osnovni izrek infinitezimalnega računa) Naj bo funkcija $f(x)$ zvezna na intervalu $[a, b]$ in $F(x) = \int_a^x f(x)dx$.
 - (a) Dokaži, da je funkcija $F(x)$ zvezna na $[a, b]$.
 - (b) Dokaži, da je funkcija $F(x)$ odvedljiva na (a, b) in da je $F'(x) = f(x)$.
 - (c) Kaj pravi Leibnitzovo pravilo?
 - (d) Kaj pravi osnovni izrek infinitezimalnega računa?
- (5) (Gama funkcija)
 - (a) Kako je definirana funkcija $\Gamma(x)$?
 - (b) Dokaži, da je $\Gamma(1) = 1$.
 - (c) Dokaži, da je $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ za vsako naravno število n .
 - (d) Dokaži, da je $\Gamma(n) = (n-1)!$ za vsako naravno število n .
- (6) (Volumen vrtenine)
 - (a) Kako izračunamo volumen vrtenine z metodo prerezov?
 - (b) Kako izračunamo volumen vrtenine z metodo lupin?
 - (c) Kako izračunamo težišče prereza?
 - (d) Kaj pravi prvo Pappusovo pravilo?
- (7) (Dolžina krivulje in površina vrtenine)
 - (a) Kako izračunamo dolžino krivulje $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$?
 - (b) Kako izračunamo površino vrtenine?
 - (c) Kako izračunamo težišče krivulje?
 - (d) Kaj pravi drugo Pappusovo pravilo?

10. TAYLORJEVE VRSTE

- (1) (Konvergenčni radij)
 - (a) Kaj je definicija potenčne vrste?
 - (b) Kaj je definicija konvergenčnega radija potenčne vrste?
 - (c) Kako izračunamo konvergenčni radij s pomočjo kvocientnega ali korenskega kriterija?
 - (d) Določi konvergenčni radij vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.
- (2) (Taylorjeva vrsta)
 - (a) Kako je definirana Taylorjeva vrsta funkcije $f(x)$ v točki a ?
 - (b) Razvij funkcije e^x , $\cos x$ in $\sin x$ v Taylorjevo vrsto okrog $x = 0$.
 - (c) Razvij funkcije $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1-x)$ in $\frac{1}{(1-x)^2}$ v Taylorjevo vrsto okrog $x = 0$.
 - (d) Kaj je ostanek Taylorjeve vrste? Kako ga ocenimo?
- (3) (Uporaba Taylorjeve vrste)
 - (a) Naj bo $s(t)$ lega delca v trenutku t . Pojasni fizikalni pomen prvih treh členov Taylorjeve vrste za $s(t)$ okrog $t = t_0$.
 - (b) Kako nam pomaga Taylorjeva vrsta pri določanju lokalnih ekstremov? Pojasni na primeru!
 - (c) Kako nam pomaga Taylorjeva vrsta pri računanju limit? Pojasni na primeru!

11. ANALITIČNA GEOMETRIJA

- (1) (Produkti vektorjev iz $\mathbb{R}^3$)
 - (a) Kako je definiran skalarni produkt dveh vektorjev? Kdaj je enak 0?
 - (b) Kako je definiran vektorski produkt dveh vektorjev? Kdaj je enak 0?
 - (c) Kako je definiran mešani produkt treh vektorjev? Kdaj je enak 0?

- (2) (Premice v $\mathbb{R}^3$)
 - (a) Premica je podana s dvema točkama $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$. Določi parametrično in normalno enačbo te premice.
 - (b) Pojasni, kako izračunamo oddaljenost točke T od te premice.
 - (c) Pojasni, kako določimo projekcijo točke T na to premico.
- (3) (Ravnine v $\mathbb{R}^3$)
 - (a) Ravnina je podana s tremi točkami $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Določi parametrično in normalno enačbo te ravnine.
 - (b) Pojasni, kako izračunamo oddaljenost točke T od te ravnine.
 - (c) Pojasni, kako določimo projekcijo točke T od te ravnine.

12. LINEARNA ALGEBRA

- (1) (Podprostori)
 - (a) Napiši definicijo vektorskega podprostora.
 - (b) Opiši vse vektorske podprostore v $\mathbb{R}^3$.
 - (c) Določi najmanjši vektorski podprostor prostora V , ki vsebuje dane vektorje $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$.
- (2) (Linearno neodvisni vektorji) Naj bodo $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorji v $\mathbb{R}^n$.
 - (a) Kdaj so ti vektorji linearno neodvisni? Kako to računsko preverimo?
 - (b) Dokaži, da iz linearne neodvisnosti sledi $k \leq n$.
 - (c) Kako te vektorje dopolnimo do baze prostora $\mathbb{R}^n$?
- (3) (Razpenjajoči vektorji) Naj bodo $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorji v $\mathbb{R}^n$.
 - (a) Kdaj ti vektorji razpenjajo (=generirajo) $\mathbb{R}^n$? Kako to računsko preverimo?
 - (b) Dokaži, da za razpenjajoče vektorje velja $k \geq n$.
 - (c) Kako iz razpenjajočih vektorjev izberemo bazo prostora $\mathbb{R}^n$?
- (4) (Elementarne matrike)
 - (a) Kako zmnožimo dve matriki?
 - (b) Definiraj elementarne matrike?
 - (c) Kakšna je zveza med matrikama A in EA , kjer je E elementarna matrika?
 - (d) Kakšna je zveza med matrikama A in AE , kjer je E elementarna matrika?
- (5) (Determinante)
 - (a) Kako izračunamo determinanto z razvojem po i -ti vrstici oziroma j -tem stolpcu.
 - (b) Formuliraj Cramerovo pravilo in ga dokaži.
 - (c) Kako se glasi formula za inverz matrike?
- (6) (Metoda najmanjših kvadratov)
 - (a) Kako rešimo protisloven sistem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ po metodi najmanjših kvadratov.
 - (b) Kako določimo premico, ki se najboljše prilega danim točkam $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$?
 - (c) Kako določimo kvadratno parabolo, ki se najboljše prilega danim točkam $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$?

13. VEKTORSKE FUNKCIJE

- (1) (Hitrost, tangenta, dolžina poti) Naj bo $\mathbf{r}(t)$ lega delca v trenutku t .

- (a) Določi vektorsko hitrost, skalarno hitrost in enotsko tangento v trenutku t .
- (b) Določi dolžino poti, ki jo prepotuje delec med trenutkoma t_0 in t_1 .
- (c) Kaj je naravni parameter? Kako funkcijo $\mathbf{r}(t)$ izrazimo z naravnim parametrom?
- (2) (Pospešek, normala, ukrivljenost) Naj bo $\mathbf{r}(t)$ lega delca v trenutku t .
 - (a) Določi pospešek delca v trenutku t .
 - (b) Kako sta definirani enotska normala in fleksijska ukrivljenost.
 - (c) Določi tangencialno in normalno komponento pospeška.
- (3) (Parametrično podane krivulje)
 - (a) Kako podamo ravninsko krivuljo v parametrični obliki? Kako ugotovimo ali je sklenjena?
 - (b) Izpelji formulo za dolžino parametrično podane krivulje.
 - (c) Izpelji formulo za ploščino lika, ki ga oklepa sklenjena parametrično podana krivulja.
- (4) (Polarni zapis)
 - (a) Kako podamo ravninsko krivuljo v polarnem zapisu? Kako ugotovimo ali je sklenjena?
 - (b) Kako polarni zapis pretvorimo v kartezičnega in obratno?
 - (c) Izpelji formulo za dolžino krivulje v polarnem zapisu.
 - (d) Izpelji formulo za ploščino, ki jo obdaja sklenjena krivulja v polarnem zapisu.

14. FUNKCIJE DVEH SPREMENLJIVK

- (1) (Zveznost)
 - (a) Kako definiramo zveznost funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) s pomočjo ϵ in δ ?
 - (b) Naj bo funkcija $f(x, y)$ zvezna v (x_0, y_0) in naj bo (h, k) poljuben vektor. Dokaži, da je funkcija $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ zvezna v točki $t = 0$. Kako dobiš graf funkcije $F(t)$ iz grafa funkcije $f(x, y)$?
 - (c) Pokaži, da funkcija

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2 \\ 0, & y \neq x^2 \end{cases}$$

ni zvezna v točki $(0, 0)$.

- (d) Pokaži, da je za vsak vektor (h, k) funkcija $G(t) = g(th, tk)$ zvezna v $t = 0$.
- (2) (Parcialni odvod, smerni odvod)
 - (a) Kako sta definirana parcialna odvoda funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) ?
 - (b) Kako je definiran smerni odvod funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) in smeri (h, k) ?
 - (c) Izrazi parcialna odvoda s smernimi odvodi.
 - (d) Izrazi smerne odvode s parcialnimi odvodom.
- (3) (Tangentna ravnina) Dana je funkcija $z = f(x, y)$ in točka (x_0, y_0) . Naj bo $z_0 = f(x_0, y_0)$.
 - (a) Kako dobimo grafa funkcij $g(x) = f(x, y_0)$ in $h(y) = f(x_0, y)$ iz grafa funkcije $f(x, y)$?

- (b) Določi enačbo tangente na krivuljo $x \mapsto (x, y_0, f(x, y_0))$ v točki (x_0, y_0, z_0) in enačbo tangente na krivuljo $y \mapsto (x_0, y, f(x_0, y))$ v točki (x_0, y_0, z_0) .
 (c) Določi enačbo tangentne ravnine na ploskev $z = f(x, y)$ v točki (x_0, y_0, z_0) .
 (4) (Lokalni ekstremini) Dana je funkcija

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2) = y^2 - 3x^2y + 2x^4.$$

- (a) Nariši nivojnico $f(x, y) = 0$. Označi, kje je $f(x, y) < 0$ in kje $f(x, y) > 0$.
 (b) Dokaži, da točka $(0, 0)$ ni lokalni ekstrem funkcije $f(x, y)$.
 (c) Dokaži, da je za vsak vektor (h, k) točka $t = 0$ lokalni minimum funkcije $F(t) = f(th, tk)$.
 (d) Kako dobimo graf funkcije $z = F(t)$ iz grafa funkcije $z = f(x, y)$?
 (5) (Globalni ekstremini)
 (a) Kaj so globalni ekstremini funkcije $f(x, y)$ na območju D ?
 (b) Kako določimo kandidate za globalni ekstrem v notranjosti D ?
 (c) Kako določimo kandidate za globalni ekstrem na robu D ?
 (d) Kako ugotovimo, kateri kandidat je res globalni ekstrem?
 (6) (Gradient)
 (a) Kako je definiran gradient funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) ?
 (b) Kaj je geometrijski pomen gradienta?
 (c) Kako s pomočjo gradienta določimo tangento na nivojnico $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ v točki (x_0, y_0) ? Kaj pa normalo?
 (7) (Totalni diferencial)
 (a) Kaj pomeni, da je funkcija $f(x, y)$ diferenciable v točki (x_0, y_0) ?
 (b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?
 (c) Kaj je geometrijski pomen totalnega diferenciala?
 (d) Kako uporabljamo totalni diferencial za računanje približkov? Razloži na primeru?
 (8) (Zadostni pogoj za lokalni ekstrem) Naj bo (x_0, y_0) kritična točka funkcije $f(x, y)$ in (h, k) poljuben vektor.
 (a) Naj bo $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Izrazi $F''(0)$ z drugimi parcialnimi odvodi funkcije $f(x, y)$.
 (b) Naj bodo A, B, C taka realna števila da velja $AC - B^2 > 0$. Dokaži, da ima število $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ enak predznak v vseh točkah $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$.
 (c) Izpelji zadosten pogoj za nastop lokalnega ekstrema.
 (9) (Volumni v kartezičnih koordinatah) Naj bo

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

in $h(x, y)$ nenegativna funkcija na območju D . Naj bo

$$\Gamma = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq h(x, y)\}.$$

- (a) Skiciraj D in Γ ter prerez Γ z ravnino $x = x_0$.
 (b) Kolikšna je ploščina prereza območja Γ z ravnino $x = x_0$.
 (c) Kolikšen je volumen območja Γ ?
 (10) (Volumni v polarnih koordinatah) Naj bo $0 \leq a < b$ in

$$D = \{(r, \phi) : a \leq r \leq b\}$$

območje v polarni ravnini. Naj bo $h(r, \phi)$ nenegativna funkcija na D in

$$\Gamma = \{(r, \phi, z) : (r, \phi) \in D, 0 \leq z \leq h(r, \phi)\}.$$

- (a) Skiciraj D , Γ in prerez Γ z valjem $r = c$.
- (b) Kolikšna je površina prereza območja Γ z valjem $r = c$?
- (c) Kolikšen je volumen območja Γ ?

15. DIFERENCIALNE ENAČBE

- (1) (Geometrijski pomen diferencialne enačbe)
 - (a) Napiši definicijo rešitve začetnega pogoja

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$
 - (b) Kako rešitev približno določimo s poljem smernic?
 - (c) Kako rešitev približno določimo z Eulerjevo metodo?
- (2) (Linearna diferencialna enačba prvega reda) Naj bosta $P(x)$ in $Q(x)$ dani zvezni funkciji ene spremenljivke.
 - (a) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = P(x)y$?
 - (b) Kako poiščemo partikularno rešitev diferencialne enačbe $y' = P(x)y + Q(x)$?
 - (c) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = P(x)y + Q(x)$?
- (3) (Linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti) Naj bodo a, b, c realna števila, $a \neq 0$ in $f(x)$ zvezna funkcija ene spremenljivke.
 - (a) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $ay'' + by' + cy = 0$?
 - (b) Kako poiščemo partikularno rešitev diferencialne enačbe $ay'' + by' + cy = f(x)$?
 - (c) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $ay'' + by' + cy = f(x)$?