KOMUTATIVNA ALGEBRA

5. domača naloga[1] – 9.12.2004

Vsi kolobarji so komutativni z enico

(1) Naj bosta $A \subseteq B$ kolobarja.
- (a) Dokaži, da za vsak $\mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec} A)^{\min}$ obstaja $\mathfrak{q} \in (\operatorname{Spec} B)^{\min}$ z lastnostjo $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.
- (b) Ali velja kaj analognega za maksimalne ideale?
- (c) Kaj pa, če je B celosten nad A?

(2)
- (a) Dokaži, da za kolobarja $A \subseteq B$ velja:

$$A \text{ celostno zaprt v } B \quad \Leftrightarrow \quad A[X] \text{ celostno zaprt v } B[X].$$

- (b) Dokaži, da polinomski kolobar $k[X]$ za vsak obseg k vsebuje neskončno mnogo maksimalnih idealov.

(3) Naj bo R kolobar brez deliteljev niča in K njegov obseg ulomkov. Pravimo, da je $x \in K$ *skoraj celosten* nad R, če obstaja $a \in R \setminus \{0\}$, za katerega velja $ax^n \in R$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Dokaži:
- (a) Če je $x \in K$ celosten nad R, je tudi skoraj celosten nad R.
- (b) Če je kolobar R noetherski, velja tudi obrat točke (a).
- (c) Ali velja obrat točke (a) tudi, če R ni noetherski?

[1] *Rok za oddajo domačih nalog je* 23.12.2004