

Druga teoretična domača naloga iz Matematike II

- (1) (Vektorske funkcije)
- (a) Kaj je vektorska funkcija? Kako jo podamo?
 - (b) Kaj je graf in kaj je tir vektorske funkcije? Kako iz enega dobimo drugega?
 - (c) Nariši tir in graf vektorske funkcije $t \mapsto (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

- (2) (Vektorske funkcije). Zanima nas vektorska funkcija

$$\mathbf{r}(t) = (\sin(2t), \cos(2t)), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

- (a) Nariši njen tir in njen graf !
 - (b) Izračunaj tangento na tir v točki $(1, 0)$ in tangento na graf v točki $(0, 1, 0)$!
 - (c) Izračunaj dolžino tira in dolžino grafa !
- (3) (Parametrično podane krivulje)
- (a) Kako podamo ravninsko krivuljo v parametrični obliki? Kako ugotovimo ali je sklenjena?
 - (b) Izpelji formulo za dolžino parametrično podane krivulje!
 - (c) Izpelji formulo za ploščino lika, ki ga oklepa parametrično podana krivulja!
- (4) (Pretvarjanje med različnimi zapisi krivulje)
- (a) Poišči implicitni zapis krivulje, ki je v parametričnem zapisu podana $z \ x = (\cos t)^3, y = (\sin t)^3$, kjer $t \in [0, 2\pi]$!
 - (b) Poišči parametrični zapis krivulje, ki je v eksplisitem zapisu podana $z \ x = y + y^3, y \in [-1, 1]$!
 - (c) Poišči parametrični zapis krivulje, ki je v implicitnem zapisu podana $z \ x^2 - y^2 = 1$!

Opomba: Kadar je možnih več različnih rešitev, poišči čimpreprostejšo!

- (5) (Graf in nivojski diagram)
- (a) Skiciraj graf funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$ tako, da določiš njegove preseke z ravninami $x = -1, x = 0, z = 1, y = -1, y = 0, y = 1$!
 - (b) Skiciraj nivojski diagram funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$, tako da narišeš nivojnice $f(x, y) = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$!
 - (c) Pojasni kako iz grafa dobimo nivojski diagram in kako iz nivojskega diagrama dobimo graf!
- (6) (Graf in nivojski diagram) Naj bo f funkcija s predpisom $f(x, y) = (x + y)^2$ in definicijskim območjem $D(f) = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.
- (a) Nariši množico D !
 - (b) Nariši nivojski diagram funkcije f !
 - (c) Nariši graf funkcije f ! Pomagaj si z (b)!

- (7) (Parcialni odvodi)
- (a) Kako sta definirana parcialna odvoda funkcije $f(x, y)$ v točki (a, b) ?
 - (b) Kako izračunamo tangentno ravnino na graf funkcije $f(x, y)$ z dotikališčem v točki (a, b) ?
 - (c) Kaj je potreben pogoj za lokalni ekstrem funkcije $f(x, y)$ v točki (a, b) ?

(8) (Zveznost in parcialni odvodi) Naj bo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{če } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{če } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Dokaži, da funkcija $f(x, y)$ ni zvezna v točki $(0, 0)$! Kako je sploh definirana zveznost funkcije dveh spremenljivk v točki?
- (b) Pojasni, zakaj je funkcija $f(x, y)$ zvezna v vsaki točki različni od $(0, 0)$!
- (c) Izračunaj $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$! Pomagaj si z definicijo parcialnih odvodov!
- (d) Izračunaj $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, če $(x, y) \neq (0, 0)$! Pomagaj si s pravilom za odvajanje kvocienta !

(9) (Drugi parcialni odvodi)

- (a) Kako so definirani drugi parcialni odvodi funkcije $f(x, y)$? Izračunaj druge parcialne odvode funkcije $g(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$!
- (b) Kako se glasi zadostni pogoj za lokalni ekstrem funkcije $f(x, y)$ v točki (a, b) ? Kako ugotovimo ali imamo lokalni minimum ali maksimum?
- (c) Uporabi zadostni pogoj iz (b) na funkciji $g(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, kjer so a, b, c konstante, in točki $(a, b) = (0, 0)$! Kakšni morajo biti a, b, c , da imamo lokalni minimum oziroma lokalni maksimum?
- (d) S pomočjo formule $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{1}{a}(ax + by)^2 + \frac{ac-b^2}{a}y^2$ lahko odgovoriš na vprašanje iz točke (c) brez uporabe (b)! Poskusi!

(10) (Posredno odvajanje)

- (a) Zapiši formulo za posredni odvod funkcije $F(x) = f(g(x), h(x))$.
- (b) S pomočjo točke (a) izračunaj parcialna odvoda funkcije $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$.
- (c) V Taylorjevo vrsto $u(t) = u(0) + u'(0)t + u''(0)t^2/2 + \dots$ vstavi $u(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Pri računanju $u'(0)$ in $u''(0)$ uporabi (a). Nato vstavi še $t = 1$. Kaj dobiš?
- (d) S pomočjo formule (a) izpelji formulo za enačbo tangente na krivuljo $f(x, y) = c$ v točki (x_0, y_0) .

(11) (Volumni v kartezičnih koordinatah) Naj bo

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

in $h(x, y)$ nenegativna funkcija na območju D . Naj bo

$$\Gamma = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq h(x, y)\}.$$

- (a) Skiciraj D in Γ ter prerez Γ z ravnino $x = x_0$!
- (b) Kolikšna je ploščina prereza območja Γ z ravnino $x = x_0$?
- (c) Kolikšen je volumen območja Γ ?

(12) (Parcialni odvodi)

- (a) Kako sta definirana parcialna odvoda funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) ?
- (b) Kako izračunamo tangentno ravnino na graf funkcije $f(x, y)$ z dotikališčem v točki (x_0, y_0) ?
- (c) Kaj je potreben pogoj za lokalni ekstrem funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) ?
- (d) Poišči globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ na območju $2x^2 + y^2 \leq 1$.

(13) (Dvakratni integrali)

- (a) Kako izračunamo prostornino pod grafom funkcije $f(x, y)$, če je $D(f)$ pravokotnik!
 - (b) Kako izračunamo prostornino pod grafom funkcije $f(x, y)$, če je $D(f) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(y)\}$?
 - (c) Kako izračunamo prostornino pod grafom funkcije $f(x, y)$, če je $D(f)$ bolj zapleteno območje?
- (14) (Risanje vektorskih polj) Naj bo $\mathbf{v}(x, y) = (x, xy)$, kjer $x, y \in [-1, 1]$.
- (a) Nariši $\mathbf{v}(x, y)$ s pomočjo koordinatnih krivulj !
 - (b) Nariši polje smernic za $\mathbf{v}(x, y)$!
 - (c) Nariši tokovnice za $\mathbf{v}(x, y)$!
 - (d) Eksplicitno določi enačbe tokovnic iz (c)!
- (15) (Krivuljni integrali)
- (a) Kako je definiran krivuljni integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C f dx + g dy$?
 - (b) Kako krivuljni integral izračunamo? Kako upoštevamo orientacijo krivulje?
 - (c) Izračunaj integral $\int_{S_1} -y dx + x dy$, kjer je S_1 enotska krožnica orientirana v smeri urinega kazalca? Kaj pa če je S_1 orientirana v nasprotni smeri urinega kazalca?
 - (d) Kaj pravi Greenova formula? Uporabi jo na primeru iz točke (c)!
- (16) (Gradientna polja)
- (a) Kdaj pravimo, da je neko vektorsko polje gradientno?
 - (b) Kaj vemo o krivuljnih integralih gradientnih vektorskih polj?
 - (c) Kako preprosto preverimo ali je neko polje gradientno in kako v tem primeru izračunamo njegov potencial?
 - (d) Preveri, da je vektorsko polje $(y^2 - x^2, 2xy)$ gradientno in izračunaj njegov potencial!

Rešitve morate napisati na roko!