PRIMERI IZPITNIH VPRAŠANJ IZ MATEMATIKE 1 ZA TEKSTILCE-UNI

JAKA CIMPRIČ, OKTOBER 2004

Izpit sestavlja 4-5 vprašanj. Vsako ima več podvprašanj.

1. Številska zaporedja in vrste

1.1. Realna števila.

(1) (Definicija realnih števil)
  (a) Naštej aksiome obsega.
  (b) Naštej lastnosti relacije urejenosti.
  (c) Kaj pravi Dedekindov aksiom?
  (d) Definiraj različne vrste intervalov in jih grafično pojasni.

(2) (Omejene množice) Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$.
  (a) Kaj je gornja meja množice A?
  (b) Kaj je supremum množice A?
  (c) Kaj je maksimum množice A?
  (d) Na primeru razloži, v čem je razlika med maksimumom in supremumom.

(3) (Decimalni zapis)
  (a) Grafično pojasni, kako realnemu številu priredimo njegov decimalni zapis.
  (b) Kako iz decimalnega zapisa dobimo pripadajoče realno število? Pojasni z vrstami.
  (c) Dokaži, da vsakemu racionalnemu številu pripada periodičen decimalni zapis.
  (d) Na primeru pojasni, kako iz periodičnega decimalnega zapisa dobimo pripadajoče racionalno število.

(4) (Absolutna vrednost)
  (a) Kaj je absolutna vrednost realnega števila?
  (b) Naštej nekaj znanih identitet in neenakosti, v katerih nastopa absolutna vrednost.
  (c) Kako definiramo odprti interval (a, b) in zaprti interval $[a, b]$ s pomočjo absolutne vrednosti?
  (d) Reši neenačbo : $|5 - \frac{2}{x}| < 1$.

1.2. Številska zaporedja.

(1) (Stekališča in limite)
  (a) Kaj je zaporedje realnih števil?
  (b) Kaj je stekališče zaporedja?
  (c) Kaj je limita zaporedja?
  (d) Na primerih pojasni, v čem je razlika med stekališčem in limito.

(2) (Omejena in monotona zaporedja)
  (a) Kaj pomeni, da je zaporedje omejeno? Kaj je supremum (infimum) omejenega zaporedja?
  (b) Kaj vemo o stekališčih omejenega zaporedja?
  (c) Kaj pomeni, da je zaporedje monotono?
  (d) Kaj vemo o stekališčih monotonih zapredij?

(3) (Podzaporedje)
  (a) Kaj je podzaporedje danega zaporedja? Povej tudi primer.
  (b) Dokaži, da je podzaporedje konvergentnega zaporedja vedno konvergentno. V kakšni zvezi sta limiti obeh zapredij.
  (c) Kakšna je zveza med stekališči danega zaporedja in limitami njegovih podzaporedij. Napiši izrek in ga razloži na konkretnem primeru.

(4) (Rekurzivna zaporedja)
  (a) Kako podamo zapredje z rekurzivno formulo? Koliko začetnih členov potrebujemo?
  (b) Nariši graf zaporedja $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$!
  (c) Dokaži, da gornje zaporedje konvergira proti $\sqrt{2}$!

1.3. Številske vrste.

(1) (Vsota vrste)
  (a) Kaj je zaporedje delnih vsot dane vrste?
  (b) Kaj je vsota dane vrste?
  (c) Napiši en primer konvergentne in en primer divergentne vrste. Odgovor dobro utemelji.

(2) (Cauchyjev kriterij)
  (a) Kaj pravi Cauchyjev kriterij za konvergenco vrst?
  (b) Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, potem je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokaži!
  (c) Poišči tako vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, vendar vrsta divergira. Odgovor dobro utemelji.

(3) (Absolutno konvergentne vrste)
  (a) Kaj je absolutno konvergentna vrsta?
  (b) S pomočjo Cauchyjevega kriterija pokaži, da je vsaka absolutno konvergentna vrsta tudi konvergentna.
  (c) Poišči primer vrste, ki je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna. Odgovor dobro utemelji.

(4) (Konvergenčni kriteriji za vrste)
  (a) Kaj pravi primerjalni kriterij za konvergenco vrst?
  (b) Kaj pravi kvocientni kriterij? Izpelji ga iz primerjalnega.
  (c) Kaj pravi korenski kriterij? Izpelji ga iz primerjalnega.

  Loči primer vrste s pozitivnimi členi od splošnega primera.

(5) (Alternirajoče vrste).
  (a) Kaj je alternirajoča vrsta? Podaj tudi primer.
  (b) Kaj pravi Leibnitzev konvergenñi kriterij?
  (c) Poišči primer alternirajoče vrste, ki je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna.

2. Realne funkcije ene realne spremenljivke

2.1. Pojem funkcije, primeri.

(1) (Definicija realne funkcije ene realne spremenljivke)
   (a) Definiraj pojem delne funkcije iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$! (Opomba: V nadaljevanju bomo besedo *delna* izpuščali.)
   (b) Kaj je graf funkcije? Kdaj je dana krivulja graf neke funkcije?
   (c) Kaj je definicijsko območje funkcije? Kako ga določimo iz grafa?
   (d) Kaj je zaloga vrednosti funkcije? Kako jo določimo iz grafa?

(2) (Inverz funkcije)
   (a) Za kakšne funkcije f obstaja inverz f^{-1}?
   (b) Kako je inverz funkcije definiran, se pravi kaj je njegovo definicijsko območje, zaloga vrednosti in predpis?
   (c) Kako iz grafa funkcije f ugotovimo, ali ima inverz? Kako iz grafa funkcije f dobimo graf funkcije f^{-1}.
   (d) Poišči inverz funkcije $y = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$.

(3) (Elementarne funkcije)
   (a) Kaj so osnovni tipi elementarnih funkcij?
   (b) Kako definiramo vsoto, produkt in kompozitum dveh funkcij? Kaj je elementarna funkcija?
   (c) Povej primer elementarne funkcije, ki ni osnovnega tipa. Povej primer funkcije, ki ni elementarna.
   (d) Kaj veš o zveznosti in odvedljivosti elementarnih funkcij?

(4) (Lagrangeov interpolacijski polinom)
   (a) Določi linearno funkcijo, ki gre skozi dani točki (x_0, y_0) in (x_1, y_1)!
   (b) Določi kvadratno funkcijo, ki gre skozi dane točke (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)!
   (c) Določi polinom stopnje n, ki gre skozi točke $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$!

(5) (Eksponentna funkcija in logaritem)
   (a) Nariši grafa funkcij $y = e^x$ in $y = \ln(x)$. Pri obeh določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.
   (b) Nariši graf funkcije $y = 1 - e^{-x}$.
   (c) Nariši grafa funkcij $y = e^{\ln x}$ in $y = \ln(e^x)$. Pri obeh določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.
   (d) Kaj je inverzna funkcija funkcije $y = a^x$? Izrazi jo z ln.

(6) (Trigonometrične in ciklometrične funkcije)
   (a) Izpelji adicijska izreka za $\sin(x)$ in $\cos(x)$.
   (b) Kako faktoriziramo vsoto $\sin(x) + \sin(y)$? Kako antifaktoriziramo produkt $\sin(x)\cos(y)$?
   (c) Kako sta definirani funkciji $\arcsin x$ in $\arccos x$? Nariši njuna grafa, ter grafa funkcij $\sin(\arcsin(x))$ in $\arcsin(\sin(x))$.
   (d) Dokaži, da velja $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ za vsak $x \in [-1, 1]$.

(7) (Hiperbolične in area funkcije)
   (a) Definiraj funkciji $y = \mathrm{sh}(x)$ in $y = \mathrm{ch}(x)$, skiciraj njuna grafa ter določi njuno definicijsko območje in zalogo vrednosti.
   (b) Izpelji adicijska izreka za $\mathrm{sh}(x)$ in $\mathrm{ch}(x)$.
   (c) Definiraj funkciji $y = \mathrm{arsh}(x)$ in $y = \mathrm{arch}(x)$, skiciraj njuna grafa ter določi njuno definicijsko območje in zalogo vrednosti.
   (d) Izrazi funkciji $y = \mathrm{arsh}(x)$ in $y = \mathrm{arch}(x)$ z naravnim logaritmom.

2.2. **Limita funkcije.**

(1) (Definicija limite)

(a) Kako definiramo limito funkcije s pomočjo ϵ in δ?
(b) Kako definiramo limito funkcije s pomočjo zaporedij?
(c) Razloži gornji definiciji geometrijsko.

(2) (Limite in neenakosti)
(a) Naj bosta $f(x)$ in $g(x)$ taki funkciji, da velja $f(x) \leq g(x)$ za vsak x blizu a. V kakšni zvezi sta potem limiti teh funkcij v točki a. Odgovor utemelji.
(b) Dokaži, da za vsak neničeln $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ velja
$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x.$$
(c) S pomočjo gornjih točk dokaži, da je
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(3) (Neskončne limite in limite v neskončnosti)
(a) Kaj pomeni, da je limita funkcije v končni točki neskončna? Napiši definicijo!
(b) Kakšna je zveza med neskončnimi limitami v končnih točkah in vertikalnimi asimptotami?
(c) Kaj pomeni, da je limita funkcije v neskončni točki končna? Napiši definicijo!
(d) Kakšna je zveza med končnimi limitami v neskončnih točkah in horizontalnimi asimptotami?

(4) (Definicija števila e)
(a) Kako je definirano število e?
(b) Koliko je $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$?
(c) Izračunaj $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$.
(d) Izračunaj $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

(5) (Substitucija v limiti)
(a) Izračunaj limito $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ s pomočjo substitucije $t = 2x$.
(b) Naj bo $\phi(t)$ taka funkcija, ki zadošca $\lim_{t\to b} \phi(t) = a$ in $\phi(t) \neq a$ za vsak $t \neq b$. Dokaži, da velja $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{t\to b} f(\phi(t))$.
(c) S primerom pokaži, da gornja trditev ne drži nujno, če je $\phi(t)$ konstantna funkcija a.

2.3. Zveznost funkcij.

(1) (Definicija zveznosti) Kako definiramo zveznost funkcije v točki
(a) s pomočjo limite,
(b) s pomočjo ϵ in δ,
(c) s pomočjo limit zaporedij?

(2) (Operacije z zveznimi funkcijami in limitami)
(a) Kako sta definirani vsota in produkt funkcij.
(b) Dokaži, da je limita vsote enaka vsoti limit. Podobno za produkte.
(c) Dokaži, da je vsota zveznih funkcij zvezna funkcija. Podobno za produkte.

(3) (Leve in desne limite, zveznost in odvodi) Dana je funkcija
$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \\ b, & x = a \\ h(x), & x > a \end{cases}$$

(a) Kako sta definirani leva limita funkcije $g(x)$ v a in desna limita funkcije $h(x)$ v a. Kdaj obstaja limita funkcije $f(x)$ v a?
(b) Kako definiramo levo zveznost funkcije $g(x)$ v a in desno zveznost funkcije $h(x)$ v a. Kdaj je funkcija $f(x)$ zvezna v a?
(c) Kako definiramo levi odvod funkcije $g(x)$ v a in desni odvod funkcije $h(x)$ v a. Kdaj je funkcija $f(x)$ odvedljiva v a?

(4) (Kompozitum zveznih funkcij)
(a) Natančno formuliraj izrek, da je kompozitum zveznih funkcij zvezna funkcija, in ga dokaži.
(b) Naj bo $\lim_{x\to a} f(x) = b$ in naj bo $g(x)$ zvezna v točki b. Dokaži, da velja $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$.
(c) S pomočjo gornjega izreka izračunaj $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{4/3}$.

(5) (Metoda bisekcije)
(a) Kaj pomeni, da ima funkcija $f(x)$ ničlo na intervalu $[a, b]$?
(b) Kdaj ima zvezna funkcija zagotovo ničlo na intervalu $[a, b]$?
(c) Opiši metodo bisekcije.
(d) Poišči približek za ničlo enačbe $x^3 + x - 1 = 0$ na intervalu $[0, 1]$ s pomočjo treh korakov bisekcije.

(6) (Zvezne funkcije na zaprtem in omejenem intervalu) Natančno formuliraj naslednje lastnosti zvezne funkcije na zaprtem in omejenem intervalu:
(a) omejenost in obstoj ekstremov,
(b) katere vrednosti zavzame,
(c) kdaj je njen inverz zagotovo zvezna funkcija.

3. Odvod

3.1. **Definicija in računanje.**

(1) (Definicija odvoda)
(a) Kako je definiran odvod funkcije v točki?
(b) Dokaži, da iz odvedljivosti sledi zveznost.
(c) S primerom pokaži, da funkcija, ki je zvezna v neki točki, ni nujno tudi odvedljiva v tej točki.

(2) (Pravila za odvajanje)
(a) Formuliraj pravili za odvajanje vsote in razlike. Enega dokaži!
(b) Formuliraj pravili za odvajanje produkta in inverza. Enega dokaži!
(c) Napiši pravili za odvajanje kompozituma in inverzne funkcije. Enega dokaži!

(3) (L'Hospitalovo pravilo)
(a) Formuliraj L'Hospitalovo pravilo za računanje limit!
(b) Dokaži L'Hospitalovo pravilo v primeru $\frac{0}{0}$!
(c) Uporabi L'Hospitalovo pravilo na konkretnem primeru!

3.2. **Sekante in tangente.**

(1) (Geometrijski in fizikalni pomen odvoda)
(a) Kako izračunamo povprečno hitrost?
(b) Kako izračunamo trenutno hitrost?
(c) Kako se glasi enačba sekante?
(d) Kako se glasi enačba tangente?

(2) (Sekantna in tangentna metoda)

   (a) Definiraj pojem ničle funkcije!
   (b) Kako poiščemo ničlo funkcije s sekantno metodo?
   (c) Kako poiščemo ničlo funkcije s tangentno metodo?
(3) (Diferencial)
   (a) Kaj je diferencial funkcije?
   (b) Kaj je geometrijski pomen diferenciala?
   (c) Kako uporabimo diferencial za računanje približnih vrednosti funkcij? Razloži na primeru!

3.3. **Načrtovanje grafov funkcij.**

(1) (Rolleov in Lagrangeov izrek)
   (a) Formuliraj Rolleov izrek.
   (b) Formuliraj Lagrangeov izrek in ga izpelji iz Rolleovega izreka.
   (c) Naj bo $f(x)$ taka funkcija, da je $f'(x) \geq 0$ za vsak x. Dokaži, da je $f(x)$ naraščajoča.
   (d) Funkcija $f(x) = -\frac{1}{x}$ zadošča $f'(x) \geq 0$ za vsak x, vendar ni naraščajoča, ker $f(-1) > f(1)$. V čem je problem?
(2) (Lokalni ekstremi)
   (a) Kaj je lokalni ekstrem funkcije?
   (b) Formuliraj potrebni pogoj za nastop ekstrema.
   (c) Formuliraj zadostni pogoj za nastop ekstrema s prvim odvodom.
   (d) Formuliraj zadostni pogoj za nastop ekstrema z drugim odvodom.
(3) (Globalni ekstremi)
   (a) Kaj je globalni ekstrem funkcije?
   (b) Kaj so kandidati za globalni ekstrem?
   (c) Določi globalne ekstrem funkcije $f(x) = |\sin x|$ na intervalu $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.
(4) (Konveksnost, konkavnost, prevoji)
   (a) Kaj je definicija konveksne in konkavne funkcije?
   (b) Kako določimo konveksnost in konkavnost z drugom odvodom?
   (c) Kaj je definicija prevoja?
   (d) Kako določimo prevoje s pomočjo drugega odvoda?

3.4. **Taylorjeve vrste.**

(1) (Konvergenčni radij)
   (a) Kaj je definicija potenčne vrste?
   (b) Kaj je definicija konvergenčnega radija potenčne vrste?
   (c) Kako izračunamo konvergenčni radij s pomočjo kvocientnega ali korenskega kriterija?
   (d) Določi konvergenčni radij vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.
(2) (Taylorjeva vrsta)
   (a) Kako je definirana Taylorjeva vrsta funkcije $f(x)$ v točki a?
   (b) Razvij funkcije $e^x, \cos x$ in $\sin x$ v Taylorjevo vrsto okrog $x = 0$.
   (c) Razvij funkcije $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1-x)$ in $\frac{1}{(1-x)^2}$ v Taylorjevo vrsto okrog $x = 0$.
   (d) Kaj je ostanek Taylorjeve vrste? Kako ga ocenimo?
(3) (Uporaba Taylorjeve vrste)
   (a) Naj bo $s(t)$ lega delca v trenutku t. Pojasni fizikalni pomen prvih treh členov Taylorjeve vrste za $s(t)$ okrog $t = t_0$.
   (b) Kako nam pomaga Taylorjeva vrsta pri določanju lokalnih ekstremov? Pojasni na primeru!

(c) Kako nam pomaga Taylorjeva vrsta pri računanju limit? Pojasni na primeru!

4. Integral

4.1. Nedoločeni integral.

(1) (Definicija, obstoj, enoličnost nedoločenega integrala)
 (a) Kako je definiran nedoločeni integral funkcije?
 (b) Kaj vemo o enoličnosti nedoločenega integrala?
 (c) Kaj vemo o obstoju nedoločenega integrala?

(2) (Integracija po delih)
 (a) Kaj pravi pravilo za odvajanje produkta?
 (b) Povej pravilo za integracijo po delih za nedoločeni integral in ga izpelji.
 (c) Povej pravilo za integracijo po delih za določeni integral in ga izpelji.

(3) (Integracija s substitucijo)
 (a) Kaj pravi pravilo za odvajanje posredne funkcije?
 (b) Povej pravilo za substitucijo v nedoločenem integralu in ga izpelji.
 (c) Povej pravilo za substitucijo v določenem integralu in ga izpelji.

(4) (Osnovni tipi nedoločenih integralov) Naj bo $R(x)$ racionalna funkcija.
 (a) Kako izračunamo $\int R(x)dx$?
 (b) Kako izračunamo $\int R(e^x)dx$?
 (c) Kako izračunamo $\int R(\cos x)\sin x dx$ in $\int R(\sin x)\cos x dx$?

4.2. Določeni integrali.

(1) (Definicija določenega integrala)
 (a) Kaj je delitev intervala? Kaj je premer delitve?
 (b) Kako dani delitvi in dani izbiri točk priredimo Riemannovo vsoto?
 (c) Kako je definiran Riemannov integral?

(2) (Približno računanje določenega integrala)
 (a) Razloži geometrijski pomen določenega integrala.
 (b) Kako izračunamo približek za $\int_a^b f(x)dx$ s pomočjo Riemannovih vsot?
 (c) Kako izračunamo približek za $\int_a^b f(x)dx$ s pomočjo trapezne metode?

(3) (Povprečje)
 (a) Kako je definirano povprečje funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$?
 (b) Kaj pravi izrek o povprečni vrednosti?
 (c) Kaj je geometrijska interpretacija izreka o povprečni vrednosti?

(4) (Osnovni izrek infinitezimalnega računa) Naj bo funkcija $f(x)$ zvezna na intrvalu $[a, b]$ in $F(x) = \int_a^x f(x)dx$.
 (a) Dokaži, da je funkcija $F(x)$ zvezna na $[a, b]$.
 (b) Dokaži, da je funkcija $F(x)$ odvedljiva na (a, b) in da je $F'(x) = f(x)$.
 (c) Kaj pravi Leibnitzovo pravilo?
 (d) Kaj pravi osnovni izrek infinitezimalnega računa?

4.3. Uporaba določenega integrala.

(1) (Gama funkcija)
 (a) Kako je definirana funkcija $\Gamma(x)$?
 (b) Dokaži, da je $\Gamma(1) = 1$.
 (c) Dokaži, da je $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$ za vsako naravno število n.
 (d) Dokaži, da je $\Gamma(n) = (n - 1)!$ za vsako naravno število n.

(2) (Volumen vrtenine)
   (a) Kako izračunamo volumen vrtenine z metodo prerezov?
   (b) Kako izračunamo volumen vrtenine z metodo lupin?
   (c) Kako izračunamo težišče prereza?
   (d) Kaj pravi prvo Pappusovo pravilo?

(3) (Dolžina krivulje in površina vrtenine)
   (a) Kako izračunamo dolžino krivulje $y = f(x), a \leq x \leq b$?
   (b) Kako izračunamo površino vrtenine?
   (c) Kako izračunamo težišče krivulje?
   (d) Kaj pravi drugo Pappusovo pravilo?

5. Linearna algebra

5.1. Vektorski račun.

(1) (Obsegi)
   (a) Povej nekaj primerov obsegov.
   (b) Naštej aksiome o seštevanju v obsegu.
   (c) Naštej aksiome o množenju v obsegu.
   (d) Naštej aksiome, ki povezujejo seštevanje in množenje v obsegu.

(2) (Vektorski prostori in podprostori)
   (a) Definiraj pojem vektorskega prostora!
   (b) Naštej nekaj primerov vektorskih prostorov!
   (c) Definiraj pojem vektorskega podprostora.
   (d) Določi najmanjši vektorski podprostor prostora V, ki vsebuje dane vektorje $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$.

(3) (Linearno neodvisni vektorji) Naj F obseg in $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorji v F^n.
   (a) Kako računsko preverimo ali so ti vektorji linearno neodvisni?
   (b) Dokaži, da iz linearne neodvisnosti sledi $k \leq n$.
   (c) Kako te vektorje dopolnimo do baze prostora F^n?

(4) (Razpenjajoči vektorji) Naj bodo $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorji v F^n (F je obseg).
   (a) Kako računsko preverimo ali ti vektorji razpenjajo (=generirajo) F^n?
   (b) Dokaži, da za razpenjajoče vektorje velja $k \geq n$.
   (c) Kako iz razpenjajočih vektorjev izberemo bazo prostora F^n?

(5) (Baza in dimenzija) Naj bodo in $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorji v F^n (F je obseg).
   (a) Kako računsko preverimo ali ti vektorji tvorijo bazo prostora F^n?
   (b) Dokaži, da ima poljubna baza prostora F^n natanko n elementov!
   (c) Kako množico linearno neodvisnih vektorjev v F^n dopolnimo do baze F^n?
   (d) Kako iz množice razpenjajočih vektorjev v F^n izberemo bazo prostora F^n?

5.2. Matrični račun.

(1) (Pravokotne matrike)
   (a) Kako je definirano seštevanje matrik in kako množenje s skalarjem? Naštej osnovne lastnosti teh dveh operacij. (Omeni tudi ničelne matrike!)
   (b) Kako je definirano množenje matrik? Kdaj je definicija smiselna? Naštej osnovne lastnosti množenja! (Omeni tudi identične matrike!)

   (c) Kako je definirano transponiranje matrik? Naštej osnovne lastnosti transponiranja.
(2) (Gaussova eliminacija)
   (a) Kako sistem linearnih enab̆ zapišemo v matrični obliki? Kaj je razširjena matrika sistema?
   (b) Kaj je reducirana vrstična kanonična forma?
   (c) Kako linearen sistem prevedemo v reducirano vrstično kanonično formo?
   (d) Kako rešimo sistem, ki je v reducirani vrstični kanonični formi?
(3) (Elementarne matrike)
   (a) Kako zmnožimo dve matriki?
   (b) Definiraj elementarne matrike?
   (c) Kakšna je zveza med matrikama A in EA, kjer je E elementarna matrika?
   (d) Kakšna je zveza med matrikama A in AE, kjer je E elementarna matrika?
(4) (Inverz matrike)
   (a) Kako je definiran inverz obrnljive matrike? Dokaži, da je inverz enolično določen!
   (b) Dokaži, da je produkt obrnljivih matrik obrnljiva matrika! Kako izračunamo inverz produkta dveh matrik?
   (c) Izračunaj inverze vseh treh tipov elementarnih matrik!
   (d) Kako izračunamo inverz ornljive matrike s pomočjo Gaussove eliminacije?
(5) (Determinante)
   (a) Kako izračunamo determinanto z razvojem po i-ti vrstici oziroma j-tem stolpcu.
   (b) Formuliraj Cramerovo pravilo in ga dokaži.
   (c) Kako se glasi formula za inverz matrike?
(6) (Metoda najmanjših kvadratov)
   (a) Kako je definirana rešitev protislovnega sistema po metodi najmanjših kvadratov?
   (b) Kako rešimo protisloven sistem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ po metodi najmanjših kvadratov.
   (c) Kako določimo premico, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$?
   (d) Kako določimo kvadratno parabolo, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$?

5.3. **Analitična geometrija.**
(1) (Produkti vektorjev iz $\mathbb{R}^3$)
   (a) Kako je definiran skalarni produkt dveh vektorjev? Kdaj je enak 0?
   (b) Kako je definiran vektorski produkt dveh vektorjev? Kdaj je enak 0?
   (c) Kako je definiran mešani produkt treh vektorjev? Kdaj je enak 0?
(2) (Premice v $\mathbb{R}^3$)
   (a) Premica je podana s dvema točkama $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$. Določi parametrično in normalno enačbo te premice.
   (b) Pojasni, kako izračunamo oddaljenost točke T od te premice.
   (c) Pojasni, kako določimo projekcijo točke T na to premico.
(3) (Ravnine v $\mathbb{R}^3$)

(a) Ravnina je podana s tremi točkami $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Določi parametrično in normalno enačbo te ravnine.
(b) Pojasni, kako izračunamo oddaljenost točke T od te ravnine.
(c) Pojasni, kako določimo projekcijo točke T na to ravnino.