KOMUTATIVNA ALGEBRA

1. domača naloga – 14.10.2004

(1) Naj bo R komutativen kolobar z enico. Denimo, da so $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}$ ideali kolobarja R in velja $\mathfrak{b} \subseteq \cup_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$.

(a) Če so vsi razen kvečjemu dva izmed idealov $\mathfrak{a}_i$ praideali, potem obstaja j, da je $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}_j$. Dokaži!

(b) Pokaži, da trditev ne velja, če trije izmed $\mathfrak{a}_i$ niso praideali.

(2) Naj bo R komutativen kolobar z enico. Pokaži:

(a) Če so vsi praideali kolobarja R končno generirani, potem je R noetherski.

(b) Če je R noetherski, potem je tudi $R[\![X]\!]$ noetherski.

(3) Naj bo R komutativen kolobar, za katerega *ne* predpostavimo, da vsebuje enico. Dokaži: če je kolobar $R[X]$ noetherski, potem R vsebuje enico.

(4) Naj bo R komutativen kolobar z enico, m in n naravni števili in $\psi : R^m \to R^n$ poljuben homomorfizem R–modulov.

(a) Če je ψ surjektiven, potem je $m \geqslant n$.

(b) Če je ψ injektiven in je R noetherski, potem je $n \geqslant m$.

(c) Ali točka (b) velja tudi, če kolobar R ni noetherski?

Rok za oddajo domačih nalog je 28.10.2004