PRIMERI IZPITNIH VPRAŠANJ IZ MATEMATIKE

JAKA CIMPRIČ, APRIL 2004

Izpit sestavlja 4-5 vprašanj. Vsako ima več podvprašanj.

1. Števila

(1) (Definicija realnih števil)
   (a) Naštej aksiome obsega.
   (b) Naštej lastnosti relacije urejenosti.
   (c) Kaj pravi Dedekindov aksiom?
   (d) Definiraj različne vrste intervalov in jih grafično pojasni.

(2) (Omejene množice) Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$.
   (a) Kaj je gornja meja množice A?
   (b) Kaj je supremum množice A?
   (c) Kaj je maksimum množice A?
   (d) Na primeru razloži, v čem je razlika med maksimumom in supremumom.

(3) (Decimalni zapis)
   (a) Grafično pojasni, kako realnemu številu priredimo njegov decimalni zapis.
   (b) Kako iz decimalnega zapisa dobimo pripadajoče realno število? Pojasni z vrstami.
   (c) Dokaži, da vsakemu racionalnemu številu pripada periodičen decimalni zapis.
   (d) Na primeru pojasni, kako iz periodičnega decimalnega zapisa dobimo pripadajoče racionalno število.

(4) (Absolutna vrednost)
   (a) Kaj je absolutna vrednost realnega števila?
   (b) Naštej nekaj znanih identitet in neenakosti, v katerih nastopa absolutna vrednost.
   (c) Kako definiramo odprti interval (a, b) in zaprti interval $[a, b]$ s pomočjo absolutne vrednosti?
   (d) Reši neenačbo : $|5 - \frac{2}{x}| < 1$.

2. Zaporedja

(1) (Stekališča in limite)
   (a) Kaj je zaporedje?
   (b) Kaj je stekališče zaporedja?
   (c) Kaj je limita zaporedja?
   (d) Na primerih pojasni, v čem je razlika med stekališčem in limito.

(2) (Omejena in monotona zaporedja)

   (a) Kaj pomeni, da je zaporedje omejeno? Kaj je supremum (infimum) omejenega zaporedja?
   (b) Kaj vemo o stekališčih omejenega zaporedja?
   (c) Kaj pomeni, da je zaporedje monotono?
   (d) Kaj vemo o stekališčih monotonih zapredij?
(3) (Podzaporedje)
   (a) Kaj je podzaporedje danega zaporedja? Povej tudi primer.
   (b) Dokaži, da je podzaporedje konvergentnega zaporedja vedno konvergentno. V kakšni zvezi sta limiti obeh zapredij.
   (c) Kakšna je zveza med stekališči danega zaporedja in limitami njegovih podzaporedij. Napiši izrek in ga razloži na konkretnem primeru.

3. Vrste

(4) (Vsota vrste)
   (a) Kaj je zaporedje delnih vsot dane vrste?
   (b) Kaj je vsota dane vrste?
   (c) Napiši en primer konvergentne in en primer divergentne vrste. Odgovor dobro utemelji.
(5) (Cauchyjev kriterij)
   (a) Kaj pravi Cauchyjev kriterij za konvergenco vrst?
   (b) Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, potem je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokaži!
   (c) Poišči tako vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, vendar vrsta divergira. Odgovor dobro utemelji.
(6) (Absolutno konvergentne vrste)
   (a) Kaj je absolutno konvergentna vrsta?
   (b) S pomočjo Cauchyjevega kriterija pokaži, da je vsaka absolutno konvergentna vrsta tudi konvergentna.
   (c) Poišči primer vrste, ki je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna. Odgovor dobro utemelji.
(7) (Konvergenčni kriteriji za vrste)
   (a) Kaj pravi primerjalni kriterij za konvergenco vrst?
   (b) Kaj pravi kvocientni kriterij? Izpelji ga iz primerjalnega.
   (c) Kaj pravi korenski kriterij? Izpelji ga iz primerjalnega.
   Loči primer vrste s pozitivnimi členi od splošnega primera.
(8) (Alternirajoče vrste).
   (a) Kaj je alternirajoča vrsta? Podaj tudi primer.
   (b) Kaj pravi Leibnitzev konvergenňi kriterij?
   (c) Poišči primer alternirajoče vrste, ki je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna.

4. Realne funkcije ene spremenljivke

(1) (Definicija funkcije)
   (a) Kaj je funkcija ene realne spremenljivke?
   (b) Kaj je graf funkcije? Kdaj je dana krivulja graf neke funkcije?
   (c) Kaj je definicijsko območje funkcije? Kako ga določimo iz grafa?
   (d) Kaj je zaloga vrednosti funkcije? Kako jo določimo iz grafa?
(2) (Injektivnost)

   (a) Kako je definirana injektivnost preslikave? Kako injektivnost preverimo na grafu?
   (b) Dokaži, da je kompozitum injektivnih preslikav injektivna preslikava in da iz injektivnosti preslikave $g \circ f$ sledi injektivnost preslikave f.
   (c) Naj bo A končna množica in f injektivna preslikava iz A v A. Dokaži, da je f surjektivna. Poišči neskončno množico B in injektivno preslikavo iz B v B, ki ni surjektivna.

(3) (Surjektivnost)
   (a) Kako je definirana surjektivnost preslikave? Kako surjektivnost preverimo na grafu?
   (b) Dokaži, da je kompozitum surjektivnih preslikav surjektivna preslikava in da iz surjektivnosti preslikave $g \circ f$ sledi surjektivnost preslikave g.
   (c) Naj bo A končna množica in f surjektivna preslikava iz A v A. Dokaži, da je f injektivna. Poišči neskončno množico B in surjektivno preslikavo iz B v B, ki ni injektivna.

(4) (Inverz funkcije)
   (a) Za kakšne funkcije f obstaja inverz f^{-1}?
   (b) Kako je inverz funkcije definiran, se pravi kaj je njegovo definicijsko območje, zaloga vrednosti in predpis?
   (c) Kako iz grafa funkcije f ugotovimo, ali ima inverz? Kako iz grafa funkcije f dobimo graf funkcije f^{-1}.
   (d) Poišči inverz funkcije $y = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$.

(5) (Elementarne funkcije)
   (a) Kaj so osnovni tipi elementarnih funkcij?
   (b) Kako definiramo vsoto, produkt in kompozitum dveh funkcij? Kaj je elementarna funkcija?
   (c) Povej primer elementarne funkcije, ki ni osnovnega tipa. Povej primer funkcije, ki ni elementarna.
   (d) Kaj veš o zveznosti in odvedljivosti elementarnih funkcij?

(6) (Ciklometrične funkcije)
   (a) Kako sta definirani funkciji $\arcsin x$ in $\arccos x$? Nariši njuna grafa!
   (b) Nariši grafa funkcij $\sin(\arcsin(x))$ in $\arcsin(\sin(x))$.
   (c) Dokaži, da velja $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ za vsak $x \in [-1, 1]$.

5. Limita funkcije

(1) (Definicija limite)
   (a) Kako definiramo limito funkcije s pomočjo ϵ in δ?
   (b) Kako definiramo limito funkcije s pomočjo zaporedij?
   (c) Razloži gornji definiciji geometrijsko.

(2) (Limite in neenakosti)
   (a) Naj bosta $f(x)$ in $g(x)$ taki funkciji, da velja $f(x) \leq g(x)$ za vsak x blizu a. V kakšni zvezi sta potem limiti teh funkcij v točki a. Odgovor utemelji.
   (b) Dokaži, da za vsak neničeln $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ velja

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x.$$

(c) S pomočjo gornjih točk dokaži, da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(3) (Neskončne limite in limite v neskončnosti)
(a) Kaj pomeni, da je limita funkcije v končni točki neskončna? Napiši definicijo!
(b) Kakšna je zveza med neskončnimi limitami v končnih točkah in vertikalnimi asimptotami?
(c) Kaj pomeni, da je limita funkcije v neskončni točki končna? Napiši definicijo!
(d) Kakšna je zveza med končnimi limitami v neskončnih točkah in horizontalnimi asimptotami?

(4) (Definicija števila e)
(a) Kako je definirano število e?
(b) Koliko je $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$?
(c) Izračunaj $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$.
(d) Izračunaj $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

(5) (Substitucija v limiti)
(a) Izračunaj limito $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ s pomočjo substitucije $t = 2x$.
(b) Naj bo $\phi(t)$ taka funkcija, ki zadošca $\lim_{t\to b} \phi(t) = a$ in $\phi(t) \neq a$ za vsak $t \neq b$. Dokaži, da velja $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{t\to b} f(\phi(t))$.
(c) S primerom pokaži, da gornja trditev ne drži nujno, če je $\phi(t)$ konstantna funkcija a.

6. Zveznost

(1) (Definicija zveznosti) Kako definiramo zveznost funkcije v točki
(a) s pomočjo limite,
(b) s pomočjo ϵ in δ,
(c) s pomočjo limit zaporedij?

(2) (Operacije z zveznimi funkcijami in limitami)
(a) Kako sta definirani vsota in produkt funkcij.
(b) Dokaži, da je limita vsote enaka vsoti limit. Podobno za produkte.
(c) Dokaži, da je vsota zveznih funkcij zvezna funkcija. Podobno za produkte.

(3) (Leve in desne limite, zveznost in odvodi) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \\ b, & x = a \\ h(x), & x > a \end{cases}$$

(a) Kako sta definirani leva limita funkcije $g(x)$ v a in desna limita funkcije $h(x)$ v a. Kdaj obstaja limita funkcije $f(x)$ v a?
(b) Kako definiramo levo zveznost funkcije $g(x)$ v a in desno zveznost funkcije $h(x)$ v a. Kdaj je funkcija $f(x)$ zvezna v a?
(c) Kako definiramo levi odvod funkcije $g(x)$ v a in desni odvod funkcije $h(x)$ v a. Kdaj je funkcija $f(x)$ odvedljiva v a?

(4) (Kompozitum zveznih funkcij)
(a) Natančno formuliraj izrek, da je kompozitum zveznih funkcij zvezna funkcija, in ga dokaži.

   (b) Naj bo $\lim_{x\to a} f(x) = b$ in naj bo $g(x)$ zvezna v točki b. Dokaži, da velja $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$.
   (c) S pomočjo gornjega izreka izračunaj $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{4/3}$.
(5) (Ničle zveznih funkcij)
   (a) Kaj pomeni, da ima funkcija $f(x)$ ničlo na intervalu $[a, b]$?
   (b) Kdaj ima zvezna funkcija zagotovo ničlo na intervalu $[a, b]$?
   (c) Opiši metodo bisekcije.
   (d) Poišči približek za ničlo enačbe $x^3 + x - 1 = 0$ na intervalu $[0, 1]$ s pomočjo treh korakov bisekcije.
(6) (Zvezne funkcije na zaprtem in omejenem intervalu) Natančno formuliraj naslednje lastnosti zvezne funkcije na zaprtem in omejenem intervalu:
   (a) omejenost in obstoj ekstremov,
   (b) katere vrednosti zavzame,
   (c) kdaj je njen inverz zagotovo zvezna funkcija.

7. Odvod

(1) (Definicija odvoda)
   (a) Kako je definiran odvod funkcije v točki?
   (b) Dokaži, da iz odvedljivosti sledi zveznost.
   (c) Napiši pravila za odvajanje vsote, razlike, produkta in inverza. Enega dokaži!
   (d) Napiši pravili za odvajanje kompozituma in inverzne funkcije. Enega dokaži!
(2) (Uporaba odvoda)
   (a) Kako izračunamo povprečno hitrost?
   (b) Kako izračunamo trenutno hitrost?
   (c) Kako se glasi enačba sekante?
   (d) Kako se glasi enačba tangente?
(3) (Diferencial)
   (a) Kaj je diferencial funkcije?
   (b) Kaj je geometrijski pomen diferenciala?
   (c) Kako uporabimo diferencial za računanje približnih vrednosti funkcij? Razloži na primeru!
(4) (Rolleov in Lagrangeov izrek)
   (a) Formuliraj Rolleov izrek.
   (b) Formuliraj Lagrangeov izrek in ga izpelji iz Rolleovega izreka.
   (c) Naj bo $f(x)$ taka funkcija, da je $f'(x) \geq 0$ za vsak x. Dokaži, da je $f(x)$ naraščajoča.
   (d) Funkcija $f(x) = -\frac{1}{x}$ zadošča $f'(x) \geq 0$ za vsak x, vendar ni naraščajoča, ker $f(-1) > f(1)$. V čem je problem?
(5) (Lokalni ekstremi)
   (a) Kaj je lokalni ekstrem funkcije?
   (b) Formuliraj potrebni pogoj za nastop ekstrema.
   (c) Formuliraj zadostni pogoj za nastop ekstrema s prvim odvodom.
   (d) Formuliraj zadostni pogoj za nastop ekstrema z drugim odvodom.
(6) (Globalni ekstremi)
   (a) Kaj je globalni ekstrem funkcije?
   (b) Kaj so kandidati za globalni ekstrem?

(c) Določi globalne ekstrem funkcije $f(x) = |\sin x|$ na intervalu $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

(7) (Konveksnost, konkavnost, prevoji)
(a) Kaj je definicija konveksne in konkavne funkcije?
(b) Kako določimo konveksnost in konkavnost z drugom odvodom?
(c) Kaj je definicija prevoja?
(d) Kako določimo prevoje s pomočjo drugega odvoda?

(8) (Cauchyjev izrek in L' Hospitalovo pravilo) Naj bosta funkciji $f(x)$ in $g(x)$ zvezni na zaprtem intervalu $[a, b]$ in odvedljivi na odprtem intervalu (a, b).
(a) Dokaži, da funkcija

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$$

zadošča predpostavkam Rolleovega izreka.
(b) Dokaži, da obstaja tak $c \in (a, b)$, da velja

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(c) Formuliraj L' Hospitalovo pravilo in ga dokaži.

8. Nedoločeni integral

(1) (Definicija, obstoj, enoličnost nedoločenega integrala)
(a) Kako je definiran nedoločeni integral funkcije?
(b) Kaj vemo o enoličnosti nedoločenega integrala?
(c) Kaj vemo o obstoju nedoločenega integrala?

(2) (Integracija po delih)
(a) Kaj pravi pravilo za odvajanje produkta?
(b) Povej pravilo za integracijo po delih za nedoločeni integral in ga izpelji.
(c) Povej pravilo za integracijo po delih za določeni integral in ga izpelji.

(3) (Integracija s substitucijo)
(a) Kaj pravi pravilo za odvajanje posredne funkcije?
(b) Povej pravilo za substitucijo v nedoločenem integralu in ga izpelji.
(c) Povej pravilo za substitucijo v določenem integralu in ga izpelji.

(4) (Osnovni tipi nedoločenih integralov) Naj bo $R(x)$ racionalna funkcija.
(a) Kako izračunamo $\int R(x)dx$?
(b) Kako izračunamo $\int R(e^x)dx$?
(c) Kako izračunamo $\int R(\cos x)\sin x dx$ in $\int R(\sin x)\cos x dx$?

9. Določeni integrali

(1) (Definicija določenega integrala)
(a) Kaj je delitev intervala? Kaj je premer delitve?
(b) Kako dani delitvi in dani izbiri točk priredimo Riemannovo vsoto?
(c) Kako je definiran Riemannov integral?

(2) (Približno računanje določenega integrala)
(a) Razloži geometrijski pomen določenega integrala.
(b) Kako izračunamo približek za $\int_a^b f(x)dx$ s pomočjo Riemannovih vsot?
(c) Kako izračunamo približek za $\int_a^b f(x)dx$ s pomočjo trapezne metode?

(3) (Povprečje)
(a) Kako je definirano povprečje funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$?
(b) Kaj pravi izrek o povprečni vrednosti?

   (c) Kaj je geometrijska interpretacija izreka o povprečni vrednosti?
(4) (Osnovni izrek infinitezimalnega računa) Naj bo funkcija $f(x)$ zvezna na intrvalu $[a, b]$ in $F(x) = \int_a^x f(x)dx$.
   (a) Dokaži, da je funkcija $F(x)$ zvezna na $[a, b]$.
   (b) Dokaži, da je funkcija $F(x)$ odvedljiva na (a, b) in da je $F'(x) = f(x)$.
   (c) Kaj pravi Leibnitzovo pravilo?
   (d) Kaj pravi osnovni izrek infinitezimalnega računa?
(5) (Gama funkcija)
   (a) Kako je definirana funkcija $\Gamma(x)$?
   (b) Dokaži, da je $\Gamma(1) = 1$.
   (c) Dokaži, da je $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$ za vsako naravno število n.
   (d) Dokaži, da je $\Gamma(n) = (n - 1)!$ za vsako naravno število n.
(6) (Volumen vrtenine)
   (a) Kako izračunamo volumen vrtenine z metodo prerezov?
   (b) Kako izračunamo volumen vrtenine z metodo lupin?
   (c) Kako izračunamo težišče prereza?
   (d) Kaj pravi prvo Pappusovo pravilo?
(7) (Dolžina krivulje in površina vrtenine)
   (a) Kako izračunamo dolžino krivulje $y = f(x), a \leq x \leq b$?
   (b) Kako izračunamo površino vrtenine?
   (c) Kako izračunamo težišče krivulje?
   (d) Kaj pravi drugo Pappusovo pravilo?

10. Taylorjeve vrste

(1) (Konvergenčni radij)
   (a) Kaj je definicija potenčne vrste?
   (b) Kaj je definicija konvergenčnega radija potenčne vrste?
   (c) Kako izračunamo konvergenčni radij s pomočjo kvocientnega ali korenskega kriterija?
   (d) Določi konvergenčni radij vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.
(2) (Taylorjeva vrsta)
   (a) Kako je definirana Taylorjeva vrsta funkcije $f(x)$ v točki a?
   (b) Razvij funkcije $e^x, \cos x$ in $\sin x$ v Taylorjevo vrsto okrog $x = 0$.
   (c) Razvij funkcije $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1-x)$ in $\frac{1}{(1-x)^2}$ v Taylorjevo vrsto okrog $x = 0$.
   (d) Kaj je ostanek Taylorjeve vrste? Kako ga ocenimo?
(3) (Uporaba Taylorjeve vrste)
   (a) Naj bo $s(t)$ lega delca v trenutku t. Pojasni fizikalni pomen prvih treh členov Taylorjeve vrste za $s(t)$ okrog $t = t_0$.
   (b) Kako nam pomaga Taylorjeva vrsta pri določanju lokalnih ekstremov? Pojasni na primeru!
   (c) Kako nam pomaga Taylorjeva vrsta pri računanju limit? Pojasni na primeru!

11. Analitična geometrija

(1) (Produkti vektorjev iz $\mathbb{R}^3$)
   (a) Kako je definiran skalarni produkt dveh vektorjev? Kdaj je enak 0?
   (b) Kako je definiran vektorski produkt dveh vektorjev? Kdaj je enak 0?
   (c) Kako je definiran mešani produkt treh vektorjev? Kdaj je enak 0?

(2) (Premice v $\mathbb{R}^3$)
   (a) Premica je podana s dvema točkama $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$. Določi parametrično in normalno enačbo te premice.
   (b) Pojasni, kako izračunamo oddaljenost točke T od te premice.
   (c) Pojasni, kako določimo projekcijo točke T na to premico.

(3) (Ravnine v $\mathbb{R}^3$)
   (a) Ravnina je podana s tremi točkami $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Določi parametrično in normalno enačbo te ravnine.
   (b) Pojasni, kako izračunamo oddaljenost točke T od te ravnine.
   (c) Pojasni, kako določimo projekcijo točke T od te ravnine.

12. Linearna algebra

(1) (Podprostori)
   (a) Napiši definicijo vektorskega podprostora.
   (b) Opiši vse vektorske podprostore v $\mathbb{R}^3$.
   (c) Določi najmanjši vektorski podprostor prostora V, ki vsebuje dane vektorje $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$.

(2) (Linearno neodvisni vektorji) Naj bodo $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorji v $\mathbb{R}^n$.
   (a) Kdaj so ti vektorji linearno neodvisni? Kako to računsko preverimo?
   (b) Dokaži, da iz linearne neodvisnosti sledi $k \leq n$.
   (c) Kako te vektorje dopolnimo do baze prostora $\mathbb{R}^n$?

(3) (Razpenjajoči vektorji) Naj bodo $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorji v $\mathbb{R}^n$.
   (a) Kdaj ti vektorji razpenjajo (=generirajo) $\mathbb{R}^n$? Kako to računsko preverimo?
   (b) Dokaži, da za razpenjajoče vektorje velja $k \geq n$.
   (c) Kako iz razpenjajočih vektorjev izberemo bazo prostora $\mathbb{R}^n$?

(4) (Elementarne matrike)
   (a) Kako zmnožimo dve matriki?
   (b) Definiraj elementarne matrike?
   (c) Kakšna je zveza med matrikama A in EA, kjer je E elementarna matrika?
   (d) Kakšna je zveza med matrikama A in AE, kjer je E elementarna matrika?

(5) (Determinante)
   (a) Kako izračunamo determinanto z razvojem po i-ti vrstici oziroma j-tem stolpcu.
   (b) Formuliraj Cramerovo pravilo in ga dokaži.
   (c) Kako se glasi formula za inverz matrike?

(6) (Metoda najmanjših kvadratov)
   (a) Kako rešimo protisloven sistem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ po metodi najmanjših kvadratov.
   (b) Kako določimo premico, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$?
   (c) Kako določimo kvadratno parabolo, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$?

13. Vektorske funkcije

(1) (Hitrost, tangenta, dolžina poti) Naj bo $\mathbf{r}(t)$ lega delca v trenutku t.

(a) Določi vektorsko hitrost, skalarno hitrost in enotsko tangento v trenutku t.
(b) Določi dolžino poti, ki jo prepotuje delec med trenutkoma t_0 in t_1.
(c) Kaj je naravni parameter? Kako funkcijo $\mathbf{r}(t)$ izrazimo z naravnim parametrom?

(2) (Pospešek, normala, ukrivljenost) Naj bo $\mathbf{r}(t)$ lega delca v trenutku t.
(a) Določi pospešek delca v trenutku t.
(b) Kako sta definirani enotska normala in fleksijska ukrivljenost.
(c) Določi tangencialno in normalno komponento pospeška.

(3) (Parametrično podane krivulje)
(a) Kako podamo ravninsko krivuljo v parametrični obliki? Kako ugotovimo ali je sklenjena?
(b) Izpelji formulo za dolžino parametrično podane krivulje.
(c) Izpelji formulo za ploščino lika, ki ga oklepa sklenjena parametrično podana krivulja.

(4) (Polarni zapis)
(a) Kako podamo ravninsko krivuljo v polarnem zapisu? Kako ugotovimo ali je sklenjena?
(b) Kako polarni zapis pretvorimo v kartezičnega in obratno?
(c) Izpelji formulo za dolžino krivulje v polarnem zapisu.
(d) Izpelji formulo za ploščino, ki jo obdaja sklenjena krivulja v polarnem zapisu.

14. Funkcije dveh spremenljivk

(1) (Zveznost)
(a) Kako definiramo zveznost funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) s pomočjo ϵ in δ?
(b) Naj bo funkcija $f(x, y)$ zvezna v (x_0, y_0) in naj bo (h, k) poljuben vektor. Dokaži, da je funkcija $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ zvezna v točki $t = 0$. Kako dobiš graf funkcije $F(t)$ iz grafa funkcije $f(x, y)$?
(c) Pokaži, da funkcija

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2 \\ 0, & y \neq x^2 \end{cases}$$

ni zvezna v točki $(0, 0)$.
(d) Pokaži, da je za vsak vektor (h, k) funkcija $G(t) = g(th, tk)$ zvezna v $t = 0$.

(2) (Parcialni odvod, smerni odvod)
(a) Kako sta definirana parcialna odvoda funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0)?
(b) Kako je definiran smerni odvod funkcije $f(x, y)$ v toǩi (x_0, y_0) in smeri (h, k)?
(c) Izrazi parcialna odvoda s smernimi odvodi.
(d) Izrazi smerne odvode s parcialnima odvodoma.

(3) (Tangentna ravnina) Dana je funkcija $z = f(x, y)$ in točka (x_0, y_0). Naj bo $z_0 = f(x_0, y_0)$.
(a) Kako dobimo grafa funkcij $g(x) = f(x, y_0)$ in $h(y) = f(x_0, y)$ iz grafa funkcije $f(x, y)$?

   (b) Določi enačbo tangente na krivuljo $x \mapsto (x, y_0, f(x, y_0))$ v točki (x_0, y_0, z_0) in enačbo tangente na krivuljo $y \mapsto (x_0, y, f(x_0, y))$ v točki (x_0, y_0, z_0).
   (c) Določi enačbo tangentne ravnine na ploskev $z = f(x, y)$ v točki (x_0, y_0, z_0).
(4) (Lokalni ekstremi) Dana je funkcija

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2) = y^2 - 3x^2y + 2x^4.$$

   (a) Nariši nivojnico $f(x, y) = 0$. Označi, kje je $f(x, y) < 0$ in kje $f(x, y) > 0$.
   (b) Dokaži, da točka $(0, 0)$ ni lokalni ekstrem funkcije $f(x, y)$.
   (c) Dokaži, da je za vsak vektor (h, k) točka $t = 0$ lokalni minimum funkcije $F(t) = f(th, tk)$.
   (d) Kako dobimo graf funkcije $z = F(t)$ iz grafa funkcije $z = f(x, y)$?
(5) (Globalni ekstremi)
   (a) Kaj so globalni ekstremi funkcije $f(x, y)$ na območju D?
   (b) Kako določimo kandidate za globalni ekstrem v notranjosti D?
   (c) Kako določimo kandidate za globalni ekstrem na robu D?
   (d) Kako ugotovimo, kateri kandidat je res globalni ekstrem?
(6) (Gradient)
   (a) Kako je definiran gradient funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0)?
   (b) Kaj je geometrijski pomen gradienta?
   (c) Kako s pomočjo gradienta določimo tangento na nivojnico $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ v točki (x_0, y_0)? Kaj pa normalo?
(7) (Totalni diferencial)
   (a) Kaj pomeni, da je funkcija $f(x, y)$ diferenciabilna v točki (x_0, y_0)?
   (b) Kaj je totalni diferencial funkcije $f(x, y)$?
   (c) Kaj je geometrijski pomen totalnega diferenciala?
   (d) Kako uporabljamo totalni diferencial za računanje približkov? Razloži na primeru?
(8) (Zadostni pogoj za lokalni ekstrem) Naj bo (x_0, y_0) kritična točka funkcije $f(x, y)$ in (h, k) poljuben vektor.
   (a) Naj bo $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Izrazi $F''(0)$ z drugimi parcialnimi odvodi funkcije $f(x, y)$.
   (b) Naj bodo A, B, C taka realna števila da velja $AC - B^2 > 0$. Dokaži, da ima število $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ enak predznak v vseh tokah $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$.
   (c) Izpelji zadosten pogoj za nastop lokalnega ekstrema.
(9) (Volumni v kartezičnih koordinatah) Naj bo

$$D = \{(x, y) \colon a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

in $h(x, y)$ nenegativna funkcija na območju D. Naj bo

$$\Gamma = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in D, 0 \leq z \leq h(x, y)\}.$$

   (a) Skiciraj D in Γ ter prerez Γ z ravnino $x = x_0$.
   (b) Kolikšna je ploščina prereza območja Γ z ravnino $x = x_0$.
   (c) Kolikšen je volumen območja Γ?
(10) (Volumni v polarnih koordinatah) Naj bo $0 \leq a < b$ in

$$D = \{(r, \phi) \colon a \leq r \leq b\}$$

območje v polarni ravnini. Naj bo $h(r, \phi)$ nenegativna funkcija na D in

$$\Gamma = \{(r, \phi, z) \colon (r, \phi) \in D, 0 \leq z \leq h(r, \phi)\}.$$

(a) Skiciraj D, Γ in prerez Γ z valjem $r = c$.
(b) Kolikšna je površina prereza območja Γ z z valjem $r = c$?
(c) Kolikšen je volumen območja Γ?

15. Diferencialne enačbe

(1) (Geometrijski pomen diferencialne enačbe)
  (a) Napiši definicijo rešitve začetnega pogoja

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

  (b) Kako rešitev približno določimo s poljem smernic?
  (c) Kako rešitev približno določimo z Eulerjevo metodo?

(2) (Linearna diferencialna enačba prvega reda) Naj bosta $P(x)$ in $Q(x)$ dani zvezni funkciji ene spremenljivke.
  (a) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = P(x)y$?
  (b) Kako poiščemo partikularno rešitev diferencialne enačbe $y' = P(x)y + Q(x)$?
  (c) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = P(x)y+Q(x)$?

(3) (Linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti) Naj bodo a, b, c realna števila, $a \neq 0$ in $f(x)$ zvezna funkcija ene spremenljivke.
  (a) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $ay'' + by' + cy = 0$?
  (b) Kako poiščemo partikularno rešitev diferencialne enačbe $ay'' + by' + cy = f(x)$?
  (c) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $ay'' + by' + cy = f(x)$?