KOMUTATIVNA ALGEBRA – Rešitev 5. domače naloge

(1a) Definirajmo $S := A \setminus \mathfrak{p}$. Očitno je $S^{-1}A = A_\mathfrak{p}$ podkolobar kolobarja $S^{-1}B$ in $\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}'\}$, saj je $\mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec} A)^{\min}$. Ker je kolobar $S^{-1}B$ netrivialen, ima vsaj en praideal $\mathfrak{r}'$. Ker je $\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p}$ singleton, velja $\mathfrak{r}' \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.

Označimo kanonično preslikavo $A \to A_\mathfrak{p}$ z i_A, preslikavo $B \to S^{-1}B$ pa z i_B. Naj bo $\mathfrak{r} := (i_B)^{-1}(\mathfrak{r}')$. Potem velja $i_A(\mathfrak{r} \cap A) \subseteq \mathfrak{r}' \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$. Torej $\mathfrak{r} \cap A \subseteq \mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec} A)^{\min}$. Ker je $\mathfrak{r} \cap A \in \operatorname{Spec} A$, sledi $\mathfrak{r} \cap A = \mathfrak{p}$. Če je $\mathfrak{r} \in (\operatorname{Spec} B)^{\min}$, je iskani praideal kolobarja B kar $\mathfrak{r}$. V nasprotnem primeru pa vzamemo poljuben $\mathfrak{q} \in (\operatorname{Spec} B)^{\min}$, ki je vsebovan v $\mathfrak{r}$.

(1b) Ne, protiprimer je npr. $A = \mathbb{Z}$ in $B = \mathbb{Q}$.

(1c) Da, sledi iz izreka s predavanj.

(2a) Implikacija ($\Leftarrow$) je očitna. Za obrat predpostavimo, da je A celostno zaprt v B in naj bo $p \in B[X] \setminus A[X]$ polinom najmanjše stopnje, ki je celosten nad $A[X]$. Tedaj obstajajo $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in A[X]$, za katere je

$$p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \cdots + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0. \qquad (\star)$$

Za poljuben polinom f s f_0 označimo njegov konstantni člen. Opazimo, da iz predpostavke o minimalnosti polinoma p sledi $p_0 \neq 0$. Tako lahko iz enačbe $(\star)$ poberemo konstantne člene in dobimo

$$p_0^n + \alpha_{n-1,0}p_0^{n-1} + \cdots + \alpha_{1,0}p_0 + \alpha_{0,0} = 0.$$

Torej je $p_0 \in B$ celosten nad A in s tem tudi sam v A. Sledi $p - p_0 \in XB[X]$ in je celosten nad $A[X]$ (množica celostnih elementov je kolobar). Sedaj hitro vidimo, da je tedaj tudi $\frac{p-p_0}{X}$ celosten nad $A[X]$. Ker pa je ta polinom strogo manjše stopnje od p, pridemo v protislovje, ki pokaže, da je $A[X]$ celostno zaprt v $B[X]$.

(2b) Če je obseg k neskončen, nam že kar jedra evaluacij $X \mapsto \alpha$, $\alpha \in k$, podajo neskončno mnogo maksimalnih idealov. Torej smemo predpostaviti, da je obseg k končen. Trdimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja nerazcepen polinom $p_n \in k[X]$ stopnje $\geqslant n$. Denimo nasprotno. Potem je vsak element algebraičnega zaprtja $\widetilde{k}$ obsega k omejenega reda nad k, recimo $\leqslant N$. Polinomov iz $k[X]$, ki so stopnje $\leqslant N$ pa je le končno mnogo, torej je $[\widetilde{k} : k] < \infty$. Sledi, da je obseg $\widetilde{k}$ končen, kar pa je protislovje, saj je algebraično zaprt.

Naloga je s tem rešena, saj vsak p_n generira maksimalen ideal v $k[X]$ in brez škode za splošnost smemo predpostaviti, da iz $n \neq m$ sledi $\deg p_n \neq \deg p_m$. Torej so kvocienti $k[X]/(p_n)$ obsegi in poljubna dva sta različne končne moči – torej ne moreta biti izomorfna.

(3a) Recimo, da je $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ za $a_i \in R$. Potem je vsaka potenca x–a R–linearna kombinacija $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$. Torej za $x = \frac{b}{c}$ velja $c^{n-1}x, \dots, c^{n-1}x^{n-1} \in R$ in zato $c^{n-1}x^k \in R$ za vsak $k \in \mathbb{N}$.

(3b) Vzemimo $x \in K$, ki je skoraj celosten nad R in naj za $0 \neq a \in R$ velja $ax^n \in R$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Oglejmo si verigo idealov $(ax) \subseteq (ax, ax^2) \subseteq \cdots$. Ker je R noetherski, je veriga stacionarna: $(ax, \dots, ax^n) = (ax, \dots, ax^{n+1})$. Torej je $ax^{n+1} \in (ax, \dots, ax^n)$, npr. $ax^{n+1} = \alpha_1 ax + \cdots + \alpha_n ax^n$ za $\alpha_i \in R$. Ker je K obseg, lahko krajšamo z ax. Sledi $x^n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n x^{n-1}$, torej je x celosten nad R.

(3c) Ne. Naj bo $\mathscr{L}_K := \{+, \cdot; 0, 1\}$ jezik kolobarjev z enico in $\mathscr{L}$ jezik $\mathscr{L}_K$ razširjen z dvema konstantama b, c. (Ideja: element x iz obsega ulomkov predstavimo kot b/c.) V jeziku $\mathscr{L}$ definiramo teorijo T kot teorijo, ki vsebuje aksiome za celostna polja in aksiom $bc \neq 0$. Model teorije T je natanko celostno polje R z neničelnima elementoma b in c. V jeziku $\mathscr{L}$ podamo naslednje stavke:

$$\varphi_n : \quad \exists a \neq 0\, (\exists r_1 : ab = r_1 c \;\wedge\; \cdots \;\wedge \exists r_n : ab^n = r_n c^n)$$

$$\psi_n : \quad \exists \alpha_0 \cdots \exists \alpha_{n-1}\, (b^n + \alpha_{n-1} b^{n-1} c + \cdots + \alpha_1 b c^{n-1} + \alpha_0 c^n = 0).$$

Poenostavljeno povedano je φ_n ekvivalenten zahtevi $\exists a \in R \setminus \{0\}\, (ax \in R \;\wedge\; \cdots \;\wedge\; ax^n \in R)$, medtem ko ψ_n pove, da je x celosten nad R z minimalnim polinomom stopnje $\leqslant n$. Naj bo $T_1 := T \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Model teorije T_1 je celostno polje R, za katerega je element $x = b/c$ skoraj celosten nad R, ni pa celosten nad R. To je natanko primer, ki ga iščemo.

Pokazati želimo, da je teorija T_1 konsistentna (ima model; je neprotislovna). Po Gödelovem izreku o kompaktnosti iz logike zadošča dokazati, da ima vsaka končna podmnožica T_2 teorije T_1 model. Obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $T_2 \subseteq T \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg\psi_1, \ldots, \neg\psi_N\}$. Za vsako naravno število N zadošča torej poiskati celostno polje R, katerega obseg ulomkov vsebuje element $x = b/c$, ki je (skoraj) celosten nad R in katerega minimalni polinom je stopnje $> N$.

Naj bo p_n n–to praštevilo, k poljuben obseg in $R_n := k[t^{p_n}, t^{p_{n+1}}]$. Očitno je $R_n \subseteq k[t]$ in zato obseg ulomkov K_n kolobarja R_n leži v $k(t)$. Ker sta p_n in p_{n+1} paroma tuji, obstajata $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ z lastnostjo $\alpha p_n + \beta p_{n+1} = 1$. Natanko eno od števil α, β je negativno. Če je $\alpha < 0 < \beta$, postavimo $b := (t^{p_{n+1}})^\beta$ in $c := (t^{p_n})^{-\alpha}$, sicer pa $b := (t^{p_{n+1}})^\alpha$ in $c := (t^{p_n})^{-\beta}$. Tedaj $b, c \in R_n$ in $b/c = t \in K_n$. Torej je $K_n = k(t)$. Preprosto je videti, da je $t \in K_n$ celosten nad R_n z minimalnim polinomom stopnje p_n. Torej je iskan primer kolobarja R, katerega obseg ulomkov vsebuje element $x = b/c$, ki je celosten nad R in katerega minimalni polinom je stopnje $> N$, kar R_N.