1) (a) $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r \in \operatorname{Spec} R$, $\bigcap \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$.

Denimo, da $\forall i\ \exists x_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}$.

Potem $x_1 \cdots x_r \in \bigcap \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}$; protislovje.

(b) Denimo nasprotno. Tedaj $\forall \mathfrak{q} \in C\ \exists x_{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}$.

Torej je $C \subseteq \bigcup_{\mathfrak{q} \in C} Z(x_{\mathfrak{q}})$. Ker je množica

C zaprta v $\operatorname{Spec} R$ v konstruktibilni topologiji,

je C kompaktna ($\operatorname{Spec} R$ je T_2 v tej top.).

Po definiciji konstr. top. so množice $Z(x_{\mathfrak{q}})$

odprte $\Rightarrow \exists \mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r \in C$: $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} Z(x_{\mathfrak{q}_i})$.

Vendar tedaj $x_{\mathfrak{q}_1} \cdots x_{\mathfrak{q}_r} \in \bigcap C \setminus \mathfrak{p}$; $\lightning$

(c) Naj bo $R := \mathbb{C}[X]$ in za vsak $a \in \mathbb{C}$,

$\mathfrak{m}_a := \{f \in R \mid f(a) = 0\}$. Očitno $\mathfrak{m}_a \in (\operatorname{Spec} R)^{\max}$.

$\bigcap_{0 \neq a \in \mathbb{C}} \mathfrak{m}_a = \{f \in R \mid \forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ f(a) = 0\}$.

Ker ima vsak kompleksni polinom končno ničel (če je le neničelen), je $\bigcap_{a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \mathfrak{m}_a = \{0\}$.

Torej $\bigcap_{0 \neq a \in \mathbb{C}} \mathfrak{m}_a = \{0\} \subseteq \mathfrak{m}_0$, a za vsak

$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ velja $\mathfrak{m}_a \not\subseteq \mathfrak{m}_0$.

(d) Dokazujemo $\overline{C} = \bigcup_{\mathfrak{p} \in C} \overline{\{\mathfrak{p}\}}$. Inkluzija ($\supseteq$) je

očitna. Za obrat naj bo $\mathfrak{p} \in \overline{C}$ in $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$

vse odprte-kompaktne okolice $\mathfrak{p}$ v $\operatorname{Spec} R$ (v spektralni

topologiji). Za $\forall \lambda$ je $C \cap U_\lambda \neq \emptyset$. Ker so množice

$C \cap U_\lambda$ zaprte v konstruktibilni topologiji $\operatorname{Spec} R$,

so kompaktne. Torej je $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (C \cap U_\lambda) \neq \emptyset$.

Za vsak $\mathfrak{q} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (C \cap U_\lambda)$ velja $\mathfrak{p} \in \overline{\{\mathfrak{q}\}}$.

(e) Ohranimo oznake iz primera (c).

Definirajmo $C := \{\mathfrak{m}_a \mid a \in \mathbb{C}\}$.

(Po Hilbertovem Nullstellensatzu je

$C = (\operatorname{Spec} R)^{\max}$; od tod sledi

preostanek. Lahko pa trditev dokažemo

brez tega.)

$\forall a \in \mathbb{C}$: $\overline{\{\mathfrak{m}_a\}} = \{\mathfrak{m}_a\}$, saj so

vsi ideali oblike $\mathfrak{m}_a$ maksimalni.

Torej $C = \bigcup_{a \in \mathbb{C}} \{\mathfrak{m}_a\} = \bigcup_{a \in \mathbb{C}} \overline{\{\mathfrak{m}_a\}}$.

Vendar pa $(0) \in \overline{C}$, saj za vsak

neničelen polinom $f \in R$ obstaja $x \in \mathbb{C}$,

ki ni ničla f-a. Torej $\mathfrak{m}_x \in U(f)$.

(2a) R je izomorfen $k[y] \oplus kX$, kjer je množenje porojeno z

$$\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n_1} a_i^{(1)} \cdot y^i}_{p_1}, \lambda_1 x\Big) \cdot \Big(\underbrace{\sum_{j=0}^{n_2} a_j^{(2)} y^j}_{p_2}, \lambda_2 x\Big) = \left(p_1 \cdot p_2,\ a_0^{(2)} \cdot \lambda_1 + a_0^{(1)} \cdot \lambda_2\right).$$

Po prvem izreku o enoličnosti primarne dekompozicije so praideali, ki so pridruženi (0), natanko tisti praideali, ki jih najdemo med $\mathrm{Rad}((0):x)$ za $x \in R$. S pomočjo tega lahko ročno izračunamo $\mathrm{Ass}((0))$. Lahko pa najprej "uganemo" primarno dekomp. ideala (0) in iz te izpeljemo $\mathrm{Ass}((0))$. To bomo storili tukaj.

Trdimo, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$

$$(0) = (x) \cap (y^n)$$

primarna dekompozicija z (0).

- (x) je celo praideal, saj je $R/(x) \cong k[y]$, ker je cel kolobar.
- (y^n) v splošnem ni praideal, vendar je vsak delitelj niča v $R/(y^n)$ slika elementa $\left(\sum_{i=1}^{n_1} a_i y^i, \lambda x\right)$ za primerne n, a_i, λ.

Očitno je n-ta potenca tega polinoma element ideala (y^n). Torej je (y^n) primaren ideal.

- $\mathrm{Ass}((0)) = \{(x), \mathrm{Rad}(y^n)\}$.

Očitno je $\mathrm{Rad}(y^n) \supseteq (y)$, ker pa je $\mathrm{Rad}(y^n)$ praideal in $x^2 = 0 \in \mathrm{Rad}(y^n)$, sledi $\mathrm{Rad}(y^n) \supseteq (x, y)$. Ker je (x, y) praideal, je $\mathrm{Ass}((0)) = \{(x), (x,y)\}$.

(2b) Trdimo, da je $(y^4, yz^4, x^2z^4) = (x^2, y) \cap (y^4, z^4)$ $(+)$ primarna dekompozicija ideala $\mathfrak{a}$. Najprej dokažimo, da sta obe strani enaki kot množici: $(x^2, y) \cap (y^4, z^4) = (x^2y^4, x^2z^4, y^4, yz^4) = (x^2z^4, y^4, yz^4)$.

Če je $(+)$ res prim. dekomp., potem je $\mathrm{Ass}(\mathfrak{a}) = \{(x,y), (y,z)\}$, saj je $\mathrm{Rad}(x^2, y) = (x, y)$ in $\mathrm{Rad}(y^4, z^4) = (y,z)$.

Pokažimo, da je (x^2, y) primaren ideal (dokaz za (y^4, z^4) je podoben, računsko rahlo bolj zahteven, in bo izpuščen).

Denimo, da za $f, g \in R \setminus (x^2, y)$ velja $fg \in (x^2, y)$.

BŠS $g = h_1(z) + x \cdot h_2(z)$ in $f = f_1(z) + x \cdot f_2(z)$ (vse elte iz (x^2, y) lahko odštejemo, saj ne vplivajo na resničnost izjave, ki jo dokazujemo). Potem je

$$fg = f_1(z) \cdot h_1(z) + x\left(h_1(z) f_2(z) + h_2(z) \cdot f_1(z)\right) + x^2 \cdot u.$$

Torej iz $fg \in (x^2, y)$ sledi (med drugim) $f_1 h_1 = 0$, npr. $f_1 = 0$. Vendar sedaj $f^2 = x^2 \cdot f_2(z)^2$ leži v (x^2, y), kar smo želeli dokazati.

(3) (a) Poseben primer, ko je minimalen praideal en sam, recimo $\mathfrak{p}_1$, je zelo preprost. Ker je nilradikal presek vseh minimalnih praidealov in v tem primeru enak $\{0\}$, je $\mathfrak{p}_1 = \{0\}$. Torej je R cel kolobar in trditev očitno drži. Denimo, da je $r > 1$. Vzemimo poljuben element $x \in \mathfrak{p}_j \subseteq \cup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$ in $y \in \cap_{i \neq j} \mathfrak{p}_i \backslash \mathfrak{p}_j$. (Takšen y obstaja, saj bi sicer bil presek $\cap_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$ vsebovan v praidealu $\mathfrak{p}_j$, kar bi pomenilo, da za neki $k \neq j$ velja $\mathfrak{p}_k \subseteq \mathfrak{p}_j$. To pa zaradi minimalnosti idealov ni mogoče.) Tedaj je $xy \in \cap_{i=1}^r \mathfrak{p}_i = \{0\}$ in $y \neq 0$. Torej je x delitelj niča. S tem smo pokazali, da je vsak element unije $\cup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$ delitelj niča. Pokažimo sedaj še obratno inkluzijo. Naj bo x poljuben delitelj niča. Obstaja tak $y \in R \backslash \{0\}$, da velja $xy = 0$. Ker je $\cap_{i=1}^r \mathfrak{p}_i = \{0\}$, obstaja indeks k, da velja $y \notin \mathfrak{p}_k$. Po drugi strani pa $xy = 0 \in \mathfrak{p}_k$. Od tod sledi $x \in \mathfrak{p}_k \subseteq \cup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$, kar smo želeli dokazati.

(b) Po definiciji množice S je $\operatorname{Spec} R_S = \{(\mathfrak{p}_i)_S \mid i = 1, \ldots, r\}$. V posebnem so $(\mathfrak{p}_i)_S$ maksimalni ideali kolobarja R_S. Zato so $R_S/(\mathfrak{p}_i)_S = (R/\mathfrak{p}_i)_{S_i}$ obsegi (tukaj smo s S_i označili sliko multiplikativne množice S v faktorskem kolobarju $R/\mathfrak{p}_i$). Ker so praideali $(\mathfrak{p}_i)_S$ maksimalni, so paroma komaksimalni (to pomeni, da za $i \neq j$ velja $(\mathfrak{p}_i)_S + (\mathfrak{p}_j)_S = R_S$). Uporabimo lahko Kitajski izrek o ostankih, ki nam da epimorfizem

$$R_S \longrightarrow R_S/(\mathfrak{p}_1)_S \times \cdots \times R_S/(\mathfrak{p}_r)_S$$

z jedrom $\cap_{i=1}^r (\mathfrak{p}_i)_S = \{0\}$. Ker je lokalizacija $R_S/(\mathfrak{p}_i)_S = (R/\mathfrak{p}_i)_{S_i}$ obseg, ki vsebuje cel kolobar $R/\mathfrak{p}_i$, je enaka obsegu ulomkov $\operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p}_i)$. Torej obstaja izomorfizem $R_S \longrightarrow \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p}_1) \times \cdots \times \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p}_r)$.

(c) Naj bo Z množica deliteljev niča kolobarja R. Dokazujemo $Z = \bigcup (\operatorname{Spec} R)^{\min}$. Pokažimo najprej inkluzijo ($\subseteq$). Za $0 \neq x \in Z$ obstaja $0 \neq y \in Z$ z lastnostjo $xy = 0$. Torej $xy \in \bigcap (\operatorname{Spec} R)^{\min}$. V posebnem za vsak praideal $\mathfrak{q} \in (\operatorname{Spec} R)^{\min}$ velja $x \in \mathfrak{q}$ ali $y \in \mathfrak{q}$. Ker je kolobar R reduciran in je $y \neq 0$, obstaja tak $\mathfrak{q}$, da je $x \in \mathfrak{q}$.

Za dokaz obratne inkluzije naj bo $y \in \mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec} R)^{\min}$. Denimo, da y ni delitelj niča in definirajmo

$$T := \{y^i x \mid i \in \mathbb{N}, x \in R \setminus \mathfrak{p}\}.$$

Očitno je T multiplikativna množica. Ker je R reduciran in y ni delitelj niča, T ne vsebuje 0. Zato po Zornovi lemi obstaja maksimalen ideal $\mathfrak{q}$, ki ne seka T. Po Krullovi lemi je $\mathfrak{q}$ praideal, ki je očitno vsebovan v $\mathfrak{p}$. Sedaj iz minimalnosti praideala $\mathfrak{p}$ sledi $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. To pa je protislovje, saj $y \in \mathfrak{p}$ in $y \notin \mathfrak{q}$.

(4a) R cel kolobar, $\mathfrak{m} \in (\operatorname{Spec} R)^{max}$.

Kanonična preslikava $R_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Quot} R = R_{R^\times}$

je definirana z $\frac{r}{s} \mapsto \frac{r}{s}$ za

$r \in R$, $s \in R \setminus \mathfrak{m}$.

$\varphi\left(\frac{r}{s}\right) = 0 \iff \frac{r}{s} = \frac{0}{1}$ v $R_{R^\times}$

$\iff \exists t \in R^\times \ t \cdot r = 0$

$\overset{R \text{ cel}}{\iff} r = 0 \iff \frac{r}{s} = 0.$

Torej je φ injektiven.

(b) Denimo, da je $\frac{a}{b} \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in (\operatorname{Spec} R)^{max}} R_{\mathfrak{m}}$

za $a, b \in R^\times$.

Torej za vsak maks. ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$

obstajata $c_{\mathfrak{m}} \in R$ in $d_{\mathfrak{m}} \in R \setminus \mathfrak{m}$ z

lastnostjo $\frac{a}{b} = \frac{c_{\mathfrak{m}}}{d_{\mathfrak{m}}}$. Ker je R cel

kolobar, je to ekvivalentno $a d_{\mathfrak{m}} = b c_{\mathfrak{m}}$,

oziroma $\forall \mathfrak{m} \in (\operatorname{Spec} R)^{max} \ \exists d_{\mathfrak{m}} \in R \setminus \mathfrak{m} : a d_{\mathfrak{m}} \in (b)$.

($\star$) Torej ideal $J := \big((b) : a\big) := \{ s \in R \mid sa \in (b) \}$

seka $R \setminus \mathfrak{m}$ za vsak $\mathfrak{m} \in (\operatorname{Spec} R)^{max}$.

Če je J pravi ideal, torej $J \subsetneq R$,

potem je po Zornovi lemi J vsebovan

v maks. idealu $\mathfrak{m}$. Ampak iz

$J \subseteq \mathfrak{m}$ sledi $J \cap (R \setminus \mathfrak{m}) = \emptyset$,

kar je v nasprotju s ($\star$).

Torej je $J = R$. V posebnem $r \in (s)$,

npr $r = s_1 \cdot s$. Sledi

$$\frac{r}{s} = \frac{s_1 \cdot s}{s} = s_1 \in R,$$

kar smo želeli dokazati.