KOMUTATIVNA ALGEBRA

4. domača naloga[1] – 25.11.2004

Vsi kolobarji so komutativni z enico

(1) (a) Če obseg k ni algebraično zaprt, potem lahko vsako algebraično množico $V \subseteq k^n$ zapišemo kot množico ničel enega samega polinoma, t.j. obstaja polinom $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, za katerega velja $V = \{\underline{x} \in k^n \mid F(\underline{x}) = 0\}$.

(b) Če je obseg k končen, je vsaka podmnožica $V \subseteq k^n$ ničelna množica kakšnega polinoma.

(c) Dokaži, da trditev točke (a) ne velja za algebraično zaprte obsege. Pokaži, da sklep točke (b) za neskončne obsege ne velja.

(2) Naj bo k algebraično zaprt obseg, $\mathcal{S} = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ razcep algebraične množice $\mathcal{S}$ na nerazcepne algebraične množice in $k(\mathcal{S})$, $k(V_i)$ pripadajoče algebre racionalnih funkcij. Dokaži, da preslikava

$$[U, r] \mapsto \Big(\big[U \cap V_1, r|_{V_1}\big], \ldots, \big[U \cap V_n, r|_{V_n}\big]\Big)$$

inducira izomorfizem k–algeber $k(\mathcal{S}) \to k(V_1) \times \cdots \times k(V_n)$.

Definicija: Za poljuben obseg k množico oblike $\{\underline{a} \in k^n \mid F_1(\underline{a}) = \cdots = F_\ell(\underline{a}) = 0, G_1(\underline{a}) \neq 0, \ldots, G_k(\underline{a}) \neq 0\}$, kjer so $F_1, \ldots, F_\ell, G_1, \ldots, G_k \in k[X_1, \ldots, X_n]$, imenujemo *bazična konstruktibilna množica.* Končnim unijam teh množic pravimo *konstruktibilne množice*. Preslikava $\varphi : V_1 \to V_2$ med algebraičnima množicama V_1 in V_2 je *konstruktibilna*, če je njen graf $\Gamma_\varphi := \big\{(x, \varphi(x)) \in V_1 \times V_2 \mid x \in V_1\big\}$ konstruktibilna podmnožica $V_1 \times V_2$.

(3) Naj bo k algebraično zaprt obseg.

(a) Dokaži, da je družina konstruktibilnih množic najmanjša družina, ki vsebuje vse algebraične množice in je zaprta za končne unije, končne preseke in komplemente. Opiši vse konstruktibilne podmnožice v k.

(b) Dokaži, da je vsaka konstruktibilna množica projekcija algebraične množice. Ali je projekcija algebraične množice nujno algebraična množica?

(c) Chevalleyev konstruktibilnostni izrek pravi, da je projekcija konstruktibilne množice vzdolž ene od koordinatnih osi tudi konstruktibilna množica. Dokaži ta izrek za kak poseben primer, recimo za (i) množico rešitev ene polinomske enačbe ali (ii) komplement take množice.

(d) Pokaži, da konstruktibilne preslikave slikajo konstruktibilne množice v konstruktibilne množice.

(e) Pokaži, da so racionalne preslikave konstruktibilne. Ali je vsaka konstruktibilna preslikava racionalna?

(4) (a) Za vsako celo število m poišči celostno zaprtje kolobarja $\mathbb{Z}[\sqrt{m}\,]$.

(b) Za obseg k poišči celostno zaprtje k–algebre $k[X, Y]/(Y^2 - X^3 - X^2)$.

---

[1] *Rok za oddajo domačih nalog je* 9.12.2004