KOMUTATIVNA ALGEBRA

2. domača naloga – 28.10.2004

Vsi kolobarji so komutativni in vsebujejo enico.

Definicija: Naj bo N podmodul R–modula M. Za $a \in R$ z $\lambda_a : M/N \to M/N$ označimo množenje z a. Pravimo, da je N *primaren podmodul* modula M, če je $N \subsetneq M$ in je za vsak $a \in R$, λ_a injektivna preslikava ali pa nilpotentna preslikava. *Anihilator* modula M/N označimo z $r_M(N)$. To je množica vseh $a \in R$, za katere je $aM \subseteq N$. Očitno je za $a \in R$ preslikava λ_a nilpotentna natanko tedaj, ko je $a \in \mathrm{Rad}\,\big(r_M(N)\big)$. Če je N primaren podmodul v M, potem je $r_M(N) =: \mathfrak{p}$ praideal (glej točko (a) naloge 1). V tem primeru pravimo, da je N $\mathfrak{p}$–primaren.

Primarna dekompozicija podmodula N modula M je zapis oblike $N = \cap_{i=1}^n N_i$, kjer so N_i $\mathfrak{p}_i$–primarni podmoduli. Dekompozicija je *reducirana*, če so vsi $\mathfrak{p}_i$ različni in N ne moremo zapisati kot presek pravega podnabora modulov N_i.

Pravemu podmodulu N modula M pravimo *nerazcepen*, če ga ne moremo zapisati kot presek dveh strogo večjih podmodulov.

(1) (a) Dokaži: če je N primaren podmodul v M, potem je $r_M(N)$ praideal.
  (b) Če so $N_1, \ldots, N_k$ $\mathfrak{p}$–primarni, je tudi modul $\cap_{i=1}^k N_i$ $\mathfrak{p}$–primaren.
  (c) Vsak nerazcepen podmodul N noetherskega modula M je primaren.
  (d) Vsak pravi podmodul N noetherskega modula M ima reducirano primarno dekompozicijo.

Definicija: Naj bo M poljuben R–modul in $\mathfrak{p}$ praideal kolobarja R. Pravimo, da je $\mathfrak{p}$ *prirejen* (včasih tudi *asociiran*) modulu M, če je $\mathfrak{p}$ anihilator kakšnega neničelnega $x \in M$, torej $\mathfrak{p} = \{r \in R \mid rx = 0\}$.

(2) (a) Naj bo $M \neq \{0\}$ končno generiran modul nad noetherskim kolobarjem R. Po točki (d) 1. naloge ima $\{0\}$ reducirano primarno dekompozicijo, npr. $\{0\} = \cap_{i=1}^r N_i$, kjer je N_i $\mathfrak{p}_i$–primaren. Dokaži, da so modulu M prirejeni praideali natanko $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$.
  (b) (*Prvi izrek o enoličnosti*) Naj bo M končno generiran modul nad noetherskim kolobarjem R. Denimo, da je $N = \cap_{i=1}^r N_i$ reducirana primarna dekompozicija podmodula N in je N_i $\mathfrak{p}_i$–primaren. Dokaži, da praideali $\mathfrak{p}_i$ niso odvisni od izbire primarne dekompozicije, temveč le od N.

(3) *Spekter* komutativnega kolobarja R, $\operatorname{Spec} R$, je množica vseh praidealov kolobarja R, ki so strogo vsebovani v R. $\operatorname{Spec} R$ opremimo s topologijo, ki ima za podbazo (odprtih množic) $\{U(f) \mid f \in R\}$, kjer $U(f) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p}\}$[1]. Pokaži:

(a) $\operatorname{Spec} R$ je kompakten in T_0[2].

(b) Vsaka zaprta nerazcepna[3] podmnožica $\operatorname{Spec} R$ ima generično točko[4].

(c) Za topološki prostor X definiramo $\mathring{\mathcal{K}}(X) := \{U \subseteq X \mid U$ je odprta in kompaktna množica$\}$. Dokaži, da je $\mathring{\mathcal{K}}(\operatorname{Spec} R)$ baza za $\operatorname{Spec} R$, ki je zaprta za končne preseke[5].

(d) Vpeljimo na $\operatorname{Spec} R$ še eno topologijo. Podbazo te topologije tvorijo vse množice iz $\mathring{\mathcal{K}}(\operatorname{Spec} R)$ in vsi njihovi komplementi[6]. Dokaži, da je $\operatorname{Spec} R$ v tej topologiji Boolov prostor[7].

(4) Naj bo K poljuben komutativen obseg.

(a) Če sta polinoma $F, G \in K[X_1, X_2]$ paroma tuja (torej $\gcd(F, G) = 1$), potem ima sistem

$$F(X_1, X_2) = 0, \quad G(X_1, X_2) = 0$$

v K^2 kvečjemu končno mnogo rešitev.

(b) Če je K algebraično zaprt, potem so praideali kolobarja $K[X, Y]$ natanko

(i) $\{0\}$ in $K[X, Y]$,

(ii) (f) za nerazcepen polinom $f \in K[X, Y]$,

(iii) $(X - \zeta_1, Y - \zeta_2)$ za $(\zeta_1, \zeta_2) \in K^2$.

(c) Ali so vsi praideali kolobarja $\mathbb{R}[X, Y]$ oblike (i), (ii) ali (iii)?

Rok za oddajo domačih nalog je 11.11.2004

[1] Tej topologiji pravimo *spektralna topologija*.

[2] Topološki prostor X je T_0, če za poljubni različni točki $x, y \in X$ velja $x \notin \overline{\{y\}}$ ali $y \notin \overline{\{x\}}$.

[3] Množica je nerazcepna, če je ne moremo zapisati kot unijo dveh strogo manjših zaprtih podmnožic.

[4] Točka $x \in A$ je generična točka za A, če je $\overline{\{x\}} = A$.

[5] Topološkemu prostoru, ki izpolnjuje (a)–(c) pravimo *spektralni prostor.*

[6] To topologijo imenujemo *konstruktibilna*.

[7] Topološki prostor je *Boolov*, kadar je kompakten, T_2 in povsem nepovezan.