Tretja teoretična domača naloga iz Matematike II

(1) (Geometrijski pomen diferencialne enačbe prvega reda) Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe $y' = y^2$, ki zadošča začetnemu pogoju $y(0) = 1$!
   (a) Uporabi metodo ločitve spremenljivk!
   (b) Uporabi metodo smernic!
   (c) Uporabi Eulerjevo metodo (vzemi $h = 1, N = 4$)!

(2) (Eulerjeva metoda) Naj bo $y(x)$ tista rešitev diferencialne enačbe $y' = -y$, ki zadošča začetnemu pogoju $y(0) = 1$.
   (a) Izračunaj približek za $y(1)$ z Eulerjevo metodo s $h = 1/2, N = 2$!
   (b) Izračunaj približek za $y(1)$ z Eulerjevo metodo s $h = 1/4, N = 4$!
   (c) Izračunaj približek za $y(1)$ z Eulerjevo metodo s $h = 1/n, N = n$!
   (d) Izračunaj točno vrednost za $y(1)$, tako da v (c) limitiraš $n \to \infty$!

(3) (Tokovnice) Naj bo $\mathbf{v}(x, y) = (x^2, -y)$, kjer $x, y \in \mathbb{R}$.
   (a) Skiciraj polje smernic in tokovnice za $\mathbf{v}(x, y)$!
   (b) Ekplicitno določi enačbe tokovnic iz (a)!
   (c) Eksplicitno določi tisto tokovnico, ki gre skozi točko $(0, 1)$!

(4) (Diferencialne enačbe prvega reda z ločljivimi spremenljivkami)
   (a) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = y$! Poišči še rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$!
   (b) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = 2-y$! Poišči še rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$!
   (c) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = y(2 - y)$! Poišči še rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$!
   (d) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = y(\ln 2 - \ln y)$! Poišči še rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$!

(5) (Homogene diferencialne enačbe)
   (a) Pokaži, da se diferencialna enačba oblike $y' = f(y/x)$ s substitucijo $z = y/x$ prevede na diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami !
   (b) Z metodo iz (a) prevedi diferencialno enačbo $y' = \frac{x-y}{x+y}$ na diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami !
   (c) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe iz (b) !

(6) (Linearne diferencialne enačbe prvega reda) Naj bosta $p(x)$ in $q(x)$ dani funkciji ene spremenljivke.
   (a) Izpelji formulo za splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = p(x)y$!
   (b) Izpelji formulo za posebno (=partikularno) rešitev diferencialne enačbe $y' = p(x)y + q(x)$!
   (c) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = p(x)y + q(x)$!
   (d) Formulo iz (c) uporabi na primeru $y' = 2xy + x^3$!

(7) (Linearne diferencialne enačbe prvega reda) Rešujemo diferencialno enačbo

$$y' = \mathrm{tg}(x)y + 1.$$

   (a) Poišči kakšno posebno rešitev hemogenega dela te enačbe !
   (b) Poišči splošno rešitev homogenega dela te enačbe !
   (c) Poišči kakšno posebno rešitev te enačbe !
   (d) Poišči splošno rešitev te enačbe !

(8) (Bernoullijeve diferencialne enačbe)
  (a) Pokaži, da se diferencialna enačba oblike $y' = p(x)y + q(x)y^n$ s substitucijo $z = y^{1-n}$ prevede na linearno diferencialno enačbo !
  (b) Z metodo iz (a) prevedi diferencialno enačbo $y' = \frac{y}{x} + y^2$ na linearno diferencialno enačbo !
  (c) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe iz (b) !

(9) (Posplošitve Eulerjeve metode)
  (a) Pojasni, kako s pomočjo Eulerjeve metode poiščemo približno rešitev diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$, kjer $y(x_0) = y_0$!
  (b) Kako Eulerjevo metodo iz točke (a) posplošimo na sistem $y' = f(x, y, z)$, $z' = g(x, y, z)$, kjer $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$?
  (c) Kako Eulerjevo metodo iz točke (a) posplošimo na enačbo $y'' = g(x, y, y')$, kjer $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = z_0$? (Nasvet: uporabi (b) z $f(x, y, z) = z$.)

(10) (Diferencialne enačbe drugega reda z ločljivimi spremenljivkami)
  (a) Opiši postopek reševanja diferencialnih enačb oblike $y'' = g(y')h(y)$, kjer sta g in h dani funkciji.
  (b) S pomočjo postopka iz (a) poišči splošno rešitev enačbe $y'' = 2y'y$!
  (c) Poišči tisto rešitev enačbe iz (b), ki zadošča pogojema $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$!

(11) (Sistemi diferencialnih enačb prvega reda z ločljivimi spremenljivkami)
  (a) Poišči splošno rešitev sistema $y' = 2y/z$, $z' = yz$.
  (b) Poišči splošno rešitev sistema $y' = 2yz$, $z' = yz$.
  (c) Poišči splošno rešitev sistema $y' = y(1 - z)$, $z' = z$.
  (d) Pri vsakem od sistemov (a)-(c) poišči tudi tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

(12) (Linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti) Naj bosta p in q realni števili in $f(x)$ zvezna funkcija ene spremenljivke.
  (a) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $y'' = py' + qy$?
  (b) Kako poiščemo posebno rešitev enačbe $y'' = py' + qy + f(x)$?
  (c) Kako poiščemo splošno rešitev enačbe $y'' = py' + qy + f(x)$?
  (d) Uporabi metodo iz (a)-(c) na primeru $y'' = -2y' - y + \sin(x)$!

(13) (Linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti) Za diferencialno enačbo $y'' - 2y' + y = x$ poišči:
  (a) dve linearno neodvisni posebni rešitvi homogenega dela,
  (b) splošno rešitev homogenega dela,
  (c) eno posebno rešitev,
  (d) splošno rešitev.

(14) (Sistemi linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti) Zanima nas sistem

$$y' = 3y - 2z, \quad z' = y + z.$$

  (a) Prevedi ta sistem na diferencialno enačbo drugega reda !
  (b) S pomočjo (a) poišči splošno rešitev tega sistema.
  (c) Zapiši sistem v matrični obliki ter pojasni zvezo med njegovo splošno rešitvijo ter lastnimi vrednostmi in lastnimi vektorji njegove matrike.
  (d) Poišči tisto rešitev sistema, ki zadošča pogojema $y(0) = 1$ in $z(0) = 0$!

(15) (Sistemi linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti) Naj bo $\mathbf{A}$ konstantna $n \times n$ matrika, ki se da diagonalizirati.
   (a) Pokaži, da je splošna rešitev sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ oblike $\mathbf{y} = e^{x\mathbf{A}}\mathbf{c}$, kjer je $\mathbf{c}$ konstanten n-razsežen vektor (s komponentami $c_1, \ldots, c_n$).
   (b) Pojasni, kako poiščemo diagonalizacijo matrike $\mathbf{A}$!
   (c) Pojasni, kako s pomočjo diagonalizacije matrike $\mathbf{A}$ izračunamo $e^{x\mathbf{A}}$!
   (d) Izpelji formulo $e^{x\mathbf{A}}\mathbf{c} = c_1 e^{\lambda_1 x}\mathbf{v_1} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}\mathbf{v_n}$, kjer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti, $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ pa lastni vektorji matrike $\mathbf{A}$!

(16) (Sistemi linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti) Naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Pokaži, da se matrike $\mathbf{A}$ ne da diagonalizirati !
   (b) Poišči splošno rešitev sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$!
   (c) Izračunaj $e^{x\mathbf{A}}$!

Rešitve morate napisati na roko!