KOMUTATIVNA ALGEBRA – Rešitev 6. domače naloge

(1) Najprej opazimo, da je kolobar $k[\![X]\!]$ noetherski po "izboljšani" različici Hilbertovega Basissatza iz prve domače naloge. Torej je R noetherski po Basissatzu. Za drugi del naloge bomo potrebovali še eno vrsto kolobarjev; to so formalne Laurentove vrste $k(\!(X)\!)$. To je množica elementov oblike $\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i X^i$, kjer $f_i \in k$ in v katerih nastopa le končno mnogo negativnih potenc X–a. Enote v kolobarju $k[\![X]\!]$ so natanko elementi oblike $g_0 + g_1X + g_2X^2 + \cdots$, kjer $g_0 \in k \setminus \{0\}$ (v to se lahko prepričamo s kratkim računom, kjer induktivno tvorimo inverz takšnega elementa).

Trditev: Če je k obseg, je tudi $k(\!(X)\!)$ obseg.

Dokaz: Vzemimo poljuben $f \in k(\!(X)\!)\setminus\{0\}$. Obstaja natanko en $i \in \mathbb{Z}$, da velja $fX^i = g_0 + g_1X + g_2X^2 + \cdots$, kjer $g_0 \neq 0$. Po zgornjem je $g_0 + g_1X + g_2X^2 + \cdots \in U(k[\![X]\!]) \subseteq U\big(k(\!(X)\!)\big)$. Očitno pa je $X^i \in U\big(k(\!(X)\!)\big)$. Sledi $f \in U\big(k(\!(X)\!)\big)$, kot je bilo potrebno dokazati. Q.E.D.

Definirajmo ideala $\mathfrak{m}_1 := (XY-1)$ in $\mathfrak{m}_2 := (X,Y)$ kolobarja R. Trdimo, da sta to maksimalna ideala. Oglejmo si najprej $\mathfrak{m}_1$. Podajmo preslikavo $\psi : R \to k(\!(X)\!)$ s predpisom $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} b_{ij}X^jY^i \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} b_{ij}X^{j-i}$. To je seveda epimorfizem kolobarjev (dobro definiran je zato, ker je kolobar R v spremenljivki Y polinomski). Kratek račun pokaže, da je $\ker(\psi) = (XY-1) = \mathfrak{m}_1$. Sledi $R/\mathfrak{m}_1 \cong k(\!(X)\!)$. Ker je $k(\!(X)\!)$ obseg, je $\mathfrak{m}_1$ maksimalen ideal. Dokažimo še, da je $\mathfrak{m}_2$ maksimalen ideal. S predpisom $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} b_{ij}X^jY^i \longmapsto b_{00}$ je podan epimorfizem $\varphi : R \to k$. Očitno je $\ker(\varphi) = (X,Y) = \mathfrak{m}_2$. Sledi, da je $\mathfrak{m}_2$ maksimalen ideal.

Ker je R cel kolobar (polinomski kolobar nad celim kolobarjem), je $\{0\} \in \operatorname{Spec} R$. Sledi $0 \subsetneq \mathfrak{m}_1$ in zato $\operatorname{codim} \mathfrak{m}_1 \geqslant 1$. Trdimo, da je $\operatorname{codim} \mathfrak{m}_1 = 1$. Pokazati moramo, da ne obstaja noben $\wp \in \operatorname{Spec} R$ z lastnostjo $\{0\} \subsetneq \wp \subsetneq \mathfrak{m}_1$. Denimo nasprotno in naj bo $\wp$ generiran z $g_1, \ldots, g_r$. Ti elementi so polinomi v spremenljivki Y nad kolobarjem $k[\![X]\!]$. Ker je $\wp \subseteq \mathfrak{m}_1$, za vsak i obstaja $f_i \in R$ z lastnostjo $g_i = (XY-1)f_i \in \wp$. Ker je $\wp$ praideal in $\wp \subsetneq \mathfrak{m}_1$, sledi $f_i \in \wp$ in tako $(f_1, \ldots, f_n) = \wp$. Polinomi f_i so stopnje $\deg g_i - 1$. Ta postopek nadaljujemo, dokler ne dobimo, da je $\wp = (h_1, \ldots, h_n)$ za $h_i \in k[\![X]\!]$. Ker je $\wp$ pravi ideal, za vsak i velja $h_i \in Xk[\![X]\!]$, npr. $h_i = Xe_i$. Ta postopek sedaj nadaljujemo in dobimo, da X^n deli h_i za vsak $n \in \mathbb{N}$, kar je očitno nemogoče. Torej res velja $\operatorname{codim} \mathfrak{m}_1 = 1$.

Ker je $R/(Y) \cong k[\![X]\!]$ cel kolobar, je $(Y) \in \operatorname{Spec} R$. Torej je $\operatorname{codim} \mathfrak{m}_2 \geqslant 2$, saj je $0 \subsetneq (Y) \subsetneq \mathfrak{m}_2$. V posebnem vidimo, da R ni univerzalno veržen. (Z nekoliko dodatnega truda je sicer mogoče dokazati, da velja $\operatorname{codim} R = 2$, vendar to za zahtevano ni potrebno.)

(2a) Preslikava $\varphi : R \twoheadrightarrow k[X_1, \ldots, \widehat{X_{d(i-1)}}, \ldots, \widehat{X_{d(i)}}, \ldots]$, $f \mapsto f(X_1, \ldots, 0, \ldots, 0, \ldots)$, inducira izomorfizem $R/\mathfrak{p}_i \cong k[X_1, \ldots, \widehat{X_{d(i-1)}}, \ldots, \widehat{X_{d(i)}}, \ldots]$. Ker sta ta kolobarja brez deliteljev niča (polinomski kolobar nad obsegom), je $\mathfrak{p}_i$ praideal. Dokažimo, da je U multiplikativna množica. V nasprotnem bi obstajala $a, b \in U$ z lastnostjo $ab \notin U$. Torej obstaja indeks $i \in \mathbb{N}$, da $ab \in \mathfrak{p}_i$. Sledi $a \in \mathfrak{p}_i \subseteq R \setminus U$ ali $b \in \mathfrak{p}_i \subseteq R \setminus U$, kar je očitno protislovje. Praideali kolobarja $U^{-1}R$ so v bijektivni korespondenci s praideali kolobarja R, ki ne sekajo U. Že v prvi domači nalogi smo dokazali, da za poljuben ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ iz $\mathfrak{a} \subseteq \cup_k \mathfrak{p}_k$ sledi, da obstaja ℓ, da je $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_\ell$. Torej so $U^{-1}\mathfrak{p}_i$ natanko maksimalni ideali v $U^{-1}R$.

(2b) Naj bo $\mathfrak{a} \subseteq S$ poljuben ideal in $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ vsi maksimalni ideali, ki vsebujejo $\mathfrak{a}$ (teh je končno, saj je že vsak element vsebovan v kvečjemu končno mnogo maksimalnih idealih). Vzemimo poljuben $0 \neq x_0 \in \mathfrak{a}$ in naj bodo $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_{r+s}$ vsi maksimalni ideali, ki vsebujejo x_0. V posebnem $\mathfrak{m}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{m}_{r+s}$ ne vsebujejo $\mathfrak{a}$. Torej obstajajo $x_j \in \mathfrak{a} \backslash \mathfrak{m}_{r+j}$ za $j = 1, \ldots, s$. Ker so kolobarji $S_{\mathfrak{m}_i}$ noetherski ($i = 1, \ldots, r$), je razširitev ideala $\mathfrak{a}$ v $S_{\mathfrak{m}_i}$ končno generirana. Obstajajo $x_{s+1}, \ldots, x_t \in \mathfrak{a}$, katerih slike v $S_{\mathfrak{m}_i}$ generirajo $S_{\mathfrak{m}_i}\mathfrak{a}$ za $i = 1, \ldots, r$. Definirajmo $\mathfrak{a}' := (x_0, \ldots, x_t) \subseteq \mathfrak{a}$. Trivialno za vsak maksimalni ideal $\mathfrak{m}$ velja $\mathfrak{a}' S_\mathfrak{m} = \mathfrak{a} S_\mathfrak{m}$. Če dokažemo naslednjo lemo, bo takoj sledilo $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$; v posebnem je $\mathfrak{a}$ končno generiran in zato S noetherski kolobar.

Lema: Naj bo A poljuben kolobar in P, Q poljubna A–modula. Tedaj velja

$$P = Q \iff P_\mathfrak{m} = Q_\mathfrak{m} \quad \forall\, \mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} A^{\max}.$$

Dokaz: Implikacija v desno je trivialna. Pokažimo še obrat. Računajmo:

$$\left(\frac{P+Q}{Q}\right)_\mathfrak{m} = \frac{P_\mathfrak{m} + Q_\mathfrak{m}}{Q_\mathfrak{m}} = 0.$$

Iz te vrstice sledi $\frac{P+Q}{Q} = 0$ in s tem $P \subseteq Q$. Zaradi simetrije mora biti $P = Q$. Q.E.D.

(2c) Ker velja

$$U^{-1}\mathfrak{p}_i \supsetneq U^{-1}(x_{d(i-1)+1}, \ldots, x_{d(i)}) \supsetneq \cdots \supsetneq U^{-1}(x_{d(i)}) \supsetneq 0$$

(členi te verige so praideali po točki (a)) in $d(i+1) - d(i) \xrightarrow{i \to \infty} \infty$, je $\dim U^{-1}R = \infty$. Dejstvo, da vsak element kolobarja $U^{-1}R$ leži v končno mnogo maksimalnih idealih, je posledica karakterizacije $\operatorname{Spec}(U^{-1}R)^{\max}$ in dejstva, da vsak element kolobarja R leži v kvečjemu končno mnogo praidealih $\mathfrak{p}_i$. Da bomo izpolnili pogoje izreka iz točke (b), moramo preveriti, da je vsaka lokalizacija $U^{-1}R_{U^{-1}\mathfrak{p}_i}$ noetherski kolobar. Vendar $U^{-1}R_{U^{-1}\mathfrak{p}_i} \cong R_{\mathfrak{p}_i}$. Naj bo $R_i := k\big(\{x_\nu \mid \nu < d(i-1) \ \vee \ \nu > d(i)\}\big)$ obseg racionalnih funkcij. Tedaj je $R_{\mathfrak{p}_i} \cong R_i[X_{d(i-1)}, \ldots, X_{d(i)}]_{(X_{d(i-1)}, \ldots, X_{d(i)})}$. Po Hilbertovem Basissatzu je kolobar $R_i[X_{d(i-1)}, \ldots, X_{d(i)}]$ noetherski. Vsak ideal v lokalizaciji nekega kolobarja je ekstenzija (razširitev) ideala iz kolobarja. Če je začetni kolobar noetherski, je vsak ideal končno generiran in zato enako velja tudi za njegovo razširitev v lokalizaciji. Torej je lokalizacija noetherskega kolobarja tudi noetherski kolobar. Sedaj uporabimo izrek (b) in dobimo, da je $U^{-1}R$ noetherski kolobar.

(3a) Trivialna posledica definicije.

(3b) Denimo, da so elementi $a_1 + \mathfrak{a}, \ldots, a_n + \mathfrak{a} \in R/\mathfrak{a}$ algebraično neodvisni. Torej za vsak polinom $0 \neq p \in k[X_1, \ldots, X_n]$ velja $p(a_1 + \mathfrak{a}, \ldots, a_n + \mathfrak{a}) = p(a_1, \ldots, a_n) + \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$. V posebnem je $p(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, kar pomeni, da so $a_1, \ldots, a_n \in R$ algebraično neodvisni.

(3c) Dokaz te točke je povsem analogen dokazu prejšnje točke. Rešimo se imenovalcev in upoštevamo definicijo algebre $S^{-1}R$.

(3d) Dokažimo najprej $\leqslant$. Vzemimo algebraično neodvisne $a_1, \ldots, a_n \in R$. Naj bo $S := \{p(a_1, \ldots, a_n) \mid 0 \neq p \in k[X_1, \ldots, X_n]\}$. Očitno je $S \subseteq R$ multiplikativna množica. Izberimo poljuben ideal $\mathfrak{p} \subseteq R$, ki je maksimalen med vsemi ideali, ki ne sekajo množice S. Tedaj je $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Iz definicije množice S vidimo, da so elementi $a_1 + \mathfrak{p}, \ldots, a_n + \mathfrak{p} \in \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p})$ algebraično neodvisni. Torej je $\operatorname{Trdeg}\big(\operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p})\big) \geqslant n$.

Za dokaz obratne inkluzije privzemimo, da so za nek praideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ elementi $\frac{a_1+\mathfrak{p}}{b_1+\mathfrak{p}}, \ldots, \frac{a_n+\mathfrak{p}}{b_n+\mathfrak{p}} \in \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p})$ algebraično neodvisni. Enostavno je videti, da so tedaj tudi elementi $a_1 b_2 \cdots b_n + \mathfrak{p}, \ldots, a_n b_1 \cdots b_{n-1} + \mathfrak{p} \in \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p})$ algebraično neodvisni. Torej za vsak polinom $0 \neq p \in k[X_1, \ldots, X_n]$ velja $p(a_1 b_2 \cdots b_n + \mathfrak{p}, \ldots, a_n b_1 \cdots b_{n-1} + \mathfrak{p}) = p(a_1 b_2 \cdots b_n, \ldots, a_n b_1 \cdots b_{n-1}) + \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}$. V posebnem so elementi $a_1 b_2 \cdots b_n$, $b_1 a_2 b_3 \cdots b_n$, $\ldots$, $a_n b_1 \cdots b_{n-1} \in R$ algebraično neodvisni.

(3e) Vzemimo poljuben $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ in $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \in (\operatorname{Spec} R)^{\min}$. Obstaja vložitev celih kolobarjev $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow R/\mathfrak{q}$, ki porodi vložitev $\operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p}) \hookrightarrow \operatorname{Quot}(R/\mathfrak{q})$. Torej po točki (a) velja $\operatorname{Trdeg}\big(\operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p})|k\big) \leqslant \operatorname{Trdeg}\big(\operatorname{Quot}(R/\mathfrak{q})|k\big)$. Trditev sedaj sledi iz točke (d).

(3f) Uporabili bomo točko (e). Naj bo $\mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec} S)^{\min}$ in $\mathfrak{q} := \mathfrak{p} \cap R \in \operatorname{Spec} R$. Obstaja kanonična vložitev $R/\mathfrak{q} \hookrightarrow S/\mathfrak{p}$. Ker je S celostna razširitev algebre R, je tudi ta vložitev celostna razširitev. V posebnem je $\operatorname{Quot}(R/\mathfrak{q}) \hookrightarrow \operatorname{Quot}(S/\mathfrak{p})$ algebraična razširitev obsegov. Torej je $\operatorname{Trdeg}\big(\operatorname{Quot}(R/\mathfrak{q})|k\big) = \operatorname{Trdeg}\big(\operatorname{Quot}(S/\mathfrak{p})|k\big)$. Trditev sedaj sledi z uporabo prejšnje točke.

(3g) Po Noetherski normalizaciji obstajajo takšni algebraično neodvisni elementi $y_1, \ldots, y_d \in R$, da je R celostna razširitev polinomske algebre $S := k[y_1, \ldots, y_d]$. Ker je $\dim R = \dim S = d = \operatorname{Trdeg} S = \operatorname{Trdeg} R$, je trditev s tem dokazana.

(3h) Vzemimo verigo praidealov $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ algebre R. Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ izberimo $a_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}_{i-1}$. Izberimo še $b \in R \setminus \mathfrak{p}_n$. Označimo z B podalgebro algebre R, ki jo generirajo $a_1, \ldots, a_n, b$. Praideali $\mathfrak{q}_i := \mathfrak{p}_i \cap B$ tvorijo verigo praidealov algebre R, ki je enake dolžine kot originalna veriga. To verigo dopolnimo do maksimalne verige praidealov (ki je končna, saj je B afina k–algebra) $\mathfrak{r}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{r}_\ell \subsetneq B$. Iz že dokazanega sledi, da zadošča dokazati $\operatorname{Trdeg} B \geqslant n$. Uporabimo Noethersko normalizacija. Ta pravi, da obstajajo algebraično neodvisni elementi $c_1, \ldots, c_\ell \in B$, za katere je B celostna razširitev polinomske algebre $B' := k[c_1, \ldots, c_\ell]$. Sledi $\operatorname{Trdeg} B \geqslant \operatorname{Trdeg} B' \geqslant \ell \geqslant n$, kar smo želeli dokazati.

(3i) Točka (a) trditve ne velja za Krullovo dimenzijo. Če je R celostno polje z $\dim R > 0$, potem je $R \subseteq \operatorname{Quot}(R)$, vendar $\dim R \nleqslant \dim \operatorname{Quot}(R)$.

(3j) Podobno kot v točki (i) naj bo R celostno polje s $\operatorname{Trdeg} R > 0$ in $K := \operatorname{Quot}(R)$. Potem je $\dim K = 0$ in $\operatorname{Trdeg} K \geqslant \operatorname{Trdeg} R > 0$.