(1) (a) Indukcija na n. Trditev je očitna za $n=1$. Po indukciji smemo predpostaviti, da $\mathfrak{b}$ ni vsebovan v nobeni manjši uniji idealov $\mathfrak{a}_i$. V posebnem za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ obstaja $x_i \in \mathfrak{b} \setminus \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{a}_j$. Ker je $\mathfrak{b} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, dobimo $x_i \in \mathfrak{a}_i$.

Če je $n=2$, potem $x_1 + x_2 \notin \mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2$, kar je očitno v nasprotju s predpostavkami. Če je $n>2$, lahko BŠS predpostavimo, da je $\mathfrak{a}_1$ praideal. Vendar tedaj $x_1 + x_2 \cdot x_3 \cdots x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, kar je spet protislovje. S tem je trditev dokazana.

(b) Naj bo $k = \mathbb{Z}/(2)$. Trdimo, da je ideal $(x,y) \subseteq \frac{k[x,y]}{(x,y)^2}$ unija treh strogo manjših idealov. Res, saj je

$$(x,y) = (x) \cup (y) \cup (x+y)$$

in vsi trije ideali na desni strani so strogo vsebovani v (x,y). ∎

(2) (a) Denimo, da je vsak praideal $\wp$ končno generiran. Pišimo $\mathfrak{M} := \{\mathfrak{a} \lhd R \mid \mathfrak{a}$ ni končno generiran$\}$. Denimo, da R ni noetherski. Potem $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ in po Zornovi lemi obstaja maksimalni element $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$. Trdimo, da je $\mathfrak{m}$ praideal. Predpostavimo nasprotno. Tedaj obstajata taka elementa $a, b \in R \setminus \mathfrak{m}$, da velja $ab \in \mathfrak{m}$. Ideala $\mathfrak{m} + (a)$ in $\mathfrak{m} + (b)$ strogo vsebujeta ideal $\mathfrak{m}$. Zaradi maksimalnosti ideala $\mathfrak{m}$ sta končno generirana; npr. $\mathfrak{m} + (a) = (m_1 + r_1 a, \ldots, m_n + r_n a)$ in $\mathfrak{m} + (b) = (m_1' + r_1' b, \ldots, m_k' + r_k' b)$ za ustrezne $m_i, m_i' \in R$. Naj bo $\mathfrak{b} := (\mathfrak{m} : a) = \{r \in R \mid ra \in \mathfrak{m}\}$ ideal kolobarja R. Ker $ab \in \mathfrak{m}$, velja $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m} + (b) \subset \mathfrak{b}$. Torej je $\mathfrak{b} = (j_1, \ldots, j_\ell)$ končno generiran ideal. Vzemimo sedaj poljuben $x \in \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m} + (a)$. Obstajajo taki elementi $s_i \in R$, da velja $x = \sum_{i=1}^n s_i(m_i + r_i a) = \sum s_i m_i + a \sum s_i r_i$. V posebnem je $a \sum s_i r_i = x - \sum s_i m_i \in \mathfrak{m}$, torej $\sum s_i r_i \in \mathfrak{b}$. Obstaja zapis $\sum_{i=1}^n s_i r_i = \sum_{i=1}^\ell t_i j_i$ in zato $x = \sum_{i=1}^n s_i m_i + \sum_{i=1}^\ell t_i j_i a$. Torej je ideal $\mathfrak{m}$ generiran z elementi $m_1, \ldots, m_n, j_1 a, \ldots, j_\ell a$, kar je v nasprotju s predpostavkami. Sledi, da je R res noetherski kolobar.

(b) Po točki (a) zadošča dokazati, da je vsak praideal v $R[\![X]\!]$ končno generiran. Naj bo $\wp \subseteq R[\![X]\!]$ poljuben praideal. Definirajmo preslikavo $\phi : R[\![X]\!] \to R$ s predpisom $\sum_{i=0}^\infty a_i X^i \longmapsto a_0$. To je očitno epimorfizem kolobarjev. Ideal $\phi(\wp)$ je končno generiran; označimo njegove generatorje z $r_1, \ldots, r_n$. K vsakemu r_i vzamemo element $f_i \in \wp$, da je koeficient pred X^0 v f_i enak r_i (taki elementi obstajajo po definiciji ϕ). Ločimo dva primera.

($\star$): Denimo, da $X \in \wp$. Vzemimo poljuben $g(X) = \sum_{i=0}^\infty b_i X^i \in \wp$. Obstajajo elementi $s_i \in R$, da velja $b_0 = s_1 r_1 + \cdots + s_n r_n$. Sledi $g(X) - (s_1 r_1 + \cdots + s_n r_n) \in (X)$, torej je $\wp = (r_1, \ldots, r_n, X)$.

($\star\star$): V tem primeru ($X \notin \wp$) bomo dokazali, da $f_1, \ldots, f_n$ generirajo $\wp$. Vzemimo poljuben $f(X) = \sum_{i=0}^\infty a_i X^i \in \wp$. Zapišemo $a_0 = t_{10} r_1 + \cdots + t_{n0} r_n$. Iz definicije elementov f_i sledi $f - \sum_{i=0}^n t_{i0} f_i = X g_1 \in (X)$. Ker $X g_1 \in \wp$ in $X \notin \wp$, velja $g_1 \in \wp$ (saj je $\wp$ praideal kolobarja $R[\![X]\!]$). Analogen postopek ponovimo za g_1 itd. Sledi

$$f = \sum_{j=0}^\infty \left(\sum_{i=1}^n t_{ij} f_i \right) X^j$$

in zato $\wp = (f_1, \ldots, f_n)$. ∎

(3) The mapping $f(X) \to f(0)$ is a homomorphism of $R[X]$ onto R. Hence R is Noetherian. If now $r \in R$, then the chain of ideals $(r) \subseteq (r, rX) \subseteq \cdots \subseteq (r, rX, \cdots, rX^n) \subseteq \cdots$ contains only finitely many distinct ideals. Thus, for some n, $rX^{n+1} \in (r, rX, \cdots, rX^n)$, say

$$(*) \qquad rX^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} f_i(X) \cdot rX^i + \sum_{i=0}^{n} n_i \cdot rX^i,$$

where $f_i(X) = \sum_{j=0}^{m_i} f_j^{(i)} X^j$, $f_j^{(i)} \in R$, and each n_i is an integer. Equating coefficients of X^{n+1} in (*) we have $r = \sum_{i=0}^{n} (f_{n-i}^{(i)} \cdot r) = g \cdot r$ where $g = \sum_{i=0}^{n} f_{n-i}^{(i)} \in R$. We then note that for any elements $r_1, r_2, g_1, g_2 \in R$ such that $r_1 = g_1 r_1$ and $r_2 = g_2 r_2$, we have $r_1 = (g_1 + g_2 - g_1 g_2) r_1$ and $r_2 = (g_1 + g_2 - g_1 g_2) s$. By induction it follows that if $\{r_i\}_{i=1}^{k}$ is a finite set of elements of R then there exists an element $u \in R$ such that $r_i = ur_i$ for $i = 1, \cdots, k$. Since R is Noetherian, there is a finite subset T of R such that T generates R as an ideal of R. If $e \in R$ is such that $et = t$ for each $t \in T$, then it follows that e is an identity of R. ■

(4) (a) Vzemimo poljuben maksimalen ideal $\mathfrak{m}$ kolobarja R (obstaja po Zornovi lemi) in naj bo $\psi : R^m \to R^n$ surjektiven homomorfizem R–modulov. Kolobar $R/\mathfrak{m}$ je obseg in hkrati R–modul. Ker tenzoriranje ohranja surjektivnost homomorfizmov, dobimo surjekcijo $(R/\mathfrak{m}) \otimes_R R^m \to (R/\mathfrak{m}) \otimes_R R^n$. Vendar pa je $(R/\mathfrak{m}) \otimes_R R^m$ kot R–modul izomorfen $R/\mathfrak{m}$–vektorskemu prostoru $(R/\mathfrak{m})^m$. Dobili smo torej $R/\mathfrak{m}$–linearno surjekcijo $(R/\mathfrak{m})^m \to (R/\mathfrak{m})^n$. Sledi $m \geqslant n$, kar je bilo potrebno dokazati.

(b) Dokažimo najprej pomožno trditev. Naj bosta S in T R–modula, kjer je $T \neq \{0\}$. Če obstaja monomorfizem $S \oplus T \to S$, potem S ni noetherski modul.

DOKAZ: Po predpostavkah ima S podmodul $S_1 \oplus T_1$, kjer je $S_1 \cong S$ in $T_1 \cong T$. Sedaj lahko $S \oplus T$ vložimo v S_1. Torej ima S_1 podmodul $S_2 \oplus T_2$, kjer je $S_2 \cong S$ in $T_2 \cong T$. Ta postopek nadaljujemo in dobimo neskončno direktno vsoto $T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots$ v S, kjer je $T_i \cong T \neq 0$. V posebnem S ni noetherski modul. Q.E.D.

Sedaj pa že lahko dokažemo točko (b). Trdimo, da za $m > n$ ne obstaja monomorfizem R–modulov $R^m \to R^n$. Očitno je R^n je noetherski R–modul. Po pomožni trditvi za neničelni modul T ne obstaja monomorfizem $R^n \oplus T \to R^n$. V posebnem ne obstaja monomorfizem $R^m = R^n \oplus R^{m-n} \to R^n$.

(c) Trditev *velja* tudi za kolobarje, ki niso noetherski. Naj bo R poljuben kolobar in $m > n$ naravni števili. Ker je vsak homomorfizem iz R^m v R^n v bistvu $n \times m$ matrika z elementi iz R, je dovolj dokazati, da ima sistem enačb

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (\star)$$

s koeficienti $a_{ij} \in R$ netrivialno rešitev v kolobarju R. Naj bo $R_0 := \mathbb{Z}[\{a_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant m\}] \subseteq R$. Po Hilbertovem Basissatzu je kolobar R_0 noetherski. Po točki (b) ima sistem $(\star)$ netrivialno rešitev v R_0, torej tudi v R. ∎