

PRIMERI IZPITNIH VPRAŠANJ IZ MATEMATIKE

JAKA CIMPRIČ, JANUAR 2005

Izpit sestavlja 4-5 vprašanj. Vsako ima več podvprašanj.

1. REALNA ŠTEVILA, REALNA ZAPOREDJA IN VRSTE

- (1) (Definicija realnih števil)
 - (a) Naštej lastnosti operacij $+$ in \cdot .
 - (b) Naštej lastnosti relacije $<$.
 - (c) Definiraj različne vrste intervalov in jih grafično pojasni.
 - (d) Kako definiramo odprti interval (a, b) in zaprti interval $[a, b]$ s pomočjo absolutne vrednosti?
- (2) (Omejene množice) Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$.
 - (a) Kaj je gornja meja množice A ?
 - (b) Kaj je supremum množice A ?
 - (c) Kaj pravi Dedekindov aksiom?
 - (d) Kaj je maksimum množice A ? Na primeru razloži, v čem je razlika med maksimumom in supremumom.
- (3) (Definicija zaporedja)
 - (a) Kaj je zaporedje?
 - (b) Pojasni različne načine podajanja zaporedij!
 - (c) Pojasni različne načine risanja zaporedij!
- (4) (Limite zaporedij)
 - (a) Napiši definicijo limite zaporedja.
 - (b) Pojem limite zaporedja grafično pojasni.
 - (c) Kaj je omejeno monotono zaporedje? Kako izračunamo njegovo lim-
ito? Kako vemo, da limita sploh obstaja?
- (5) (Vsota vrste)
 - (a) Kaj je zaporedje delnih vsot dane vrste?
 - (b) Izračunaj delne vsote geometrijske vrste.
 - (c) Kaj je vsota dane vrste?
 - (d) Izračunaj vsoto geometrijske vrste!
- (6) (Konvergenčni kriteriji za vrste s pozitivnimi členi)
 - (a) Kaj pravi kvocientni kriterij?
 - (b) Uporabi kvocientni kriterij na primeru!
 - (c) Kaj pravi korenski kriterij?
 - (d) Uporabi korenski kriterij na primeru!

2. REALNE FUNKCIJE, ZVEZNOST IN LIMITA

- (1) (Definicija realne funkcije ene realne spremenljivke)
 - (a) Definiraj pojem realne funkcije ene realne spremenljivke!
 - (b) Kaj je graf funkcije? Kdaj je dana krivulja graf neke funkcije?

- (c) Kaj je definicijsko območje funkcije? Kako ga določimo iz grafa?
- (d) Kaj je zaloga vrednosti funkcije? Kako jo določimo iz grafa?
- (2) (Kompozitum in inverz)
 - (a) Kako je definiran kompozitum dveh funkcij?
 - (b) Kako je definirana identiteta in kako se vede pri komponiranju?
 - (c) Kako je definiran inverz funkcije? Za katere funkcije obstaja?
 - (d) Kako iz grafa funkcije ugotovim ali ima inverz? Kako iz grafa funkcije konstruiramo graf inverza?
- (3) (Strogo monotone funkcije, veje)
 - (a) Kako je definirana strogo monotona funkcija?
 - (b) Dokaži, da je vsaka strogo monotona funkcija injektivna!
 - (c) Kaj je veja funkcije? Definiraj in podaj primer!
 - (d) Poišči primer funkcije, ki se je ne da razrezati na veje!
- (4) (Glavne veje elementarnih funkcij) Pojasni, kaj so glavne veje naslednjih funkcij. Za vsako natančno nariši graf inverza.
 - (a) Potenčne funkcije $y = x^n$.
 - (b) Eksponentne funkcije $y = a^x$.
 - (c) Trigonometrične funkcije sin, cos, tg.
 - (d) Hiperbolične funkcije sh, ch, th.
- (5) (Definicija limite)
 - (a) Kako definiramo limito funkcije? Kaj to pomeni na grafu?
 - (b) Kako definiramo zveznost funkcije v točki? Kaj to pomeni na grafu?
 - (c) Kako izračunaj limito vsote in limito produkta funkcij?
 - (d) Zakaj sta vsota in produkt dveh zveznih funkcij spet zvezni funkciji.
- (6) (Metode računanja limit)
 - (a) Kdaj lahko izračunamo limito z metodo vstavljanja?
 - (b) Na primeru pojasni metodo krajšanja/razširjanja!
 - (c) Na primeru pojasni metodo sendviča!
 - (d) Na primeru pojasni metodo substitucije!
- (7) (Neskončne limite in limite v neskončnosti)
 - (a) Kaj pomeni, da je limita funkcije v končni točki neskončna? Napiši definicijo!
 - (b) Kakšna je zveza med neskončnimi limitami v končnih točkah in vertikalnimi asimptotami?
 - (c) Kaj pomeni, da je limita funkcije v neskončni točki končna? Napiši definicijo!
 - (d) Kakšna je zveza med končnimi limitami v neskončnih točkah in horizontalnimi asimptotami?
- (8) (Metoda bisekcije)
 - (a) Kaj pomeni, da ima funkcija $f(x)$ ničlo na intervalu $[a, b]$?
 - (b) Kdaj ima zvezna funkcija zagotovo ničlo na intervalu $[a, b]$?
 - (c) Opiši metodo bisekcije.
 - (d) Poišči približek za ničlo enačbe $x^3 + x - 1 = 0$ na intervalu $[0, 1]$ s pomočjo treh korakov bisekcije.

3. ODVOD

- (1) (Definicija odvoda)
 - (a) Kako je definiran odvod funkcije v točki?

- (b) Dokaži, da iz odvedljivosti sledi zveznost.
- (c) S primerom pokaži, da funkcija, ki je zvezna v neki točki, ni nujno tudi odvedljiva v tej točki.
- (2) (Pravila za odvajanje)
- (a) Formuliraj pravila za odvajanje vsote in razlike. Enega dokaži!
- (b) Formuliraj pravila za odvajanje produkta in inverza. Enega dokaži!
- (c) Napiši pravila za odvajanje kompozituma in inverzne funkcije. Enega dokaži!
- (3) (Odvod sinusa in eksponentne funkcije)
- (a) Dokaži, da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Pomagaj si z metodo sendviča!
- (b) Dokaži, da je $(\sin x)' = \cos x$. Pomagaj si z gornjo limito!
- (c) Dokaži, da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Pomagaj si z definicijo števila e in metodo substitucije!
- (d) Dokaži, da je $(e^x)' = e^x$. Pomagaj si z gornjo limito!
- (4) (Geometrijski in fizikalni pomen odvoda)
- (a) Kako izračunamo povprečno hitrost delca, ki se giblje po premici?
- (b) Kako izračunamo trenutno hitrost delca, ki se giblje po premici?
- (c) Kako se glasi enačba sekante?
- (d) Kako se glasi enačba tangente?
- (5) (Lagrangeov izrek)
- (a) Kaj pravi Lagrangeov izrek?
- (b) Naj bo $f(x)$ taka funkcija, da je $f'(x) \geq 0$ za vsak x . Dokaži, da je $f(x)$ naraščajoča.
- (c) Funkcija $f(x) = -\frac{1}{x}$ zadošča $f'(x) \geq 0$ za vsak x , vendar ni naraščajoča, ker $f(-1) > f(1)$. V čem je problem?
- (6) (Lokalni in globalni ekstremini)
- (a) Kaj je lokalni ekstrem funkcije?
- (b) Formuliraj potrebni pogoj za nastop lokalnega ekstrema.
- (c) Formuliraj zadostni pogoj za nastop ekstrema s prvim odvodom.
- (d) Kaj je globalni ekstrem funkcije? Kako ga poiščemo?
- (7) (Taylorjeva vrsta)
- (a) Kako je definirana Taylorjeva vrsta funkcije $f(x)$ v točki a ?
- (b) Razvij funkcijo $\sin x$ v Taylorjevo vrsto okrog $x = 0$, nato še okrog $x = \frac{\pi}{2}$.
- (c) Kako nam pomaga Taylorjeva vrsta pri določanju lokalnih ekstremov? Pojasni na primeru!
- (d) Naj bo $s(t)$ lega delca v trenutku t . Pojasni fizikalni pomen prvih treh členov Taylorjeve vrste za $s(t)$ okrog $t = t_0$.
- (8) (Parcialni odvodi)
- (a) Kako sta definirana parcialna odvoda funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) ?
- (b) Določi enačbo tangentne ravnine na ploskev $z = f(x, y)$ v točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
- (c) Kako poiščemo lokalne ekstreme funkcije $f(x, y)$?

4. INTEGRAL

- (1) (Definicija, obstoj, enoličnost nedoločenega integrala)
- (a) Kako je definiran nedoločeni integral funkcije?
- (b) Kaj vemo o enoličnosti nedoločenega integrala?
- (c) Kaj vemo o obstoju nedoločenega integrala?

- (2) (Integracija po delih)
- Kaj pravi pravilo za odvajanje produkta?
 - Povej pravilo za integracijo po delih za nedoločeni integral in ga izpelji.
 - Povej pravilo za integracijo po delih za določeni integral in ga izpelji.
- (3) (Integracija s substitucijo)
- Kaj pravi pravilo za odvajanje posredne funkcije?
 - Povej pravilo za substitucijo v nedoločenem integralu in ga izpelji.
 - Povej pravilo za substitucijo v določenem integralu in ga izpelji.
- (4) (Definicija določenega integrala)
- Kaj je delitev intervala? Kaj je premer delitve?
 - Kako dani delitvi in dani izbiri točk priredimo Riemannovo vsoto?
 - Kako je definiran določeni integral?
- (5) (Približno računanje določenega integrala)
- Razloži geometrijski pomen določenega integrala.
 - Kako izračunamo približek za $\int_a^b f(x)dx$ s pomočjo Riemannovih vsot?
 - Kako izračunamo približek za $\int_a^b f(x)dx$ s pomočjo trapezne metode?
- (6) (Točno računanje določenega integrala) Naj bo funkcija $f(x)$ zvezna na intervalu $[a, b]$.
- Pokaži, da je funkcija $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$.
 - Naj bo $G(x)$ poljuben nedoločeni integral funkcije $f(x)$. Pokaži, da je funkcija $G(x) - F(x)$ konstantna.
 - Izrazi $\int_a^b f(x)dx$ s pomočjo nedoločenega integrala $G(x)$.
- (7) (Gama funkcija)
- Kako je definirana funkcija $\Gamma(x)$?
 - Dokaži, da je $\Gamma(1) = 1$.
 - Dokaži, da je $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ za vsako naravno število n .
 - Dokaži, da je $\Gamma(n) = (n-1)!$ za vsako naravno število n .
- (8) (Dvojni integral)
- Kaj je geometrijski pomen dvojnega integrala $\iint_D f(x, y)dx dy$?
 - Kako izračunamo $\iint_D f(x, y)dx dy$, če je $D = [a, b] \times [c, d]$?
 - Kako izračunamo $\iint_D f(x, y)dx dy$, če je D krog z radijem a okrog izhodišča.
 - Skiciraj izpeljavo formule $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

5. UVOD V VERJETNOSTNI RAČUN

- (1) (Dogodki)
- Kaj je dogodek?
 - Pojasni klasično definicijo verjetnosti dogodka!
 - Pojasni geometrijsko definicijo verjetnosti dogodka!
 - Pojasni statistično definicijo verjetnosti dogodka!
- (2) (Kombinatorika)
- Koliko podmnožic z r elementi ima množica z n elementi?
 - Koliko je injektivnih funkcij iz množice z n elementi v množico z m elementi?
 - Koliko je permutacij na n elementih?
- (3) (Vsota dogodkov)

- (a) Kaj je vsota dogodkov A_1, \dots, A_n ?
- (b) Kako izračunamo verjetnost $P(A_1 + \dots + A_n)$ s principom vključitve/izključitve?
- (c) Kdaj so dogodki A_1, \dots, A_n nezdružljivi?
- (d) Kako izračunamo verjetnost $P(A_1 + \dots + A_n)$, če so A_1, \dots, A_n nezdružljivi?

Lahko se omejiš na primera $n = 2$ in $n = 3$.

- (4) (Produkt dveh dogodkov)
 - (a) Kaj je produkt dogodkov A in B ?
 - (b) Kako izračunamo verjetnost $P(A \cdot B)$, če sta A in B neodvisna?
 - (c) Kaj je pogojna verjetnost $P(A|B)$?
 - (d) Kako izračunamo verjetnost $P(A \cdot B)$, če sta A in B odvisna?
- (5) (Dvofazni poskusi)
 - (a) Kaj je popoln sistem dogodkov?
 - (b) Kaj pravi izrek o popolni verjetnosti? Dokaži!
 - (c) Kaj pravi Bayesov izrek? Dokaži!
- (6) (Produkt več dogodkov)
 - (a) Kako določimo verjetnost $P(A_1 \cdots A_n)$, če so A_1, \dots, A_n neodvisni?
 - (b) S primerom pokaži, da so trije dogodki lahko paroma neodvisni, niso pa neodvisni,
 - (c) Izračunaj naslednje pogojne verjetnosti $P(A_{n-1}|A_n)$, $P(A_{n-2}|A_{n-1}A_n)$, \dots , $P(A_1|A_2 \cdots A_n)$.
 - (d) Kako določimo verjetnost $P(A_1 \cdots A_n)$, če so A_1, \dots, A_n odvisni? Pomagaš si s točko (c).

Lahko se omejiš na primera $n = 2$ in $n = 3$.

- (7) (Večfazni poskusi)
 - (a) Pojasni, kaj je večfazni poskus in kaj je njegovo verjetnostno drevo?
 - (b) Štirikrat vržemo kovanec. Kolikšna je verjetnost, da je cifra padla natanko dvakrat. Nariši ustrezno verjetnostno drevo.
 - (c) Mečemo kocko, dokler ne pade šestica. Kolikšna je verjetnost, da šestica prvič pade v petem metu? Nariši ustrezno verjetnostno drevo.

6. SLUČAJNE SPREMENLJIVKE IN VEKTORJI

- (1) (Definicija slučajne spremenljivke)
 - (a) Primerjaj pojem slučajne spremenljivke s pojmom merilne naprave. Kaj ustreza definicijskemu območju in kaj zalogi vrednosti slučajne spremenljivke.
 - (b) Kaj je porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke? Kakšen je njen graf če je slučajna spremenljivka diskretna in kakšen če je zvezna?
 - (c) Kaj je verjetnostna shema diskretne slučajne spremenljivke? Kako jo eksperimentalno določimo?
 - (d) Kaj je gostota verjetnosti zvezne slučajne spremenljivke? Kako jo eksperimentalno določimo?
- (2) (Verjetnost dogodka) Naj bo X neka slučajna spremenljivka in \mathcal{A} neka množica izidov. Kako določimo verjetnost dogodka $X \in \mathcal{A}$
 - (a) eksperimentalno,
 - (b) s pomočjo verjetnostne sheme (kadar je X diskretna),
 - (c) s pomočjo gostote verjetnosti (kadar je X zvezna).

- (3) (Matematično upanje) Naj bo X slučajna spremenljivka. Kako določimo njeno matematično upanje $E(X)$
- eksperimentalno,
 - s pomočjo verjetnostne sheme (kadar je X diskretna),
 - s pomočjo gostote verjetnosti (kadar je X zvezna).
- (4) (Disperzija) Naj bo X slučajna spremenljivka. Kako določimo njeno disperzijo $D(X)$
- eksperimentalno,
 - s pomočjo verjetnostne sheme (kadar je X diskretna),
 - s pomočjo gostote verjetnosti (kadar je X zvezna).
- (5) (Primeri diskretnih porazdelitev)
- Kaj je binomska porazdelitev s parametroma n in p ? Določi njeno matematično upanje!
 - Kaj je geometrijska porazdelitev s parametrom p ? Določi njeno matematično upanje!
 - Kaj je Poissonova porazdelitev s parametrom λ . Določi njeno matematično upanje!
- (6) (Primeri zveznih porazdelitev)
- Kaj je enakomerna porazdelitev na intervalu $[a, b]$? Določi njeno matematično upanje!
 - Kaj je eksponentna porazdelitev s parametrom λ ? Določi njeno matematično upanje!
 - Kaj je porazdelitev χ^2 z n prostostnimi stopnjami? Določi njeno matematično upanje!
- (7) (Normalna porazdelitev)
- Kaj je normalna porazdelitev s parametroma μ in σ ?
 - Koliko je njeno matematično upanje? Koliko je njena disperzija?
 - Kaj je standardna normalna porazdelitev? Koliko je njeno upanje in koliko disperzija?
 - Kako iz normalno porazdeljene slučajne spremenljivke dobiš slučajno spremenljivko, ki je porazdeljena standardizirano normalno?
- (8) (Diskretni slučajni vektorji) Naj bo (X, Y) diskreten slučajni vektor.
- Kako eksperimentalno določimo njegovo verjetnostno shemo?
 - S pomočjo verjetnostne sheme za (X, Y) določi verjetnost, da $(X, Y) \in \mathcal{A}$? Pojasni na primeru!
 - S pomočjo verjetnostne sheme za (X, Y) določi verjetnostni shemi za X in za Y ! Pojasni na primeru!
 - Kako s pomočjo verjetnostne sheme za (X, Y) ugotovimo ali sta X in Y neodvisni?
- (9) (Zvezni slučajni vektorji) Naj bo (X, Y) zvezen slučajni vektor.
- Kako eksperimentalno določimo njegovo gostoto verjetnosti?
 - S pomočjo gostote verjetnosti za (X, Y) določi verjetnost, da $(X, Y) \in \mathcal{A}$? Pojasni na primeru!
 - S pomočjo gostote verjetnosti za (X, Y) določi gostote verjetnosti za X in za Y ! Pojasni na primeru!
 - Kako s pomočjo gostote verjetnosti za (X, Y) ugotovimo ali sta X in Y neodvisni?
- (10) (Kovarianca) Naj bo (X, Y) diskreten ali zvezen slučajni vektor.

- (a) Kako jo izračunamo njegovo kovarianco?
- (b) Kako izračunamo disperziji slučajnih spremenljivk X in Y ?
- (c) Kako izračunamo korelacijski koeficient? Kaj nam pove?

7. STATISTIKA

- (1) (Osnovni pojmi)
 - (a) Na primeru pojasni pojem populacije in vzorca. Na kaj moramo paziti pri izbiranju vzorca?
 - (b) V teoriji populaciji ustreza slučajna spremenljivka. Kaj pa v teoriji ustreza vzorcu?
 - (c) Na primeru pojasni pojma parameter populacije in cenilka za parameter!
 - (d) Kateri sta najbolj zaželeni lastnosti cenilk?
- (2) (Populacijsko povprečje)
 - (a) Kaj je cenilka za populacijsko povprečje ?
 - (b) Določi matematično upanje te cenilke! Ali je nepristranska?
 - (c) Določi disperzijo te cenilke. Prepričaj se da pada z velikostjo vzorca?
 - (d) Kako je ta cenilka približno porazdeljena pri velikih vzorcih?
- (3) (Razlika populacijskih povprečij)
 - (a) Kaj je cenilka za razliko dveh populacijskih povprečij?
 - (b) Določi matematično upanje te cenilke! Ali je nepristranska?
 - (c) Določi disperzijo te cenilke. Prepričaj se da pada z velikostjo vzorca?
 - (d) Kako je ta cenilka približno porazdeljena pri velikih vzorcih?
- (4) (Dvostranski interval zaupanja)
 - (a) Kaj pomeni izraz $k\%$ zanesljiv dvostranski interval zaupanja za nek parameter?
 - (b) Določi $k\%$ zanesljiv dvostranski interval zaupanja za populacijsko povprečje?
 - (c) Določi $k\%$ zanesljiv dvostranski interval zaupanja za razliko populacijskih povprečij?
- (5) (Enostranski interval zaupanja)
 - (a) Kaj pomeni izraz $k\%$ zanesljiv enostranski interval zaupanja za nek parameter?
 - (b) Določi $k\%$ zanesljiv enostranski interval zaupanja za populacijsko povprečje?
 - (c) Določi $k\%$ zanesljiv enostranski interval zaupanja za razliko populacijskih povprečij?
- (6) (Osnove statističnih testov)
 - (a) Kaj so glavni deli statističnega testa?
 - (b) Kaj sta napaki prve in druge vrste in kako lahko vplivamo na njih?
 - (c) Kaj je p -vrednost in kako vlogo igra v statističnem testu?
- (7) (Statistični test za populacijsko povprečje)
 - (a) Kdaj se odločimo za enostranski test in kdaj za dvostranskega? V obeh primerih povej kako se glasita ničelna in alternativna hipoteza.
 - (b) Kaj je testna statistika za populacijsko povprečje? Kako določimo njeno p -vrednost pri dvostranskem testu in kako pri enostranskem.
 - (c) Pojasni, kako p -vrednost vpliva na odločitev. Kolikšna je verjetnost, da smo se odločili narobe?
- (8) (Statistični test za razliko populacijskih povprečij)

- (a) Kdaj se odločimo za enostranski test in kdaj za dvostranskega? V obeh primerih povej kako se glasita ničelna in alternativna hipoteza.
 - (b) Kaj je testna statistika za razliko populacijskih povprečij? Kako določimo njeno p -vrednost pri dvostranskem testu in kako pri enostranskem.
 - (c) Pojasni, kako p -vrednost vpliva na odločitev. Kolikšna je verjetnost, da smo se odločili narobe?
- (9) (Test χ^2)
- (a) Kaj je ničelna in kaj alternativna hipoteza.
 - (b) Kaj je testna statistika? Napiši eksplicitno formulo in pojasni pomen znakov.
 - (c) Kakšna je gostota vejetnosti testne statistike pri velikih vzorcih? Napiši eksplicitno formulo in pojasni pomen znakov.
 - (d) Kako določimo p -vrednost testne statistike in kako ta vpliva na odločitev?
- (10) (Testiranje neodvisnosti)
- (a) Kako določimo verjetnostno shemo dvorazsežnega diskretnega slučajnega vektorja? Kako se mora glasiti verjetnostna shema, če sta komponenti tega vektorja neodvisni?
 - (b) Kaj je testna statistika? Napiši eksplicitno formulo in pojasni pomen znakov.
 - (c) Kakšna je gostota vejetnosti testne statistike pri velikih vzorcih? Napiši eksplicitno formulo in pojasni pomen znakov.
 - (d) Kako določimo p -vrednost testne statistike in kako ta vpliva na odločitev?