KOMUTATIVNA ALGEBRA

3. domača naloga[1] – 11.11.2004

Vsi kolobarji so komutativni z enico

(1) Naj bo R poljuben kolobar in $C \subseteq \operatorname{Spec} R$.
   (a) Naj bo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ in $\bigcap C \subseteq \mathfrak{p}$. Če je množica C končna, potem obstaja $\mathfrak{q} \in C$ z lastnostjo $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.
   (b) Pokaži, da sklep točke (a) velja tudi, če je C zaprta v konstruktibilni topologiji spektra (in ni nujno končna).
   (c) S primerom dokaži, da sklep točke (a) ne velja, če C ni zaprta v konstruktibilni topologiji.
   (d) Če je C zaprta v konstruktibilni topologiji, je njeno zaprtje $\overline{C}$ v spektralni topologiji enako $\cup_{\mathfrak{p} \in C} \overline{\{\mathfrak{p}\}}$.
   (e) Ali sklep točke (d) velja tudi, če C ni zaprta v konstruktibilni topologiji?

   Konstruktibilno topologijo na $\operatorname{Spec} R$ smo definirali v prejšnji domači nalogi.

(2) Naj bo k poljuben obseg.
   (a) Naj bo $R := k[x, y]/(x^2, xy)$. Poišči vse praideale, ki so prirejeni idealu (0) in poišči vsaj 3 njegove reducirane primarne dekompozicije.
   (b) Naj bo $R := k[x, y, z]$ in $\mathfrak{a} := (y^4, yz^4, x^2z^4)$. Poišči vse praideale, ki so prirejeni temu idealu in reducirano primarno dekompozicijo ideala $\mathfrak{a}$.

(3) Naj bo R reduciran kolobar s končno množico minimalnih praidealov $(\operatorname{Spec} R)^{\min} = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$.
   (a) Dokaži, da je množica nedeliteljev niča S enaka $R \setminus \bigcup (\operatorname{Spec} R)^{\min}$.
   (b) Pokaži, da je $R_S \cong \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p}_1) \times \cdots \times \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p}_r)$, kjer smo za kolobar A brez deliteljev niča s $\operatorname{Quot} A$ označili njegov obseg ulomkov.
   (c) Ali točka (a) velja tudi, če množica $(\operatorname{Spec} R)^{\min}$ ni končna?

(4) Naj bo R kolobar brez deliteljev niča in $\operatorname{Quot} R$ njegov obseg ulomkov.
   (a) Dokaži, da je za vsak maksimalen ideal $\mathfrak{m} \in (\operatorname{Spec} R)^{\max}$ kanonična preslikava $R_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \operatorname{Quot} R$ vložitev.
   (b) Po točki (a) lahko tako R kot tudi vsako lokalizacijo $R_{\mathfrak{m}}$ za $\mathfrak{m} \in (\operatorname{Spec} R)^{\max}$ vložimo v $\operatorname{Quot} R$. Pokaži, da velja
$$R = \bigcap_{\mathfrak{m} \in (\operatorname{Spec} R)^{\max}} R_{\mathfrak{m}}.$$

[1] *Rok za oddajo domačih nalog je* 25.11.2004