KOMUTATIVNA ALGEBRA

6. domača naloga[1] – 23.12.2004

Vsi kolobarji so komutativni z enico

(1) Naj bo k obseg in $R := k[\![X]\!][Y]$. Dokaži, da je kolobar R noetherski, ni pa univerzalno verižen.

(2) Naj bo $R := k[X_1, X_2, \ldots]$ polinomski kolobar v neskončno mnogo spremenljivkah nad obsegom k. Naj bo $d_0 < d_1 < d_2 < \cdots$ naraščajoče zaporedje naravnih števil z lastnostjo $d_{n+1} - d_n > d_n - d_{n-1}$ in definirajmo zaporedje idealov

$$\mathfrak{p}_i := (X_{d_{i-1}}, \ldots, X_{d_i}), \quad i \in \mathbb{N}.$$

- (a) Dokaži, da so $\mathfrak{p}_i$ praideali kolobarja R, $U := R \setminus \bigcup_i \mathfrak{p}_i$ multiplikativna množica in $U^{-1}\mathfrak{p}_i$ maksimalni ideali v $U^{-1}R$.
- (b) Naj bo S tak kolobar, da je $S_\mathfrak{m}$ noetherski kolobar za vsak maksimalen ideal $\mathfrak{m}$ v S in da je vsak $s \in S$ vsebovan v kvečjemu končno mnogo maksimalnih idealih. Dokaži, da je S noetherski.
- (c) Dokaži, da je $U^{-1}R$ noetherski kolobar z neskončno Krullovo dimenzijo.

(3) Naj bo k poljuben obseg in R poljubna k–algebra.

- (a) Če je $S \subseteq R$ algebra nad k, potem velja $\operatorname{Trdeg} S \leqslant \operatorname{Trdeg} R$.
- (b) Za $\mathfrak{a} \lhd R$ velja $\operatorname{Trdeg} R/\mathfrak{a} \leqslant \operatorname{Trdeg} R$.
- (c) Za multiplikativno podmnožico $S \subseteq R$ velja $\operatorname{Trdeg} S^{-1}R \leqslant \operatorname{Trdeg} R$.
- (d) $\operatorname{Trdeg} R = \sup\left\{\operatorname{Trdeg}\left(\operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})|k\right) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A\right\}$.
- (e) $\operatorname{Trdeg} R = \sup\left\{\operatorname{Trdeg}\left(\operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})|k\right) \mid \mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec} A)^{\min}\right\}$.
- (f) Če je S celostna razširitev algebre R, potem je $\operatorname{Trdeg} S = \operatorname{Trdeg} R$.
- (g) Če je R končno generirana, velja $\dim R = \operatorname{Trdeg} R \in \mathbb{N}_0$.
- (h) $\dim R \leqslant \operatorname{Trdeg} R$.
- (i) Pokaži, da točka (a) ne velja za Krullovo dimenzijo.
- (j) Dokaži, da enačaj v točki (g) ne velja za algebre, ki niso končno generirane.

[1] *Rok za oddajo domačih nalog je* 6.1.2005