ALGEBRA III – 2. izpit

Vsi kolobarji so komutativni z enico

(1) (a) Formuliraj izrek “lying over”. [3]
(b) Formuliraj “going up” (gor grede). [3]
(c) Formuliraj “going down” (dol grede). [3]
(d) Dokaži enega od teh izrekov. [6]

(2) Naj bo k poljuben obseg in $R := k[X, Y, Z]$. Naj bodo

$$\mathfrak{p}_1 := (X, Y),\ \mathfrak{p}_2 := (X, Z),\ \mathfrak{m} := (X, Y, Z) \text{ in } \mathfrak{a} := \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$$

ideali v R.
(a) Pokaži, da je

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$$

reducirana primarna dekompozicija ideala $\mathfrak{a}$. [10]
(b) Kateri praideali prirejeni idealu $\mathfrak{a}$ so vloženi in kateri izolirani (minimalni)? [5]

(3) (a) Naj bo k poljuben obseg in

$$A := \{f \in k[X, Y] \mid \exists a \in k\, \exists g \in k[X, Y] :\ f(X, Y) = a + Xg(X, Y)\}.$$

Pokaži, da kolobar A ni noetherski. [7]
(b) Naj bo A noetherski kolobar in $\varphi : A \to B$ tak homomorfizem kolobarjev, da je B končno generirana razširitev $\varphi(A)$. Ali je B nujno noetherski? [4]
(c) Naj bo k obseg in $A \supseteq k$ kolobar, ki je končno generiran kot k–vektorski prostor. Dokaži, da je A noetherski in artinski. [4]

(4) Naj bo k algebraično zaprt obseg karakteristike 0 in

$$V := \{(x, y) \in k^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\}.$$

(a) Pokaži, da je preslikava $f : k \to V$, podana z $t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - 1)$, polinomska in bijektivna. [5]
(b) Kateremu homomorfizmu k–algeber ustreza preslikava f? [5]
(c) Pokaži, da preslikava f ni izomorfizem. [5]

(5) Fiksirajmo praštevilo p. Vsako neničelno racionalno število a zapišemo kot $a = p^\nu \frac{b}{c}$, kjer $b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ in $p \nmid b$, $p \nmid c$. Definirajmo $v : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ s predpisom $v(a) = \nu$.
(a) Pokaži, da v določa valuacijo na $\mathbb{Q}$. [6]
(b) Poišči valuacijski kolobar, ki pripada valuaciji v in njegov maksimalni ideal. Kaj je obseg ostankov valuacije v? [9]