KOMUTATIVNA ALGEBRA

7. domača naloga[1] – 6.1.2005

Vsi kolobarji so komutativni z enico

(1) (a) Pokaži, da lahko v vsakem obsegu (tudi v obsegih z neničelno karakteristiko) za poljubna $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geqslant k$, definiramo binomski simbol $\binom{n}{k}$.
(b) Naj bo k poljuben obseg. Pokaži, da za vsak $x \in k$ in $n \in \mathbb{N}$ velja
$$n!x = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \binom{n-1}{i} \big((x+i)^n - i^n\big).$$
(c) Naj bo $n \in \mathbb{N}$, K obseg in R lokalen podkolobar obsega K. Predpostavimo, da za vsak $x \in K$ velja $x^n \in R$ ali $x^{-n} \in R$. Dokaži: če ima obseg ostankov lokalnega kolobarja R karakteristiko 0 ali pa je njegova karakteristika p in je $p > n$, potem je R valuacijski kolobar.
(d) Pokaži, da točka (c) ne velja brez dodatnih predpostavk o obsegu ostankov lokalnega kolobarja R.

(2) Naj bosta $K \subseteq L$ obsega, $v : K \to \Gamma_v \cup \infty$ valuacija in $w : L \to \Gamma_w \cup \infty$ valuacija, ki razširja v. Obseg ostankov valuacije u označimo s k_u.
(a) Obstajata naravni vložitvi $k_v \hookrightarrow k_w$ in $\Gamma_v \hookrightarrow \Gamma_w$, pri čemer vložitev urejenih grup ohranja urejenost.
(b) Naj bodo $x_1, \ldots, x_f \in L$ z $w(x_1) = \cdots = w(x_f) = 0$. Denimo, da so slike teh elementov v k_w linearno neodvisne nad k_v. Pokaži, da za vse $a_1, \ldots, a_f \in K$ velja
$$w(a_1 x_1 + \cdots + a_f x_f) = \min_j v(a_j).$$
Sklepaj, da so $x_1, \ldots, x_f$ linearno neodvisni nad K.
(c) Naj bo $e := [\Gamma_w : \Gamma_v]$ in $f := [k_w : k_v]$. Pokaži, da je $ef \leqslant [L : K]$.
(d) Če je $\Gamma_v = \mathbb{Z}$ in $[L : K] < \infty$, potem je $\Gamma_w \cong \mathbb{Z}$.

(3) (a) Naj bo K obseg in $v : K \to \Gamma_v \cup \infty$ valuacija z obsegom ostankov k_v. Pokaži, da je $\operatorname{card} K \leqslant \operatorname{card}\left(k_v^{\Gamma_v}\right)$.
(b) Dokaži, da ima vsak obseg z valuacijo maksimalno neposredno razširitev[2].

---

[1] *Rok za oddajo domačih nalog je* 20.1.2005

[2] Razširitev obsegov z valuacijo $(L, u) \supseteq (K, v)$ je *neposredna*, če je $u|_K = v$ in sta kanonični vložitvi iz naloge (2a) surjektivni, torej je $k_v = k_u$ in $\Gamma_v = \Gamma_u$. Pozor: *ne* zadošča predpostaviti, da sta obsega ostankov in grupi izomorfni!