ALGEBRA III – 1. izpit

Vsi kolobarji so komutativni z enico

(1) (a) Definiraj vse pojme, ki nastopajo v prvem in drugem izreku o enoličnosti primarnega razcepa. [3]
(b) Formuliraj prvi izrek o enoličnosti primarnega razcepa. [3]
(c) Formuliraj drugi izrek o enoličnosti primarnega razcepa. [3]
(d) Dokaži enega od teh dveh izrekov. [6]

(2) (a) Naj bosta $R \subseteq S$ kolobarja in predpostavimo, da je množica $S \setminus R$ zaprta za množenje. Pokaži, da je R celostno zaprt v S. [9]
(b) S primerom pokaži, da obrat trditve (a) ne velja. [6]

(3) (a) Naj bo R noetherski in $\varphi : R \to R$ endomorfizem. Pokaži: če je φ surjektiven, je tudi injektiven, torej avtomorfizem. [9]
(b) Podaj primer noetherskega kolobarja R in endomorfizem $\varphi : R \to R$, ki je injektiven, ni pa avtomorfizem. [3]
(c) S primerom pokaži, da ni vsak surjektiven endomorfizem injektiven. [3]

(4) Naj bo k neskončen obseg in

$$V := \{(x, y) \in k^2 \mid y^2 = x^3\}.$$

(a) Pokaži, da je preslikava $f : k \to V$, podana z $t \mapsto (t^2, t^3)$, polinomska in bijektivna. [5]
(b) Dokaži, da ima f racionalni inverz $g : V \to k$. [5]
(c) Pokaži, da f ni polinomski izomorfizem. [5]

(5) (a) Naj bo R celostno polje, Γ urejena Abelova grupa in $v : R \to \Gamma \cup \infty$ preslikava, ki zadošča vsem trem pogojem iz definicije valuacije:

$$\begin{aligned} &(1) \quad v(a) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad a = 0, \\ &(2) \quad v(a+b) \geqslant \min\big\{v(a), v(b)\big\} \quad \forall a, b \in R, \\ &(3) \quad v(ab) = v(a) + v(b) \quad \forall a, b \in R. \end{aligned}$$

Pokaži, da obstaja natanko ena razširitev preslikave v do valuacije $u : \operatorname{Quot} R \to \Gamma \cup \infty$. [6]
(b) Naj bo k obseg in $\alpha \in \mathbb{R}$ iracionalno število. Definirajmo preslikavo

$$\begin{aligned} v : k[X, Y] \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}, \\ \textstyle\sum_{m,n} c_{n,m} X^n Y^m &\mapsto \min\{n + m\alpha \mid c_{n,m} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Dokaži, da v določa valuacijo na $k(X, Y)$. [9]