PRIMERI IZPITNIH VPRAŠANJ IZ MATEMATIKE

JAKA CIMPRIČ, MAJ 2004

Izpit sestavlja 4-5 vprašanj. Vsako ima več podvprašanj.

1. Števila

(1) (Definicija realnih števil)
   (a) Naštej aksiome obsega.
   (b) Naštej lastnosti relacije urejenosti.
   (c) Kaj pravi Dedekindov aksiom?

(2) (Intervali)
   (a) Definiraj različne vrste intervalov in jih grafično pojasni.
   (b) Kako definiramo odprti interval (a, b) in zaprti interval $[a, b]$ s pomočjo absolutne vrednosti?
   (c) Ali je lahko presek padajočega zaporedja odprtih intervalov prazen? Kaj pa padajočega zaporedja zaprtih intervalov?

(3) (Omejene množice) Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$.
   (a) Kaj je gornja meja množice A?
   (b) Kaj je supremum množice A?
   (c) Kaj je maksimum množice A?
   (d) Na primeru razloži, v čem je razlika med maksimumom in supremumom.

(4) (Decimalni zapis)
   (a) Grafično pojasni, kako realnemu številu priredimo njegov decimalni zapis.
   (b) Kako iz decimalnega zapisa dobimo pripadajoče realno število?
   (c) Dokaži, da vsakemu racionalnemu številu pripada periodičen decimalni zapis.
   (d) Na primeru pojasni, kako iz periodičnega decimalnega zapisa dobimo pripadajoče racionalno število.

(5) (Absolutna vrednost)
   (a) Kaj je absolutna vrednost realnega števila?
   (b) Naštej nekaj znanih identitet in neenakosti, v katerih nastopa absolutna vrednost.
   (c) Reši neenačbo : $|5 - \frac{2}{x}| < 1$.

2. Elementarne funkcije

(1) (Definicija funkcije)
   (a) Kaj je funkcija ene realne spremenljivke?
   (b) Kaj je graf funkcije? Kdaj je dana krivulja graf neke funkcije?
   (c) Kaj je definicijsko območje funkcije? Kako ga določimo iz grafa?
   (d) Kaj je zaloga vrednosti funkcije? Kako jo določimo iz grafa?

(2) (Inverz funkcije)
   (a) Za kakšne funkcije f obstaja inverz f^{-1}?
   (b) Kako je inverz funkcije definiran, se pravi kaj je njegovo definicijsko območje, zaloga vrednosti in predpis?
   (c) Kako iz grafa funkcije f ugotovimo, ali ima inverz? Kako iz grafa funkcije f dobimo graf funkcije f^{-1}.
   (d) Poišči inverz funkcije $y = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$.
(3) (Linearne funkcije)
   (a) Kako se glasi enačba premice, ki gre skozi točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2)?
   (b) Kako se glasi enačba premice, ki gre skozi točko (x_0, y_0) in ima naklon k?
   (c) Kako ugotovimo ali sta premici $y = k_1x + n_1$ in $y = k_2x + n_2$ pravokotni?
   (d) Kako določimo oddaljenost točke (a, b) od premice $y = kx + n$?
(4) (Kvadratne funkcije)
   (a) Kako narišemo kvadratno funkcijo $y = ax^2 + bx + c$? Kje je teme?
   (b) Kako poiščemo kvadratno funkcijo, ki gre skozi dane točke (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)?
   (c) Kako rešimo kvadratno enačbo $ax^2 + bx + c = 0$?
   (d) Kako rešimo kvadratno neenačbo $ax^2 + bx + c \geq 0$?
(5) (Polinomi)
   (a) Kako delimo polinom $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ s polinomom $x - c$ po Hornerjevem algoritmu? Kakšen ostanek dobimo.
   (b) Kako poiščemo racionalne ničle polinoma z racionalnimi koeficienti?
   (c) Deli polinom $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ s polinomom $x^2 + 3x + 1$.
(6) (Racionalne funkcije)
   (a) Kako določimo ničle racionalne funkcije? Kaj pa pole?
   (b) Kako določimo vertikalno asimptoto racionalne funkcije? Kdaj obstaja?
   (c) Skiciraj graf funkcije $y = \frac{(x-1)^2(x+3)(x+1)^3}{x^6(x-3)^3(x-2)(x+2)^2}$.
   (d) Razstavi funkcijo $y = \frac{x^2+x=2}{x^3-x^2-2x}$ na parcialne ulomke.
(7) (Eksponentna funkcija in logaritem)
   (a) Nariši grafa funkcij $y = e^x$ in $y = \ln(x)$. Pri obeh določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.
   (b) Nariši graf funkcije $y = 1 - e^{-x}$.
   (c) Nariši grafa funkcij $y = e^{\ln x}$ in $y = \ln(e^x)$. Pri obeh določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.
   (d) Kaj je inverzna funkcija funkcije $y = a^x$? Izrazi jo z ln.
(8) (Hiperbolične funkcije)
   (a) Kako sta definirani funkciji $y = \mathrm{sh}(x)$ in $y = \mathrm{ch}(x)$. Skiciraj njuna grafa. Pri obeh določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.
   (b) Kaj je osnovna formula, ki povezuje $\mathrm{sh}(x)$ in $\mathrm{ch}(x)$?
   (c) Izpelji adicijska izreka za $\mathrm{sh}(x)$ in $\mathrm{ch}(x)$.
(9) (Area funkcije)
   (a) Nariši graf funkcije $y = \mathrm{arsh}(x)$. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.
   (b) Izrazi funkcijo $y = \mathrm{arsh}(x)$ z naravnim logaritmom.

   (c) Nariši graf funkcije $y = \mathrm{arch}(x)$. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.
   (d) Izrazi funkcijo $y = \mathrm{arch}(x)$ z naravnim logaritmom.
(10) (Trigonometrične funkcije)
   (a) Nariši grafa funkcij $y = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$ in $y = 2\cos(x/2) - 1$.
   (b) Izpelji adicijska izreka za $\sin(x)$ in $\cos(x)$.
   (c) Kako faktoriziramo vsoto $\sin(x) + \sin(y)$. Kaj pa razliko?
   (d) Kako antfaktoriziramo produkt $\sin(x)\cos(y)$? Izpelji!
(11) (Arkus funkcije)
   (a) Kako sta definirani funkciji $\arcsin x$ in $\arccos x$? Nariši njuna grafa!
   (b) Nariši grafa funkcij $\sin(\arcsin(x))$ in $\arcsin(\sin(x))$.
   (c) Dokaži, da velja $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ za vsak $x \in [-1, 1]$.

3. Limita in zveznost

(1) (Definicija limite)
   (a) Kako definiramo limito funkcije s pomočjo ϵ in δ?
   (b) Razloži gornjo definicijo geometrijsko.
   (c) Na primeru pokaži, da se limita funkcije v točki lahko razlikuje od vrednosti funkcije v točki.
(2) (Limite in neenakosti)
   (a) Naj bosta $f(x)$ in $g(x)$ taki funkciji, da velja $f(x) \leq g(x)$ za vsak x blizu a. V kakšni zvezi sta potem limiti teh funkcij v točki a. Odgovor utemelji.
   (b) Dokaži, da za vsak neničeln $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ velja

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x.$$

   (c) S pomočjo gornjih točk dokaži, da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(3) (Neskončne limite in limite v neskončnosti)
   (a) Kaj pomeni, da je limita funkcije v končni točki neskončna? Napiši definicijo!
   (b) Kakšna je zveza med neskončnimi limitami v končnih točkah in vertikalnimi asimptotami?
   (c) Kaj pomeni, da je limita funkcije v neskončni točki končna? Napiši definicijo!
   (d) Kakšna je zveza med končnimi limitami v neskončnih točkah in horizontalnimi asimptotami?
(4) (Definicija števila e)
   (a) Kako je definirano število e?
   (b) Koliko je $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$?
   (c) Izračunaj $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$.
   (d) Izračunaj $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.
(5) (Definicija zveznosti) Kako definiramo zveznost funkcije v točki
   (a) s pomočjo limite,
   (b) s pomočjo ϵ in δ?
   (c) Razloži obe definiciji geometrijsko.

(6) (Primeri zveznih funkcij) Dokaži, da so naslednje funkcije zvezne v vsaki točki:
   (a) $f(x) = x$,
   (b) $f(x) = \sin(x)$,
   (c) $f(x) = e^x$.
(7) (Operacije z zveznimi funkcijami in limitami)
   (a) Kako sta definirani vsota in produkt funkcij.
   (b) Dokaži, da je limita vsote enaka vsoti limit. Podobno za produkte.
   (c) Dokaži, da je vsota zveznih funkcij zvezna funkcija. Podobno za produkte.
(8) (Kompozitum in inverz)
   (a) Kako je definiran kompozitum dveh funkcij?
   (b) Kaj vemo o kompozitumu zveznih funkcij. Natančno formuliraj izrek.
   (c) Kako je definiran inverz dane funkcije?
   (d) Kaj vemo o inverzu zveznih funkcij. Natančno formuliraj izrek.
(9) (Ničle zveznih funkcij)
   (a) Kaj pomeni, da ima funkcija $f(x)$ ničlo na intervalu $[a, b]$?
   (b) Kdaj ima zvezna funkcija zagotovo ničlo na intervalu $[a, b]$?
   (c) Opiši metodo bisekcije.
   (d) Poišči približek za ničlo enačbe $x^3 + x - 1 = 0$ na intervalu $[0, 1]$ s pomočjo treh korakov bisekcije.
(10) (Zvezne funkcije na zaprtem in omejenem intervalu) Natančno formuliraj naslednje lastnosti zvezne funkcije na zaprtem in omejenem intervalu:
   (a) omejenost,
   (b) obstoj ekstremov,
   (c) zaloga vrednosti je interval.

4. Odvod

(1) (Definicija odvoda)
   (a) Kako je definiran odvod funkcije v točki?
   (b) Dokaži, da iz odvedljivosti sledi zveznost.
   (c) Poišči primer funkcije, ki je zvezna v neki točki, ni pa odvedljiva v tej točki.
(2) (Pravila za odvajanje) Napiši pravila za odvajanje:
   (a) vsote in razlike,
   (b) produkta in kvocienta,
   (c) kompozituma in inverzne funkcije.
(3) (Uporaba odvoda)
   (a) Kako izračunamo povprečno hitrost?
   (b) Kako izračunamo trenutno hitrost?
   (c) Kako se glasi enačba sekante?
   (d) Kako se glasi enačba tangente?
(4) (Rolleov in Lagrangeov izrek)
   (a) Formuliraj Rolleov izrek.
   (b) Formuliraj Lagrangeov izrek in ga izpelji iz Rolleovega izreka.
   (c) Naj bo $f(x)$ taka funkcija, da je $f'(x) \geq 0$ za vsak x. Dokaži, da je $f(x)$ naraščajoča.

   (d) Funkcija $f(x) = -\frac{1}{x}$ zadošča $f'(x) \geq 0$ za vsak x, vendar ni naraščajoča, ker $f(-1) > f(1)$. V čem je problem?

(5) (Lokalni ekstremi)
   (a) Kaj je lokalni ekstrem funkcije?
   (b) Formuliraj potrebni pogoj za nastop ekstrema.
   (c) Formuliraj zadostni pogoj za nastop ekstrema s prvim odvodom.
   (d) Formuliraj zadostni pogoj za nastop ekstrema z drugim odvodom.

(6) (Globalni ekstremi)
   (a) Kaj je globalni ekstrem funkcije?
   (b) Kaj so kandidati za globalni ekstrem?
   (c) Določi globalne ekstrem funkcije $f(x) = |\sin x|$ na intervalu $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

(7) (Konveksnost, konkavnost, prevoji)
   (a) Kaj je definicija konveksne in konkavne funkcije?
   (b) Kako določimo konveksnost in konkavnost z drugom odvodom?
   (c) Kaj je definicija prevoja?
   (d) Kako določimo prevoje s pomočjo drugega odvoda?

(8) (Cauchyjev izrek in L' Hospitalovo pravilo) Naj bosta funkciji $f(x)$ in $g(x)$ zvezni na zaprtem intervalu $[a, b]$ in odvedljivi na odprtem intervalu (a, b).
   (a) Dokaži, da funkcija

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$$

   zadošča predpostavkam Rolleovega izreka.
   (b) Dokaži, da obstaja tak $c \in (a, b)$, da velja

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   (c) Formuliraj L' Hospitalovo pravilo in ga dokaži.

5. Integral

(1) (Definicija, obstoj, enoličnost nedoločenega integrala)
   (a) Kako je definiran nedoločeni integral funkcije?
   (b) Kaj vemo o enoličnosti nedoločenega integrala?
   (c) Kaj vemo o obstoju nedoločenega integrala?

(2) (Integracija po delih)
   (a) Kaj pravi pravilo za odvajanje produkta?
   (b) Povej pravilo za integracijo po delih za nedoločeni integral in ga izpelji.
   (c) Povej pravilo za integracijo po delih za določeni integral in ga izpelji.

(3) (Integracija s substitucijo)
   (a) Kaj pravi pravilo za odvajanje posredne funkcije?
   (b) Povej pravilo za substitucijo v nedoločenem integralu in ga izpelji.
   (c) Povej pravilo za substitucijo v določenem integralu in ga izpelji.

(4) (Osnovni tipi nedoločenih integralov) Naj bo $R(x)$ racionalna funkcija.
   (a) Kako izračunamo $\int R(x)dx$?
   (b) Kako izračunamo $\int R(e^x)dx$?
   (c) Kako izračunamo $\int R(\cos x) \sin x dx$ in $\int R(\sin x) \cos x dx$?

(5) (Definicija določenega integrala)
   (a) Kaj je delitev intervala? Kaj je premer delitve?
   (b) Kako dani delitvi in dani izbiri točk priredimo Riemannovo vsoto?
   (c) Kako je definiran Riemannov integral?

(6) (Približno računanje določenega integrala)
   (a) Razloži geometrijski pomen določenega integrala.
   (b) Kako izračunamo približek za $\int_a^b f(x)dx$ s pomočjo Riemannovih vsot?
   (c) Kako izračunamo približek za $\int_a^b f(x)dx$ s pomočjo trapezne metode?

(7) (Osnovni izrek infinitezimalnega računa) Naj bo funkcija $f(x)$ zvezna na intrvalu $[a, b]$ in $F(x) = \int_a^x f(x)dx$.
   (a) Dokaži, da je funkcija $F(x)$ zvezna na $[a, b]$.
   (b) Dokaži, da je funkcija $F(x)$ odvedljiva na (a, b) in da je $F'(x) = f(x)$.
   (c) Kaj pravi Leibnitzovo pravilo?
   (d) Kaj pravi osnovni izrek infinitezimalnega računa?

(8) (Gama funkcija)
   (a) Kako je definirana funkcija $\Gamma(x)$?
   (b) Dokaži, da je $\Gamma(1) = 1$.
   (c) Dokaži, da je $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$ za vsako naravno število n.
   (d) Dokaži, da je $\Gamma(n) = (n - 1)!$ za vsako naravno število n.

(9) (Volumen vrtenine)
   (a) Kako izračunamo volumen vrtenine z metodo prerezov?
   (b) Kako izračunamo volumen vrtenine z metodo lupin?
   (c) Kako izračunamo težišče prereza?
   (d) Kaj pravi prvo Pappusovo pravilo?

(10) (Dolžina krivulje in površina vrtenine)
   (a) Kako izračunamo dolžino krivulje $y = f(x), a \leq x \leq b$?
   (b) Kako izračunamo površino vrtenine?
   (c) Kako izračunamo težišče krivulje?
   (d) Kaj pravi drugo Pappusovo pravilo?

6. Linearna algebra

(1) (Klasifikacija) Kako delimo sisteme linearnih enačb glede na
   (a) število enačb in neznank,
   (b) rešljivost,
   (c) obliko desne strani?

(2) (Gaussov algoritem)
   (a) Kako rešimo trikoten sistem linearnih enačb?
   (b) Kaj so to elementarne transformacije po vrsticah?
   (c) Razloži Gaussov algoritem.

(3) (Determinante) Kako izračunamo 3×3 determinato
   (a) z razvojem po i-ti vrstici?
   (b) z razvojem po j-tem stolpcu?
   (c) z Sarussovim pravilom?

(4) (Cramerovo pravilo)
   (a) Formuliraj Cramerovo pravilo za 2×2 sisteme linearnih enačb.
   (b) Formuliraj Cramerovo pravilo za 3×3 sisteme linearnih enačb.
   (c) Kdaj Cramerovo previlo ne da rešitve danega sistema linearnih enačb.

7. Vektorske funkcije

(1) (Hitrost, tangenta) Naj bo $(x(t), y(t))$ lega delca v trenutku t. Določi
   (a) vektorsko hitrost v trenutku t,
   (b) skalarno hitrost v trenutku t,

   (c) enotsko tangento v trenutku t.
(2) (Parametrično podane krivulje)
   (a) Kako podamo ravninsko krivuljo v parametrični obliki? Kako ugotovimo ali je sklenjena?
   (b) Izpelji formulo za dolžino parametrično podane krivulje.
   (c) Izpelji formulo za ploščino lika, ki ga oklepa sklenjena parametrično podana krivulja.
(3) (Polarni zapis)
   (a) Kako podamo ravninsko krivuljo v polarnem zapisu? Kako ugotovimo ali je sklenjena?
   (b) Kako polarni zapis pretvorimo v kartezičnega in obratno?
   (c) Izpelji formulo za dolžino krivulje v polarnem zapisu.
   (d) Izpelji formulo za ploščino, ki jo obdaja sklenjena krivulja v polarnem zapisu.

8. Funkcije dveh spremenljivk

(1) (Graf, nivojnice) Naj bo $f(x,y) = x^2 - y^2$.
   (a) Nariši graf funkcije $f(x,y)$.
   (b) Nariši nekaj nivojnic funkcije $f(x,y)$.
   (c) Pojasni geometrijsko zvezo med grafom in nivojnicami.
(2) (Zveznost in limita)
   (a) Kako definiramo zveznost funkcije $f(x,y)$ v točki (x_0,y_0) s pomočjo ϵ in δ?
   (b) Kako definiramo limito funkcije $f(x,y)$ v točki (x_0,y_0) s pomočjo ϵ in δ?
   (c) Razloži zveznost in limito geometrijsko.
(3) (Parcialni odvod, smerni odvod)
   (a) Kako sta definirana parcialna odvoda funkcije $f(x,y)$ v točki (x_0,y_0)?
   (b) Kako je definiran smerni odvod funkcije $f(x,y)$ v toǩi (x_0,y_0) in smeri (h,k)?
   (c) Izrazi parcialna odvoda s smernimi odvodi.
   (d) Izrazi smerne odvode s parcialnima odvodoma.
(4) (Tangentna ravnina) Dana je funkcija $z = f(x,y)$ in točka (x_0,y_0). Naj bo $z_0 = f(x_0,y_0)$.
   (a) Določi enačbo tangentne ravnine na ploskev $z = f(x,y)$ v točki (x_0,y_0,z_0).
   (b) Določi enačbo tangente na krivuljo $f(x,y) = z_0$ v točki (x_0,y_0).
   (c) Pojasni geometrijsko zvezo med tangentno ravnino iz (a) in tangento iz (b).
(5) (Lokalni ekstremi)
   (a) Kaj pomeni, da je točka (x_0,y_0) lokalni ekstrem funkcije $f(x,y)$?
   (b) Kaj je potreben pogoj za to, da je (x_0,y_0) lokalni ekstrem of $f(x,y)$?
   (c) Kaj je zadosten pogoj za to, da je (x_0,y_0) lokalni ekstrem of $f(x,y)$?
(6) (Globalni ekstremi)
   (a) Kaj so globalni ekstremi funkcije $f(x,y)$ na območju D?
   (b) Kako določimo kandidate za globalni ekstrem v notranjosti D?
   (c) Kako določimo kandidate za globalni ekstrem na robu D?
   (d) Kako ugotovimo, kateri kandidat je res globalni ekstrem?