Rešitve druge teoretične domače naloge iz matematike
(november 2008)

(1) (a) Odvod funkcije f v točki $x \in D(f)$ je enak limiti diferenčnega kvocienta funkcije, kadar ta limita obstaja in je enolična: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

(b) Naj bo funkcija f odvedljiva v točki x_0. Računamo
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \left(f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)$.
Po definiciji limite funkcije to pomeni, da je f zvezna v točki x_0.
Obratno ne velja, saj je funkcija $f(x) = |x|$ zvezna v točki 0, ni pa odvedljiva v 0.

(c) Osnovna pravila za odvajanje vsote, razlike, produkta, kvocienta in kompozituma funkcij f in g ter inverzne funkcije f^{-1}: $(f\pm g)' = f'\pm g'$, $(f\cdot g)' = f'g + g'f$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$, $(g\circ f)' = (g'\circ f)\cdot f'$, $(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$. Pokažemo, da so odvodi osnovnih elementarnih funkcij elementarne funkcije. Iz zapisanih pravil sledi, da so odvodi vseh elementarnih funkcij elementarne funkcije.

(d) Za $x \neq 0$ odvajamo po pravilih za odvajanje: $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2(\cos\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Pri $x = 0$ izračunamo odvod po definiciji: $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$, saj so vrednosti sinusa omejene med -1 in 1, h pa limitira proti 0.

(2) (a) Rolleov izrek: Če je funkcija f definirana in zvezna na intervalu $[a,b]$ in odvedljiva na (a,b) in če velja $f(a) = f(b)$, potem obstaja točka $c \in (a,b)$, v kateri je $f'(c) = 0$. Če zvezna in odvedljiva funkcija na krajiščih intervala zavzame enaki vrednosti, potem na intervalu obstaja točka, v kateri je tangenta na graf vodoravna.
Lagrangeov izrek: Če je funkcija f definirana in zvezna na intervalu $[a,b]$ in odvedljiva na (a,b), potem obstaja točka $c \in (a,b)$, v kateri je $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Tangenta na graf funkcije f v točki c je vzporedna sekanti grafa skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

(b) Naj bo $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in D(f)$ in naj bo $D(f)$ povezana množica. Naj za $x_1, x_2 \in D(f)$ velja $x_1 < x_2$, to je $x_2 - x_1 > 0$. Uporabimo Lagrangeov izrek na intervalu $[x_1, x_2] \subset D(f)$ in ugotovimo, da je $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\cdot(x_2 - x_1)$, kjer je $c \in (x_1, x_2)$. Ker je $f'(c) \geq 0$ in $x_2 - x_1 > 0$, je tudi $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ oziroma $f(x_1) \leq f(x_2)$. Torej je f naraščajoča funkcija. Funkcija $f(x) = -\frac{1}{x}$ ni naraščajoča, saj je $-1 < 1$ in $f(-1) > f(1)$. Definicijsko območje funkcije f je $(-\infty, 0)\cup(0,\infty)$ in ni povezano, zato zgornja trditev zanjo ne velja.

(c) Če je funkcija odvedljiva na intervalu (a,b), potem je potreben pogoj, da je $c \in (a,b)$ lokalni ekstrem funkcije f, $f'(c) = 0$. Pogoj ni zadosten, saj za $f(x) = x^3$ velja $f'(0) = 0$, pa funkcija f v točki 0 nima lokalnega ekstrema.

(d) Prvi zadostni pogoj, da ima funkcija f lokalni ekstrem v točki c, zahteva, da je funkcija f odvedljiva na nekem odprtem intervalu, ki vsebuje točko c, da je $f'(c) = 0$ in f' spremeni predznak v točki c. Pogoj ni potreben, saj ima funkcija $f(x) = |x|$ lokalni ekstrem (minimum) v točki 0, pa ni odvedljiva v nobeni okolici točke 0.

(3) (a) Funkcija f je konveksna, če za poljubne točke a, x in b iz $D(f)$, ki zadoščajo $a < x < b$, velja $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Funkcija f je konkavna, če za poljubne točke a, x in b iz $D(f)$, ki zadoščajo $a < x < b$, velja $f(x) \geq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Prevoj je točka, v kateri funkcija preide iz konveksne v konkavno ali obratno.

(b) Če je funkcija f dvakrat odvedljiva, potem je konveksna, če velja $f''(x) \geq 0$ za vsak $x \in D(f)$ in konkavna, če velja $f''(x) \leq 0$ za vsak $x \in D(f)$.

(c) Če je funkcija dvakrat odvedljiva na intervalu (a,b), potem je potreben pogoj, da je $c \in (a,b)$ prevoj, $f''(c) = 0$. Pogoj ni zadosten, saj za $f(x) = x^4$ velja $f''(0) = 0$, pa funkcija f v točki 0 nima prevoja.

(d) Zadostni pogoj, da ima funkcija f prevoj v točki c, zahteva, da je funkcija f dvakrat odvedljiva na neki okolici točke c in da f'' spremeni predznak v točki c.

(4) (a) Enačba premice skozi točki $(a, f(a))$ in $(a+h, f(a+h))$ je $y-f(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}(x-a)$ oziroma $y = f(a) + \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a)$. To je sekanta ali prvi interpolacijski polinom.

(b) $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. To je tangenta ali prvi Taylorjev polinom za funkcijo f v točki a.

(c) Skozi točke $(a, f(a))$, $(a+h, f(a+h))$ in $(a+2h, f(a+2h))$ narišemo parabolo $y = Ax^2+Bx+C$. Točke določajo sistem enačb za neznane koeficiente A, B, C:

$$\begin{aligned} f(a) &= Aa^2 + Ba + C \\ f(a+h) &= A(a+h)^2 + B(a+h) + C \\ f(a+2h) &= A(a+2h)^2 + B(a+2h) + C \end{aligned}$$

Rešitev sistema so vrednosti

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{2h^2} \\ B &= \tfrac{f(a+2h)-4f(a+h)+3f(a)}{2h} - \tfrac{a(f(a+2h)-2f(a+h)+f(a))}{h^2} \\ C &= f(a) + \tfrac{a(f(a+2h)-4f(a+h)+3f(a))}{2h^2} + \tfrac{a^2(f(a+2h)-2f(a+h)+f(a))}{2h^2} \end{aligned}$$

Enačbo parabole uredimo v $y = f(a)+\frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a)+\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{2h^2}(x-a)(x-a-h)$. To je drugi interpolacijski polinom.

(d) $y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$. To je drugi Taylorjev polinom za funkcijo f v točki a.

(5) (a) Za funkcijo $f(x) = e^x$ velja $f(0) = 1$, za njene odvode pa $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = e^x$ in $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = 1$. Iskani Taylorjev polinom je enak $T_4(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$.

(b) Po Taylorjevem izreku velja $e^x - T_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-0)^5 = \frac{e^c}{5!}x^5$, kjer je c neko število med 0 in x. Na intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ lahko ocenimo $|e^x - T_4(x)| \leq \frac{e^\varepsilon}{5!}\varepsilon^5$. Rešiti moramo neenačbo $\frac{e^\varepsilon}{5!}\varepsilon^5 \leq 0.01$. S poskušanjem lahko ugotovimo, da je ustrezen npr. $\varepsilon = 0.5$. Računsko pa sklepamo takole: Ker iščemo majhen ε, se omejimo na $\varepsilon < 1$. Potem lahko upoštevamo, da je $e^\varepsilon < e^1 = e$ in neenačba postane $\frac{e}{5!}\ \varepsilon^5 \leq 0.01$, njena rešitev pa $\varepsilon < \sqrt[5]{\frac{0.01 \cdot 5!}{e}} \cong 0.85$. Ker je $0.85 < 1$ lahko vzamemo npr. $\varepsilon = 0.8$.

(c) Pomagamo si z razvojem funkcije e^x v Taylorjevo vrsto okoli $x = 0$. Pri tem nas členi pete in vseh nadaljnjih stopenj ne zanimajo, saj po deljenju z x^4 v limiti $x \to 0$ postanejo enaki 0.
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(-6+6x-3x^2+x^3)e^x+6}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(-6+6x-3x^2+x^3)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)+6}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}x^4+\cdots}{x^4} = \frac{1}{4}$.
Do rezultata lahko pridemo tudi s štirikratno uporabo L'Hospitalovega pravila.

(d) Kandidate za prevoje določimo kot ničle drugega odvoda funkcije f.
$f'(x) = (6-6x+3x^2)e^x + (-6+6x-3x^2+x^3)e^x = x^3e^x$, $f''(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = e^x x^2(x+3)$.
V točki $x = -3$ drugi odvod spremeni predznak, torej je to prevoj. Pri $x = 0$ predznaka ne spremeni, torej to *ni nujno* prevoj. Ker pri $x = 0$ predznak spremeni prvi odvod, je to ekstrem. Funkcija f ima torej en sam prevoj $x = -3$.