



Kompleksne mnogoterosti so osrednje v projektu ERC, za katerega je Franc Forstnerič prejel skoraj 1,48 milijona evrov za pet let. FOTO JURE ERŽEN

Matematika je večer izziv, je nekaj, kar imaš lahko rad

Prof. Franc Forstnerič V znanosti je pravzaprav težko ločiti med delovnim in prostim časom, misli vseskozi uhajajo k matematičnim problemom

Matematik prof. dr. Franc Forstnerič je eden od treh slovenskih znanstvenikov, ki so letos pridobili prestižni projekt Evropskega raziskovalnega sveta (ERC) za uveljavljene raziskovalce. Na področju matematike je to prvi projekt ERC v Sloveniji.

SAŠA SENICA

Matematika, kot pravi, ga je zasvojila že v srednji šoli. »Najprej sem menil, da bom elektroinženir, rad sem sestavljal radie in podobne aparature, a je učiteljica na šentvidski gimnaziji opazila mojo nardarjenost za matematiko. Dala mi je knjigo prof. Franceta Križaniča *Križem po matematiki*, ki me je očarala s svojo zgodbo. Pri petnajstih sem se odločil, kaj bom študiral, in odločitev je bila vsekakor pravilna. Matematika ustreza mojemu načinu razmišljanja, mojim estetskim merilom. Matematika je veda med znanostjo in umetnostjo. Je večer izziv. Je nekaj, kar imaš lahko rad,« poudarja prof. Forstnerič.

Leta 1985 je na Washingtonski univerzi v Seattleu doktoriral z disertacijo s področja holomorfnih preslikav v več kompleksnih spremenljivkah. Raziskuje na področjih kompleksne analize, geometrije in teorije minimalnih ploskev. Po daljšem bivanju na institucijah v tujini, najdlje na Univerzi Wisconsin v Madisonu, je od leta 1996 redni profesor na Fakulteti za matematiko Univerze v Ljubljani in od leta 1999 član Slovenske akademije znanosti in umetnosti, kjer trenutno opravlja funkcijo glavnega tajnika.

Mnogoterosti

Po vrsti prebojnih raziskav je Forstnerič leta 2009 v literaturo uvedel nov razred kompleksnih mnogoterosti, tako imenovane Oka mnogoterosti, in to področje je tudi osrednje v njegovem projektu ERC z naslovom »Holomorfnе parcialne diferencialne relacije«, za katerega je prejel skoraj 1,48 milijona evrov za pet let.

Za večino, ki smo z učenjem matematike opravili s koncem srednje šole, je naslov projekta vsekakor težko razumljiv. »Da bi zares pojasnil, kaj bomo obravnavali v projektu, bi bilo potrebno vsaj kakšno uvodno predavanje ali dve,« se smeje profesor. Gre za področje, ki je med kompleksno analizo in geometrijo. »Kompleksne mnogoterosti so lokalno modelirane

s kompleksnimi evklidskimi prostori. Ravnina je denimo evklidski prostor kompleksne dimenzije ena, ko ravnine kartezično množimo, zgradimo poljubno razsežne prostore. Bistvenega pomena je operator, ki vektorju priredi njegov produkt z imaginarno enoto, to je kvadratnim korenem iz števila -1 . Preslikave, ki so kompatibilne s to operacijo vrtenja za pravi kot, se imenujejo holomorfnе. V ravninskem primeru je njihova glavna geometrijska lastnost, da ohranjajo kote. Torej, krivulji, ki se sekata pod nekim kotom, se tudi po preslikavi sekata pod enakim kotom, razen v izoliranih izjemnih točkah. Vse te krivulje, ploskve in višje razsežne ploskve v geometriji imenujemo mnogoterosti. To je pravzaprav beseda za katerikoli objekt, ki je lokalno gledano evklidski,« pojasnjuje matematik. »Najpreprostejši neevklidski primeri so sfere, torusi, ploskve, sestavljene iz vrste torusov, in podobno.«

Jasno mi je bilo, da je problem resen in težak, pa tudi pomemben, in da bi iz rešitve lahko sledilo veliko stvari. To je bila moja motivacija. In ko me nekaj začne zares zanimati, me nič ne ustavi.

»V kompleksni geometriji skušamo razumeti, koliko je holomorfnih preslikav ene mnogoterosti v drugo, kakšne lastnosti lahko imajo, kako je vprašanje odvisno od ene in druge mnogoterosti. Eden od pomembnih razredov kompleksnih mnogoterosti so take, ki jih lahko holomorfnо vložimo v kompleksne evklidske prostore; imenujejo se afine ali tudi Steinerove. Vsako realno mnogoterost lahko vložimo v evklidski prostor, v kompleksnem pa to ne drži.« Kot nadaljuje, se v povezavi z opisanim intenzivno preučuje Kobajašijeva hiperboličnost, ki jo je uvedel japonski matematik Šošiči Kobajaši. To je pojem rigidnosti, ki pomeni, da dana kompleksna mnogoterost ne vsebuje poljubno velikih holomorfnih diskov in v posebnem ne vsebuje holomorfnih premic. Prof. Forstneriča bolj zanima obratna

lastnost, to je fleksibilnost. »Fleksibilne kompleksne mnogoterosti so take, da za holomorfnе preslikave iz afinih mnogoterosti vanje veljajo praktično enake lastnosti kot za funkcije. Konkretnije to pomeni, da lahko vsako holomorfnо preslikavo s primerne podmnožice afine mnogoterosti aproksimiramo s holomorfnо preslikavo celotne mnogoterosti, da le ni topoloških ovir. Dihotomija med rigidnostjo in fleksibilnostjo igra pomembno vlogo v kompleksni geometriji, saj se izkaže, da iz nje izvira vrsta naravnih vprašanj in problemov. Rigidnost je običajno obstrukcija za obstoj rešitev problemov, fleksibilnost, ki me v tem projektu bolj zanima, pa pomeni obstoj rešitev.«

Oka, Grauert, Gromov, Forstnerič

Osrednji razred fleksibilnih mnogoterosti je v literaturo leta 2009 uvedel ravno prof. Forstnerič. Pomenoval jih je Oka mnogoterosti, po japonskem matematiku Kijošiju Oki, ki je v 30. letih prvi začel z raziskavami na tem področju. »Če vzamete ravnino in iz nje odvzamete eno točko, je to še vedno fleksibilna mnogoterost. Ena točka za holomorfnо preslikavo ne preostavlja ovire, če izpustite dve točki, pa holomorfnа preslikava iz ravnine ni več mogoča. V višjih dimenzijah je neprimerno več Oka mnogoterosti. Take so na primer vse homogene kompleksne mnogoterosti, na katerih končno razsežna grupa holomorfnih simetrij deluje tranzitivno v smislu, da lahko poljubno točko preslikamo v poljubno drugo točko.«

Z raziskavami teorije Oka-Grauert, ki obravnava obstoj in lastnosti holomorfnih preslikav afinih mnogoterosti v homogene mnogoterosti, se je slovenski matematik seznanil že med doktoratom, vendar takrat po njegovih besedah še ni bil dovolj zrel, da bi lahko teorijo postavil na nove temelje in vanjo pripeljal bistveno nove metode, kar je omogočilo nov zagon in vrsto novih aplikacij. »Gromov je za svoje pionirsko delo na različnih področjih matematike leta 2009 prejel Abelovo nagrado, ki je v matematiki ekvivalent Nobelove nagrade.

»Da sem se začel podrobneje ukvarjati s teorijo Oka-Grauert-Gromov, je pripomogel tudi profesor Josip Globevnik. Leta 1997 sem se vrnil v Ljubljano, potem ko sem bil več let profesor na Univerzi Wisconsin v Madisonu. Zaprtil me je za pomoč pri razumevanju članka Gromova na to temo, s katerim se je ukvarjala doktorska študentka Jasna Prezelj.« In s skupnimi močmi jima je v nekaj letih uspel ključen preboj. »Izkazalo se je, da se članka Gromova, čeprav je bil objavljen že leta 1989, ni nihče pritačnil v

Računam pravzaprav niti ne zelo veliko. To področje ni izrazito računsko, ampak geometrijsko, zato je potrebna dobra predstava, ki jo je treba kombinirati z analitičnimi metodami.

smislu, da bi ga podrobneje razložil. Niti nemška šola ne. Ideje so bile tam, rezultati so se začeli uporabljati, to pa je najslabše, kar se lahko zgodi v matematiki, torej, da se začnejo uporabljati teorije, ki niso razdelane in se ne ve, ali zares držijo ali ne.«

Kot pojasnjuje prof. Forstnerič, je Gromov »genij, ki pa pogosto poda le ideje in ne izdelava dokazov. S tem se potem pogosto ukvarjamo drugi matematiki. In tako sva z doktorsko študentko podrobno razložila ideje Gromova in podala ustrezne dokaze. Do nadaljnjih pomembnih rezultatov sem nato prišel med letoma 2005 in 2009, ko sem na podlagi vrste dobljenih ekvivalentnih lastnosti postavil smiselno definicijo Oka mnogoterosti.« V naslednjem desetletju je to postal osrednji pojem holomorfnе fleksibilnosti. »Najpreprostejša in obenem bistvena lastnost Oka mnogoterosti je, da lahko vsako holomorfnо preslikavo kompleksne evklidskega prostora v tako mnogoterost aproksimiramo s holomorfnimi preslikavami celotnega evklidskega prostora,« razlaga profesor in dodaja, da je tako rešil enega ključnih problemov v članku Gromova.

»Preden sem zares zagrizel v to področje, sem se posvetoval tudi z nekaterimi matematiki, ki so se ukvarjali z idejami Gromova, vendar jih niso razvozlali. Jasno mi je bilo, da je problem resen in težak, pa tudi pomemben, in da bi iz rešitve lahko sledilo veliko stvari. To je bila moja motivacija. In ko me nekaj začne zares zanimati, me nič ne ustavi. Področje je bilo privlačno, lepo, hkrati pa sem se čudil, kako je Kobajašijeva teorija rigidnosti dobro razdelana in razumljena, teorija fleksibilnosti pa ne, čeprav se je zdelo, da ponuja povsem naravno pričakovane in zelo uporabne rezultate.«

Teorijo Oka mnogoterosti je Forstnerič prikazal v monografiji, izdani pri založbi Springer (v letih 2011 in 2017). Pomembno priznanje je teorija doživela leta 2020. »Vsakih deset let Ameriško matematično društvo (AMS) v sodelovanju z nemško revijo Zentralblatt für Mathematik obnovi klasifikacijo matematičnih področij. Tako so v področje kompleksne analize na naš predlog uvedli novo podpodročje Princip Oka in Oka mnogoterosti (Oka principle and Oka manifolds). To je moj prispevek v klasifikacijo. Kolikor mi je znano, je to iz vrst slovenskih matematikov drugi tak primer.«

Aplikacija matematične teorije

Forstnerič je uvedel tudi druge pomembne nove metode na različnih področjih raziskav v kompleksni analizi in objavil vrsto del v najuglednejših matematičnih revijah. Leta 2019 je prejel prestižno mednarodno nagrado Stefana Bergmana, ki jo podeljuje Ameriško matematično društvo. Leta 2021 je imel vabljeno plenarno predavanje na osmem evropskem matematičnem kongresu.

Teorijo Oka lahko apliciramo na druga matematična področja, med temi na področje faktorizacije je holomorfnih matričnih funkcij, vložitve afinih mnogoterosti v evklidske prostore nizke dimenzije, v teoriji minimalnih ploskev, zelo verjetno pa se bodo nova področja odprla tudi med raziskavami v okviru projekta ERC. O uporabi kompleksne analize in še posebej teorije Oka v teoriji minimalnih ploskev je skupaj s sodelavcema iz Španije leta 2021 napisal monografijo, izdano pri založbi Springer. »Eden od ciljev projekta je ugotoviti, ali in do katere mere lahko

Oka domene – to so odprte podmnožice v evklidskem prostoru – okarakteriziramo z geometrijskimi lastnostmi njihovega roba. S kolegom iz Norveške sva letos odkrila, da je komplement večine zaprtih konvexskih množic v evklidskem prostoru Oka, kar je zanimiv nov fenomen. Če ilustriram: hiperravnina prereže prostor na dva pol-

V matematiki radi rečemo, da vsaka ideja potrebuje dvodnevni test, da razmisliš, ali je pravilna. Potem pa se pravo delo pravzaprav šele začne, ko je treba iti v podrobnosti ter znova in znova preverjati rezultate.

prostora, ki nista ne hiperbolična ne Oka mnogoterost. Če pa hiper-ravnino malce upognemo in jo naredimo konvexno, polprostor na konvexni strani postane hiperboličen, polprostor na konkavni strani pa Oka.« Potem so tu še mnogoterosti, pomembne v matematični fiziki, nadaljuje profesor. »Štiri-razsežni mnogoterosti prostor-čas lahko dodamo 'nevidne' dimenzije, ki predstavljajo druge fizikalne količine. Posebej pomembne s fizikalnega vidika so mnogoterosti Calabi-Yau in zanima me, katere med njimi so Oka.«

V znanosti je težko ločiti delo in prosti čas

In kako se profesorju porodijo ideje za nove rešitve? »To je težko povedati. Računam pravzaprav niti ne zelo veliko. To področje ni izrazito računsko, ampak geometrijsko, zato je potrebna dobra predstava, ki jo je treba kombinirati z analitičnimi metodami. Predvsem je za tako področje potrebnih velikih izkušenj, da lahko predvidevaš nove hipoteze. Do tega prideš šele po vrsti raziskav. Problem je najprej treba dobro ponotranjiti, se vanj vživeti. Dobro je treba usvojiti celotno zgodbo, pogledati celotno sliko, pregledati že znane rezultate in relacije med njimi, šele potem je možno, da se zgodi ideja, ki vodi do rešitve problema. Nekaj časa je treba problem nositi s seboj, z njim živeti,« poudarja vrhunski mate-

matik. »Pa tudi ko ideje pridejo, niso nujno pravilne. V matematiki radi rečemo, da vsaka ideja potrebuje dvodnevni test, da razmisliš, ali je pravilna. Potem pa se pravo delo pravzaprav šele začne, ko je treba iti v podrobnosti ter znova in znova preverjati rezultate.« Vendar kot še pravi, za ideje nikakor ni treba vseskozi sedeti v pisarni in gledati v matematične knjige ali tablo. »Ideje se tipično rodijo zunaj pisarne, ko denimo hodiš v hrib. V znanosti je pravzaprav težko ločiti med delovnim in prostim časom. Misli vseskozi uhajajo k matematičnim problemom. Je pa seveda res, da če si preobremenjen s pedagoškim delom in drugimi nalogami, je manj verjetno, da se bodo zgodili prebojni rezultati. V prostem času, kolikor ga imam, pa najraje hodim v naravo, poslušam glasbo in berem dobre knjige.«

Prof. Forstnerič priznava, da občuti neko stopnjo stresa, kadar dlje časa nikakor ne pride do rešitve problema. »Toda pri matematiki je dobro to, da je še toliko drugih zanimivih problemov. Pogosto se več let vračaš k isti zadevi, pa je ne moreš rešiti. Potem pa se na lepem izkaže, da so dobljene ideje dobrodošle neke drugje in da lahko rešiš drug, prav tako zanimiv problem.«

Projekt ERC, ki se bo izvajal na ljubljanski fakulteti za matematiko in fiziko, bo profesorju omogočil osredotočeno raziskovalno delo v prihodnjih petih letih in oblikovanje mednarodne skupine raziskovalcev. Poleg sebe bo lahko zaposlil še tri, pri čemer je dr. Forstnerič opozoril na birokratske ovire, pa tudi na nestimulativne plače za podoktorske raziskovalce, ki so precej nižje kot v večini evropskih držav. Seveda lahko delno zaprosijo tudi raziskovalce iz svoje programske skupine, vendar je treba paziti na zagotavljanje izvedbe pouka na fakulteti, zato manevrskega prostora ni veliko. Po njegovem mnenju bi morala država za znanstvenike omogočati hitrejšo pridobivanje dovoljenj za bivanje. Med slovenskimi doktorskimi študenti za kompleksno analizo in geometrijo trenutno ni velikega zanimanja. »Vendarle je treba priznati, da je to zahtevno področje. Potrebne- ga je veliko začetnega študija, zato se mladi raje usmerijo v področja matematike, kjer se stvari odvijajo lažje in hitreje. S tem seveda ni nič narobe, to le pomeni, da bomo k nam morali pripeljati tujce.«