

### Akademik dr. Franc Forstnerič je prejel Bergmanovo nagrado za leto 2019

Akademik dr. Franc Forstnerič, profesor za matematično analizo na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, je od American Mathematical Society prejel Bergmanovo nagrado za leto 2019. V spomin na Stefana Bergmana, raziskovalca v teoriji funkcij več kompleksnih spremenljivk, po katerem se imenujeta Bergmanovo jedro in Bergmanova projekcija, se ta nagrada od leta 1989 podeljuje na eno do dve leti za vrhunske dosežke na področju kompleksne analize, harmonične analize in operatorske teorije. Pogosto se razdeli med dva nagrajenca. Za leto 2019 je bila nagrajenka še Mei-Chi Shaw, profesorica na Univerzi Notre Dame v ZDA. Notica je objavljena na spletni strani AMS na povezavi [www.ams.org/news?news\\_id=5845](http://www.ams.org/news?news_id=5845).



Forstnerič je dobil nagrado za svoje številne in raznovrstne prispevke v teoriji funkcij več kompleksnih spremenljivk, kompleksni geometriji in geometrijski analizi. Posebej je priznan za svoje delo na problemih preslikav v območjih v kompleksnih prostorih in splošneje, kompleksnih mnogoterostih, teoriji holomorfne aproksimacije v več kompleksnih spremenljivkah, razvoju principa Oke in uporabi kompleksno analitičnih metod v teoriji minimalnih ploskev. K odločitvi o podelitvi nagrade sta pomembno prispevali tudi njegova konstrukcija nekritičnih holomorfnih funkcij na Steinovih mnogoterostih in delo v zadnjih letih o uporabi kompleksne analize v teoriji minimalnih ploskev, ki je prineslo v slednjo pomemben napredek in razvoj novih smeri. Iz Evrope je Forstnerič osmi prejemnik Bergmanove nagrade.

Bergmanova nagrada je pomembno priznanje, rezervirano za največja imena v kompleksni analizi. Franc Forstnerič je eno od teh imen. V zadovoljstvo mi je, da ob tej priložnosti lahko nekoliko širše predstavim nekaj uspehov na njegovi profesionalni poti.

Forstnerič je bil rojen v Ljubljani leta 1958. Tu je na univerzi leta 1980 diplomiral iz matematike. Leta 1985 je doktoriral iz matematike na University of Washington v Seattlu v ZDA. Od leta 1985 do 1993 je bil član

oddelka za matematiko na Univerzi v Ljubljani. Od leta 1991 do 1993 je bil gostujoči profesor na University of Wisconsin v Madisonu v ZDA, kjer je leta 1993 dobil stalno mesto in leta 1994 postal redni profesor. Leta 1994 je dobil naziv rednega profesorja na Univerzi v Ljubljani, kamor se je vrnil leta 1997 in kjer je od tedaj zaposlen kot redni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko. V dveh mandatnih obdobjih je opravljal funkcijo dekana fakultete. Imel je vabljenja predavanja na več kot 100 mednarodnih konferencah. V revijah je objavil blizu 130 znanstvenih člankov in pri založbi Springer-Verlag izdal dve znanstveni monografiji. Leta 1988 je prejel Kidričevo nagrado za vrhunske znanstvene dosežke. Leta 1999 je postal izredni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti in leta 2005 njen redni član. Leta 2017 je postal tajnik njenega Razreda za matematične, fizikalne, kemijske in tehniške vede, od leta 2020 pa je njen glavni tajnik.

Podpisani sem imel posebno srečo, da sem mu imel priložnost svetovati na začetku njegove poti v raziskovanju. Nekaj mesecev pred diplomo je po nasvetu mentorja profesorja Suhadolca prišel k meni po nasvet o nadaljevanju študija po diplomi. Ta prvi pogovor z njim mi je za vedno ostal v spominu po mojem močnem občutku, da gre za briljantnega študenta, za katerega ne bo omejitve pri njegovem delu v matematiki. Predlagal sem mu področje kompleksne analize in za mentorja Edgarja L. Stouta z University of Washington v Seattlu, ZDA, s katerim sem sodeloval in za katerega sem bil prepričan, da mu bo odličen mentor. Stout se je s tem ljubeznivo strinjal in mu predlagal gradivo iz kompleksne analize za študij za leto do odhoda v Seattle. Kasneje se je izkazalo, da sem imel s tem predlogom srečo, saj sta se izvrstno ujela.

Forstnerič je kot Fulbrightov štipendist odšel na doktorski študij v Seattle v jeseni 1981. Prvo vprašanje, ki se ga je lotil v raziskovanju, je bil obstoj pravih holomorfnih preslikav in vložitev omejenih strogo psevdokonveksnih domen v kompleksnih evklidskih prostorih  $\mathbb{C}^n$  v enotsko kroglo in sorodne modelne domene v višje razsežnih prostorih  $\mathbb{C}^N$  ter obnašanje takšnih preslikav na robu domen v odvisnosti od gladkosti roba. Leta 1973 je bilo dokazano, da je vsaka strogo psevdokonveksna domena  $D$  v  $\mathbb{C}^n$  z gladkim robom biholomorfno ekvivalentna preseku  $X$  z  $E$ , kjer je  $E$  strogo konveksna domena v  $\mathbb{C}^N$ ,  $N > n$ , in  $X$  kompleksna podmnogoterost okolice zaprtja  $E$ . Postavilo se je naravno vprašanje, ali je v primeru, ko je rob  $bD$  realno analitičen, lahko  $E$  krogla. Kar nekaj kolegov je bilo prepričan, da je odgovor pozitiven. Pozimi 1983–84 pa je Forstnerič pokazal, da to niti lokalno ni res in da je le zelo majhno množico strogo psevdokonveksnih

realno analitičnih hiperploskev mogoče lokalno holomorfno vložiti v sfere katerekoli dimenzije. Dokaz je temeljil na podrobni obravnavi obnašanja operacij s potenčnimi vrstami ter štetju prostostnih stopenj v enačbah, ki kontrolirajo omenjeni problem. Ne glede na dimenzijo  $N$  drugega prostora je prostostnih stopenj premalo in množica vložljivih hiperploskev v vsaki dimenziji je prve kategorije v ustreznem Bairovem prostoru. Podpisani imam na ta pomemben Forstneričev preboj posebej lep spomin. Po naključju sem bil tedaj na obisku v Seattlu in ne bom pozabil, kako je, evforičen in žarečih oči v sončnem dopoldnevu prišel do mene in rekel: »Sedaj pa vem, kako se naredi«. Kakšno veselje!

Ta rezultat je združil s svojim dokazom obstoja pravih holomorfnih vložitev v krogle primerno velikih dimenzij v svoje prvo pomembno matematično delo *Embedding strictly pseudoconvex domains into balls*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 295:1 (1986), 347–368.

Drugo delo, ki je izšlo iz Forstneričeve disertacije, *Proper holomorphic maps from balls*, *Duke Math. J.* 53:2 (1986), 427–441, je bilo začetek teorije holomorfnih preslikav med krogli, ki se je v naslednjih desetletjih močno razvila in o kateri bo v kratkem izšla monografija ameriškega matematika Johna D'Angela.

Tretja pomembna tema iz disertacije je bil študij strukture družine holomorfnih diskov v  $\mathbb{C}^2$ , katerih robovi so pripeti na neko gladko povsem realno ploskev, to je tako, katere tangentna ravnina v nobeni točki ni kompleksna premica. Forstnerič je razvil svojo idejo, ki povezuje dimenzijo prostora perturbacij danega začetnega diska z robom v mnogoterosti s topološko količino (prvim kohomološkim razredom mnogoterosti s celimi koeficienti), ki jo je poimenoval indeks in za katero je kasneje odkril, da je že znana pod imenom indeks Maslova. Dobljeni rezultati so bili dokaj popolni, sam problem in tehnika pa se navezujeta na klasični Riemann-Hilbertov problem faktorizacije matričnih funkcij na enotski krožnici na produkt holomorfnih matričnih funkcij na notranjosti in zunanosti kroga. To je vsebina članka *Analytic discs with boundaries in a maximal real submanifold of  $\mathbb{C}^2$* , *Ann. Inst. Fourier* 37:1 (1987), 1–44. Nekaj let kasneje sem podpisani raziskave v tej smeri nadaljeval in problem dokončno rešil tudi v višjih dimenzijah.

V šolskem letu 1987–88 je Forstnerič gostoval na Mittag-Lefflerjevem inštitutu v Stockholmu, kjer je intenzivno delal na do tedaj neraziskanem problemu analitične razširljivosti holomorfnih preslikav domen v  $\mathbb{C}^n$  v domene v višje razsežnih prostorih  $\mathbb{C}^N$  za  $N > n > 1$ . Med drugim je dokazal, da je vsaka prava holomorfna preslikava krogle v kroglo višje dimenzije, ki je

dovolj gladka na robu, podana z racionalno preslikavo. Rezultate je objavil v članku *Extending proper holomorphic mappings of positive codimension*, *Invent. Math.* 95:1 (1989), 31–62. To je njegov do sedaj največkrat citiran članek in je osnova za praktično vse nadaljnje raziskave o analitičnih razširitvah preslikav v višje razsežna območja.

Po prihodu v Madison l. 1991 je Forstnerič sodeloval z J.-P. Rosayem, ki je bil tam profesor. Skupaj sta razvila prve pomembne primere uporabe novega pristopa v teorijo holomorfnih avtomorfizmov kompleksnih evklidskih prostorov, ki sta jo l. 1992 predstavila E. Andersen in L. Lempert. Rezultate sta objavila v članku *Approximation of biholomorphic mappings by automorphisms of  $\mathbb{C}^n$* , *Invent. Math.* 112 (1993), 323–349, v katerem sta postavila temelje za številne nadaljnje uporabe, ki se še danes pojavljajo. Forstnerič je raziskave v tej smeri nadaljeval v več člankih in med drugim pokazal, da lahko najdemo holomorfne avtomorfizme prostora  $\mathbb{C}^n$  s predpisanimi Taylorjevimi polinomi poljubnega reda z neizrojenim linearnim delom v vsaki končni, pa tudi v nekaterih števnih diskretnih množicah. Ta rezultat je zelo uporaben pri konstrukcijah v holomorfni dinamiki.

Kot eno od zgodnjih uporab naj omenim konstrukcijo pravilno vložene kompleksne premice v  $\mathbb{C}^2$ , ki se je ne da izravnati z avtomorfizmom v članku *Non straightenable complex lines in  $\mathbb{C}^2$* , *Ark. Mat.* 34:1 (1996), 97–101, napisanim skupaj z J.-P. Rosayem in podpisanim. Na ta naš izrek, ki ima nekatere pomembne posledice, imam podpisani posebej lep spomin. Nastal je v treh dneh. Prvi dan po prihodu v Madison iz Ann Arborja sem Forstneriču predstavil idejo, on mi je predlagal, da bi konstrukcijo poenostavili z uporabo novejšje teorije holomorfnih avtomorfizmov, naslednji dan je Forstnerič ob skupnem kosilu zadevo omenil Rosayu, ki je dan zatem prišel s prvo skico dokaza. Rosay je ta problem poznal že od svojega znanega dela z Rudinom v letu 1988, ki se ga s tedaj znanimi metodami ni dalo rešiti.

Forstnerič se je vrnil v Ljubljano leta 1997. V Ljubljani sem bil tedaj podpisani mentor magistrski študentki Jasni Prezelj, ki sem ji dal nalogo preštudirati članek M. Gromova *Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles* iz leta 1989. To se je pokazalo kot prehud zalogaj zame in sem prosil Forstneriča, da on prevzame mentorstvo. To je k sreči sprejel. Šlo je za bistveno nadgradnjo rezultatov Hansa Grauerta o principu Oka-Grauert, ki jih je Forstnerič študiral svoje prvo leto v Seattlu l. 1981. Kot običajno je imel Gromov odlične ideje, ki pa so bile v članku predstavljene le v osnovnih potezah in tako temelji niso bili čvrsto postavljeni, kljub temu pa so nekateri raziskovalci rezultate že začeli uporabljati. Forstnerič se je zako-



pal v delo in jeseni leta 1997 našel manjkajoči del za prvo rešitev problema. Prezljevi pa je po več mesecih dela uspelo razumeti, kaj je imel Gromov v mislih s svojo zgolj skicirano idejo za lepljenje kompleksa lokalnih holomorfnih prerezov holomorfne vlaknenja v globalni holomorfni prerez. Šlo je za izredno kompleksen indukcijski postopek. Rezultat njunega skupnega dela so bili članki Oka's principle for holomorphic fiber bundles with sprays, *Math. Ann.* 317:1 (2000), 117–154, Oka's principle for holomorphic submersions with sprays, *Math. Ann.* 322:4 (2002), 633–66, ter Extending holomorphic sections from complex subvarieties, *Math. Z.* 236:1 (2001), 43–68. Ta dela so postavila temelje za nadaljnjo uporabo principa Oka-Grauert-Gromov.

V približno istem času je nastal tudi najin skupni članek s Forstneričem Proper holomorphic discs in  $\mathbb{C}^2$ , *Math. Res. Lett.* 8:3 (2001), 257–274. Ena od posledic najinega glavnega izreka o pravih holomorfnih diskih v  $\mathbb{C}^2$  z delno kontrolo njihove lege je obstoj pravih harmoničnih preslikav diska v ravnino  $\mathbb{R}^2$ . Tedaj nisva vedela, da je to protiprimer domnevi Schoen-Yau iz l. 1997, da takih diskov ni. Prvi protiprimer je podal Božin z drugačno konstrukcijo že leta 1999.

Po letu 2000 se je v Ljubljani Forstnerič še naprej ukvarjal s principom Oka in je objavil vrsto pomembnih člankov. Med njimi je eden od njegovih najboljših, v katerem je dokazal obstoj holomorfnih funkcij brez kritičnih točk in nesingularnih holomorfnih foliacij na Steinovih mnogoterostih: Noncritical holomorphic functions on Stein manifolds, *Acta Math.* 191:2 (2003), 143–189. Precej kasneje je isti problem rešil tudi na Steinovih prostorih s singularnostmi v delu Noncritical holomorphic functions on Stein spaces, *J. Eur. Math. Soc.* 18:11 (2016), 2511–2543. Še en njegov izvrsten članek s tega področja je Runge approximation on convex sets implies Oka's property, *Annals of Math.* 163:2 (2006), 689–707. Ta članek je odprl pot za karakterizacijo veljavnosti principa Oka z dosti preprostejšo Rungejevo aproksimacijsko lastnostjo in je vodil do uvedbe pojma mnogoterosti Oka, ki ga je Forstnerič vpeljal v literaturo l. 2009. Na osnovi tega razvoja je bilo v matematični klasifikaciji MSC-2020 uvedeno novo področje 32Q56 Oka principle and Oka manifolds.

Forstnerič je iznašel novo tehniko eksponiranja robnih točk Riemannovih ploskev, ki je olajšala konstrukcijo ob siceršnji uporabi metode Erlenda Wolda pri vlaganju Riemannovih ploskev v  $\mathbb{C}^2$ . Ta tehnika je osnovana na njegovem rezultatu o kompozicijskem razcepu biholomorfnih preslikav iz članka v *Acta Math.* 2003. Tako je nastal prvi Forstneričev članek z E. Woldom, Bordered Riemann surfaces in  $\mathbb{C}^2$ , *J. Math. Pures Appl.* 91:1 (2009),

100–114. V drugem članku z Woldom pa sta konstruirala prave holomorfne vložitve v  $\mathbb{C}^2$  vseh domen v  $\mathbb{C}$  s števeno mnogo netočkastimi robnimi komponentami: Embeddings of infinitely connected planar domains into  $\mathbb{C}^2$ , *Anal. PDE* 6:2 (2013), 499–514. Omenjena dva rezultata do današnjega dne še nista bila presežena. Problem vložitve splošne odprte Riemannove ploskve v  $\mathbb{C}^2$  ostaja odprt.

Leta 2011 je izšla Forstneričeva obsežna monografija Stein Manifolds and Holomorphic Mappings (The Homotopy Principle in Complex Analysis). *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, 56.* Springer-Verlag, Heidelberg, 2011; druga dopolnjena izdaja l. 2017. Monografija združuje nekatere novejšje rezultate iz geometrijske teorije Steinovih mnogoterosti, teorijo holomorfnih avtomorfizmov kompleksnih evklidskih prostorov in Steinovih mnogoterosti z Varolinovo lastnostjo gostote, teorijo Oka mnogoterosti in Oka preslikav, ter uporabo razvitih metod v vrsti problemov. S tem je večina Forstneričevih najpomembnejših del pred objavo knjige organsko povezanih v enovito celoto, vanjo pa se seveda vklaplja tudi delo številnih kolegov.

Julija 2011 je Forstnerič prejel prijazno povabilo od Antonia Alarcóna in Francisca J. Lópezza z Univerze v Granadi v Španiji, naj ju obišče skupaj z Erlendom Woldom. Osebno se niso poznali, pisca pa sta v vabilu pojasnila, da se ukvarjata z geometrijsko teorijo minimalnih ploskev in da se jima zdi, da bi bile analitične metode za konstrukcijo vložitev Riemannovih ploskev, ki sta jih razvijala Forstnerič in Wold, uporabne tudi na tem področju. Posledice tega povabila, novega stika, so vodile do pomembnih novih rezultatov, ki jih bom opisal v nadaljevanju.

Spomladi 2012 je Alarcón prišel na enomesečni obisk v Ljubljano. Tedaj je steklo njegovo sodelovanje s Forstneričem, ki se je v nadaljnjih letih izredno uspešno razvilo. Alarcónovo predavanje med tem obiskom je bilo zelo pomembno tudi za podpisanega, saj sem po dobrega pol leta dela po tem predavanju v zvezi s predstavljenim problemom dobil rezultat, ki je morda najboljši v moji karieri.

Forstneričev prvi članek z Alarcónom, ki je nastal na osnovi pogovorov med njegovim obiskom v Ljubljani, je bil s področja kompleksne analize, a v smeri problema Calabi-Yau in Paula Yanga. Dokazala sta, da lahko vsako Riemannovo ploskev, omejeno z Jordanovimi krivuljami, pravilno holomorfno imergiramo v kroglo v  $\mathbb{C}^2$  in vložimo v kroglo v  $\mathbb{C}^3$  tako, da je slika kompletna v inducirani metriki. Z drugo besedo, slika vsake divergentne poti v Riemannovi ploskvi ima neskončno evklidsko dolžino.

Zatem sta se Forstnerič in Alarcón posvetila uporabi kompleksne analize v teoriji minimalnih ploskev. Minimalne ploskve minimizirajo ploščino, v primeru, ko so konformno parametrizirane, pa tudi notranjo napetostno energijo. Konformno parametrizirana ploskev je minimalna natanko tedaj, ko je podana s harmonično preslikavo in tako pride do povezave s kompleksno analizo. Tematika je tesno povezana s področjem nelinearne holomorfne aproksimacije, torej s teorijo Oka in njenimi metodami.

Ključna za vse nadaljnje delo sta bila prva dva članka Alarcóna in Forstneriča na tem področju: *Null curves and directed immersions of open Riemann surfaces*, *Invent. Math.* 196:3 (2014), 733–771 in *The Calabi-Yau problem, null curves, and Bryant surfaces*, *Math. Ann.* 363:3-4 (2015), 913–951. V prvem so razvite osnovne kompleksno analitične metode za konstrukcije minimalnih ploskev, v drugem pa sta klasičen Riemann-Hilbertov robni problem in z njim povezano modifikacijsko metodo prilagodila za uporabo na ničelnih holomorfnih krivuljah in minimalnih ploskvah. Diverzifikacije in izboljšave tehnik so sledile v številnih delih. Sčasoma je začel sodelovati še Francisco López, pri treh člankih pa tudi Barbara Drinovec Drnovšek. Dobili so nove aproksimacijske, interpolacijske, strukturne ter vloživene izreke za minimalne ploskve v evklidskih prostorih, dokazali obstoj minimalnih ploskev z dano Gaussovo preslikavo, razvili metode za konstrukcijo pravih minimalnih ploskev v minimalno konveksnih domenah, ki igrajo v tej teoriji podobno vlogo kot psevdokonveksne domene v kompleksni analizi, ter začeli z razvojem teorije minimalno konveksnih ogrinjač.

Kronski dosežek njihovega dotedanega dela na področju minimalnih ploskev je rešitev problema Calabi-Yau za minimalne ploskve v evklidskih prostorih, ki sprašuje o obstoju in robnem obnašanju kompletnih omejenih minimalnih ploskev predpisanega konformnega tipa. Za rešitev tega problema so uporabili aproksimativne rešitve Riemann-Hilbertovega problema, prirejenega za teorijo ničelnih holomorfnih krivulj in konformnih minimalnih ploskev in to tehniko kombinirali z že omenjeno metodo eksponiranja robnih točk, ki jo je Forstnerič razvil l. 2009 v delu z Erlendom Woldom. Tako je bil problem Calabi-Yau rešen za vse Riemannove ploskve z Jordanovim robom v članku Forstneriča z Alarcónom, Drinovec-Drnovškovo in Lópezom: *Every bordered Riemann surface is a complete conformal minimal surface bounded by Jordan curves*, *Proc. London Math. Soc.* 111:4 (2015), 851–886. V enakem avtorstvu so razvili tudi teorijo minimalnih ploskev v novo vpeljanem razredu minimalno konveksnih domen v članku *Minimal surfaces in mini-*

*mally convex domains*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 371:3 (2019), 1735–1770. Skupaj z Drinovec-Drnovškovo pa je Forstnerič pred tem obravnaval minimalno konveksne ogrinjače kompaktnih množic v  $\mathbb{R}^3$  v članku *Minimal hulls of compact sets in  $\mathbb{R}^3$* , *Trans. Amer. Math. Soc.* 368:10 (2016), 7477–7506. Najsplošnejši rezultat s področja problema Calabi-Yau, ki velja tudi za Riemannove ploskve končnega roda z neskončno mnogo robnimi krivuljami in brez točkastih robnih komponent, pa je dokazan v članku Alarcóna in Forstneriča, *The Calabi-Yau problem for Riemann surfaces with finite genus and countably many ends*, *Rev. Mat. Iberoam.* 37:4 (2021), 1399–1412.

Večino novih rezultatov, kakor tudi mnoge rezultate drugih avtorjev, so Alarcón, Forstnerič in López povzeli v monografiji *Minimal Surfaces from a Complex Analytic Viewpoint*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2021, ki je izšla marca 2021. Kot sem že omenil, sem podpisani po prvem obisku Alarcóna v Ljubljani napisal verjetno najboljši članek v svoji karieri z rešitvijo problema Paula Yanga, *A complete complex hypersurface in the ball of  $\mathbb{C}^n$* , *Annals of Math.* 182 (2015), 1067–1091, kasneje pa sem imel še dva članka na to temo v sodelovanju z Alarcónom in Lópezom. Naj živi sodelovanje med ljudmi z različnimi znanji in izkušnjami!

Ob Forstneričevi šestdesetletnici so kolegi in kolegice v septembru 2018 organizirali v Ljubljani odlično konferenco »Stein manifolds and holomorphic mappings«, ki je bila praznik kompleksne analize na visokem nivoju. Verjamem, da bi bila vseč našemu Josipu Plemlju, zahtevnemu raziskovalcu visoke kvalitete in začetniku kompleksne analize v Sloveniji.

Srečno naključje je, da se je Forstnerič, ki je že nameraval za vedno ostate v ZDA, premislil in se v poznih devetdesetih letih vrnil v Slovenijo. Neki naš kolega iz ZDA je tedaj to komentiral kot škodo za Forstneriča in za kompleksno analizo, saj da bo izgubil stik s stroko in bo šla njegova pot v raziskovanju navzdol. Zmotil se je. Forstnerič je svoje najboljše rezultate dobil po vrnitvi v domovino, na katero je bolj navezan, kot si je pred tem mislil. Tu so njegove korenine.

Dragi Franci, naš dragi kolega in prijatelj! Iskreno Ti čestitamo ob prejemu Bergmanove nagrade in želimo še veliko nadaljnjih pomembnih uspehov pri delu!

*Josip Globevnik*