

pomedeljek, 7.4.2008

# V. RIEMANNOVE PLOSKVE

1. pristop "intrinzično"

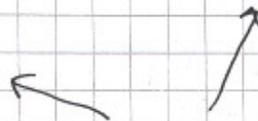
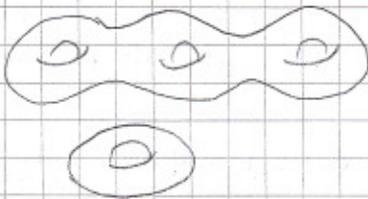
• Ploskve s kompleksno strukturo, pojem holo. in merom. sn. na R.P., holo preslikave, ..

2. pristop "ekstrinzično"

• kompleksne krivulje: v kompl. evklidskih prostorih  $\mathbb{C}^m$  ali  $\mathbb{C}P^n = \mathbb{R}P^{2n+1}$  razsežen kompl. prvj. prostor

Do sedaj:  $\mathbb{C}; \Omega \subset \mathbb{C}$  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  R.sfera

Kompaktne ploskve, orientabilne:



gor lahko dajemo

različne  $\mathbb{C}$  strukture:

Če moremo komp,  
lahko izrežemo

na sfero eno, na  več,  
nemda homotopno razsežne.

disk, itd.

## DEFINICIJA

Črta: bo  $X$  topološki prostor. KOMPLEKSNA

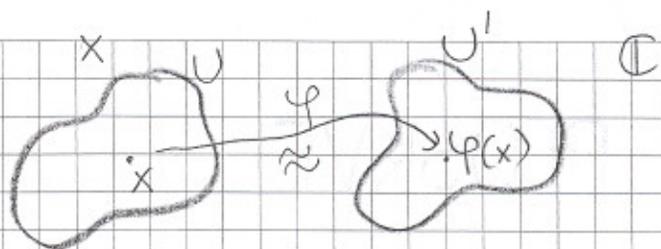
(1-DIMENZIONALNA KARTA) na  $X$  je par

$(U, \varphi)$ , kjer je  $U$  odprta množica v  $X$  in je

$\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{C}$  homeomorfizem  $U$  na neko

odprto množico  $U' \subset \mathbb{C}$ .

(uvedemo, da bi imeli lokalne koordinate)



$\varphi^{-1}: U' \rightarrow U$  lokalna parametrizacija  $U \subset \mathbb{C}$ .

### PRIMERI

①  $X = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ,  $U \text{ od } \mathbb{C}$ ,  $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{C}$  homeom.

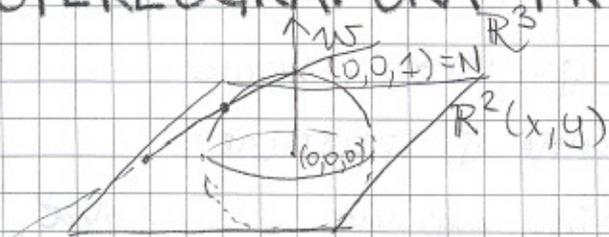
mpn.  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x + iy \in \mathbb{C}$

STANDARDNA (KOMPLEKSNA) KARTA na  $\mathbb{R}^2$

nestandardna:

$$(x, y) \rightarrow \frac{x + iy}{1 + x^2 + y^2} \quad \text{homp. karta}$$

### ② STEREOGRAFSKA PROJEKCIJA SFERE



$$S = \{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + w^2 = 1\}$$

$\bullet U = S \setminus N \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} = \mathbb{R}^2(x, y)$

$$\varphi(x, y, w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{1-w} + i \frac{y}{1-w} \in \mathbb{C}$$

Preveri:  $\varphi^{-1}(z) = \left( \frac{2 \operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right), z \in \mathbb{C}$

$\bullet V = S \setminus J \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}$

$$\psi(x, y, w) = \frac{x}{1+w} - i \frac{y}{1+w} = \frac{x - iy}{1+w}$$

Preveri:  $\psi$  je homeomorfizem na  $\mathbb{C}$  in

$$\psi^{-1}(z) = \left( \frac{2 \operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, -\frac{z \operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right)$$

# 5.3

⇒ sfera pokrita z 2 kartama

Ideja: S pomočjo kart def.  $\mathbb{C}$  strukturo na sfero;  
določiti, kaj je holo

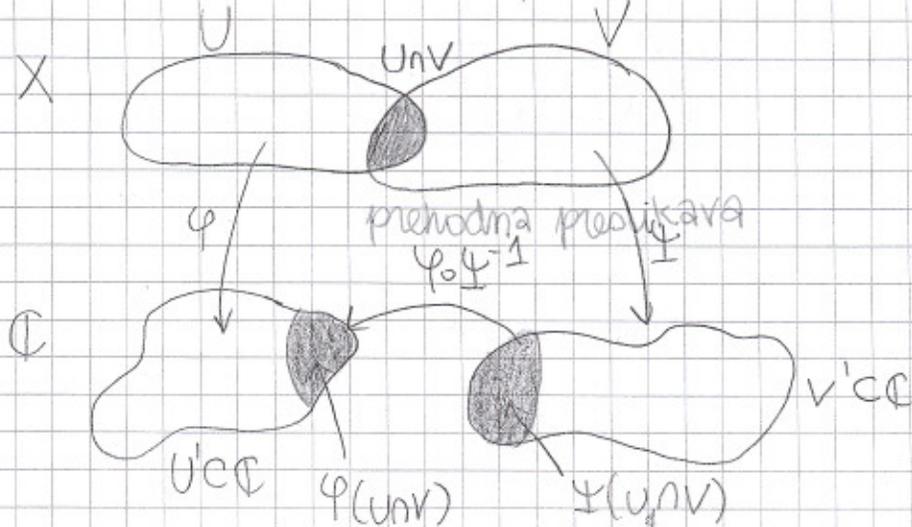
$f: S \rightarrow \mathbb{C}$  ali lahko def. ~~pre~~ merom. fn.?

$f \circ \varphi^{-1}$  mero. } hkrati! Če iščemo holo  $S \rightarrow \mathbb{C}$ ,  
 $f \circ \psi^{-1}$  mero. } se izkaže, da so to le konst.

$f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\underbrace{\varphi \circ \psi^{-1}}_{\text{homeom.}})$  ← ta mora biti holo.

## DEFINICIJA

Naj karta  $\varphi: U \rightarrow U'$  in  $\psi: V \rightarrow V' \subset \mathbb{C}$  dve kompleksni  
karti na top. pr.  $X$  ( $U, V$  odp.  $X, U', V'$  odp.  $\mathbb{C}$ )



Ti dve karti sta **HOLOMORFNO KOMPATIBILNI**, če  
je prehodna preslikava  $\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$  holomorfi  
(\*)

## OPOMBA

- ① Če je  $U \cap V = \emptyset \Rightarrow$  karti nizeleže kompatibilni. (pogo, ma prazno izpolnje)
- ②  $\varphi \circ \psi^{-1}$  je homeomorfizem:  
Če je holomorfn, je po znanem izreku tudi  
Akta

## 5.4

myjni inverz  $(\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}$  holo.

Torej je (\*) biholomorfna.

## PRIMER

Naj bosta  $\varphi: U = S \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$  in  $\psi: V = S \setminus J \rightarrow \mathbb{C}$  kompleksni karti: na sferi  $S$ , dobljeni s stereografsko projekcijo (prejšnji primer)

$$U \cap V = S \setminus \{N, J\}$$

$$\varphi: U \cap V \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$\hookrightarrow J$  gre čez izhodišče  $z = \varphi$

$$\psi: U \cap V \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^*$$

Prehodna preslikava:  $z \in \psi(U \cap V) = \mathbb{C}^* \Rightarrow z \in \varphi \exists: z \neq 0$

$$\varphi \circ \psi^{-1}(z) = \varphi \left( \frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2+1}, \frac{-2\operatorname{Im}z}{|z|^2+1}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \right) =$$

$$= \dots = \frac{1}{z} \quad \nwarrow \text{prehodna preslikava}$$

Prehodna preslikava  $\varphi \circ \psi^{-1}: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$

$$z \mapsto \frac{1}{z} \quad \text{holo.}$$

$\Rightarrow$  Karti sta biholomorfno kompatibilni.

7.4.2008

## DEFINICIJA

KOMPLEKSNI ATLAS na top. pr.  $X$  je družina

$$\mathcal{A} = \left\{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid U_\alpha \text{ odprta mm. v } X \right\}$$

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\cong} U'_\alpha \subset \mathbb{C} \text{ homeomorfize}$$

$$\alpha \in A = \text{indeksna množica}$$

tako da sta poljubni dve karti holo. kompatibilni:

$$\varphi_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

je biholomorfna  $\forall \alpha, \beta \in A$ , in je  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$

$$(U_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} U_\alpha \cap U_\beta)$$

$\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  odprto pokrije  $X$ .

## PRIMERI

$$1^\circ X = \mathbb{R}^2$$

$\mathcal{A} = \{(X, \varphi)\}$   $\varphi(x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$  je kompleksni atlas.

$$2^\circ X = \mathbb{R}^2$$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

poljuben homeom.

$\mathcal{A} = \{(X, \varphi)\}$  je kompleksni atlas.

$$3^\circ X = \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{A} = \{(X, \varphi), (U, \psi)\}$$

$\varphi$  kot v primeru  $1^\circ$ ,

$$U \text{ odprta } \subset \mathbb{R}^2, \psi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{C}$$

Kompatibilnost  $\varphi, \psi$ :

$\psi \circ \varphi^{-1}$  mora biti holo

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(z) = \psi(\varphi^{-1}(z)) \Leftrightarrow \psi \text{ holo fn. spr. } z = x + iy$$

$z$  Atlas

4° Stereografska projekcija na sferi:

$$\begin{array}{ccc} \varphi: S \setminus N & \xrightarrow{\approx} & \mathbb{C} \\ \psi: S \setminus J & \xrightarrow{\approx} & \mathbb{C} \\ \cup & & \end{array}$$

$\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  je kompleksni atlas na  $X = S =$  sfera.

$$\psi \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}^*$$

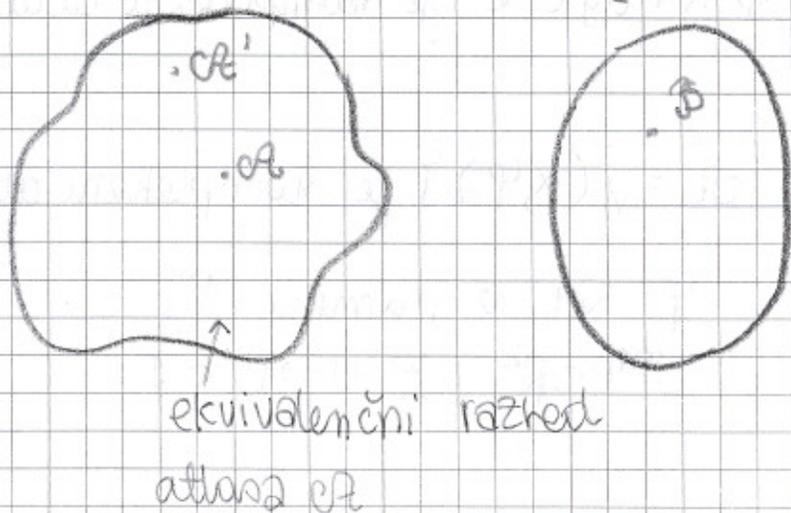
### DEFINICIJA

Dva kompleksna atlasa  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$  na  $X$  sta **EKVIVALENTNA** če je vsaka karta iz  $\mathcal{A}$  holo. kompatibilna z vsako karto iz  $\mathcal{A}'$ .

Ekvivalentno:  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  je spet kompleksen atlas.

### DEFINICIJA

**KOMPLEKSNA STRUKTURA** na top. pr.  $X$  je ekvivalenčni razred atlasov (glede na zgoraj def. relacijo kompatibilnosti.)



Ekvivalentno:  
kompl. str. na  $X$   
je določena z  
maksimalnim kompl.  
atlasom (= unija  
vseh med seboj  
ekviv. atlasov)

✓ praksi podamo  $\mathbb{C}$  strukturo tako, da izberemo atlas  
s čim manj kartami.

## DEFINICIJA

**RIEMANNOVA PLOSKEV** je Hausdorffov, 2-števni top. prostor  $X$  skupaj z izbiho kompleksne strukture na  $X$  (= izbira kompl. atlasa)

## PRIMERI

1°  $S$  = sfera, skupaj z opisanim atlasom, je  $\mathbb{R}$ -ploskev

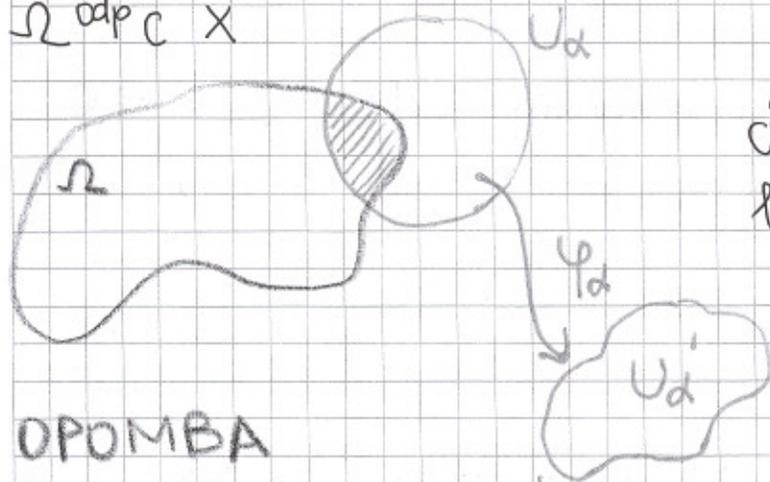
2°  $\mathbb{C}$ ;  $(\mathbb{C}, \text{id})$  standardna kompl. stru. na  $\mathbb{C}$

3°  $X$ ,  $\mathcal{A}$  kompl. atlas na  $X$

$\mathbb{R}$ -ploskev

$$\mathcal{A} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A \}$$

$\Omega \text{ odp } \subset X$



$$\tilde{\mathcal{A}} = \{ (U_\alpha \cap \Omega, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \Omega}) \mid \alpha \in A \}$$

kompl. atlas na  $\Omega$

(režiten atlas  $\mathcal{A}$  na  $\Omega$ )

Dobimo inducirano kompl. str. na  $\Omega$ .

## OPOMBA

Recimo, da je  $X$  množica brez izbrane topologije, na njem pa imamo nek "kompleksen atlas":

$\mathcal{U} = \{ U_\alpha \}$  pokrije  $X$

$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow U_\alpha' \subset \mathbb{C}$  bijektivne preslikave

$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  biholomorfna  $\forall \alpha, \beta$

↑ torej tudi homeom.

Sedaj na  $X$  obstaja natanko ena top. z lastnostjo,

do so vse karte homeomorfizmi:

( $U_\alpha$  odprta)  
 $\mathbb{R} \times X$

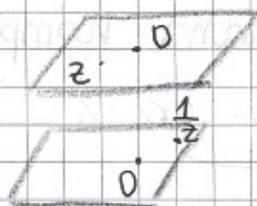
Dobijemo top.  $\mathbb{R}$  splošnem mi 2-števma in hausdorffova.  
 Če pa je, dobimo s tem  $\mathbb{R}$ -ploskev.

**PRIMER**

$S = \mathbb{C} \sqcup \mathbb{C}$

$\uparrow f$   
 disjunktna unija

$z \sim f(z) = \frac{1}{z}$



(0 me identificiramo)

S sfera;

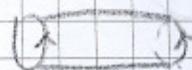
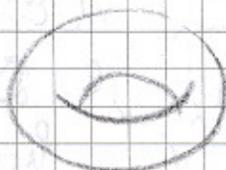
na prvi kopiji vzamemo  $z \rightarrow z$ .

na drugi kopiji imamo tudi standardno karto:  $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

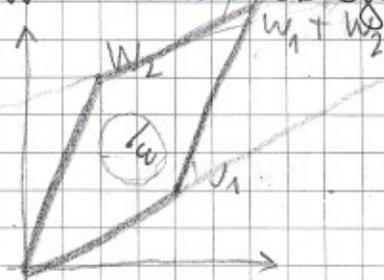
$\psi \circ \psi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$

**PRIMER**

kompleksni tonusi.



Naj bosta  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^*$  ( $= \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) števili, da  $\frac{w_2}{w_1} \notin \mathbb{R}$   
 ( neodvisni nad obsegom  $\mathbb{R}$  )



$\Gamma = \{kw_1 + mw_2 \mid k, n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{C}$

$\Gamma$  podgrupa grupe  $(\mathbb{C}, +)$  ← mreža (lattice)

$\Gamma$  diskretna (brez stekalšč)

$X = \mathbb{C} / \Gamma =$  kvocientna grupa.

$\text{rang}_{\mathbb{R}} \Gamma = 2$

$z, w \in \mathbb{C}, z \sim w \Leftrightarrow w - z \in \Gamma$

$\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} X = \mathbb{C} / \Gamma$

kvocientna projekcija

$\pi$  je lokalni homeom.

$\pi: D(a, \varepsilon) \rightarrow \pi(\cdot)$  je homeom za  $\forall \varepsilon > 0$  dovolj majhen  
 $D(a, \varepsilon) \cap \Gamma = \{0\}$

↑ To moramo zagotoviti

Zožitve  $\pi$  na take majhne kroge vzamemo za karte.  
 (oz. njihove univerte)

Prehodne preslikave:  
 translacija za elt iz  $\Gamma$



$b - a \in \Gamma$  taki krogi se identificirajo

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} + W$$

$w \in \Gamma$  (translacije)  $\rightarrow$  so holo., tony so inverzi komp.

Torej dobimo na  $X = \mathbb{C} / \Gamma$  komp. atlas.

Preveri, da je  $X$  komp,  $T_2$ .

POKLIC CADEJ!

14.4.2008

$X$   
 $\downarrow f$  lokalni homeom.  
 $Y \leftarrow \mathbb{R}$ . ploskev

$\left. \begin{array}{l} \text{vaje} \\ \Rightarrow \text{ma } X \text{ obstaja (notanko do} \\ \text{biholomorfizma) struktura } \mathbb{R}. \\ \text{ploskve, da je } f: X \rightarrow Y \text{ holo.} \end{array} \right\}$

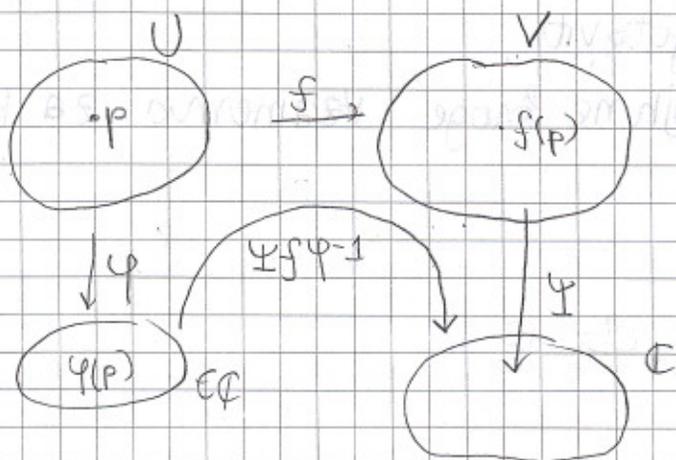
Na vajah:

$X, Y$   $\mathbb{R}$ . ploskvi

$X \xrightarrow{f} Y$  holomorfna  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall p \in X \exists$  lokalna karta  $(U, \varphi)$

5.10

ma  $X$ ,  $p \in U$  in lok. karta  $(U, \varphi)$  na  $Y$ ,  $f(p) \in V$ ,  
 tako da je funkcija  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  holomorfná v okolici  
 točke  $\varphi(p) \in \mathbb{C}$ .



Naloga:

def. je neodvisna od izbire kart  $(U, \varphi)$  in  $(V, \varphi')$ , ker  
 so prehodne preslitave holo.

$$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} = \varphi' \underbrace{\varphi^{-1}}_{\text{id}} \circ \underbrace{f \circ \varphi^{-1}}_{\text{id}} \circ \varphi (\varphi')^{-1} = \underbrace{(\varphi' \circ \varphi^{-1})}_{\text{hdo}} \circ \underbrace{(f \circ \varphi^{-1})}_{\text{hdo}} \circ \underbrace{(\varphi (\varphi')^{-1})}_{\text{hdo}}$$

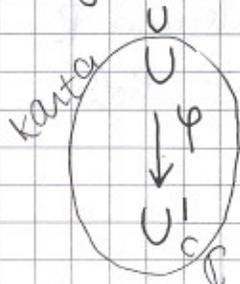
$\Rightarrow \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$  in  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  so

hkrati: holo (v okolici  $\varphi'(p)$  oz  $\varphi(p)$ )

Poseben primer:

$Y = \mathbb{C}$  (standardna sv.)

$f: X \rightarrow \mathbb{C}$  holo fn.



$f \circ \varphi^{-1}$  holo

Poseben primer:

$X = \mathbb{C}$ , ali pa  $X \subset \mathbb{C}$

mpz.  $X = \mathbb{D}$

$\mathbb{C} \xrightarrow{f} Y = \mathbb{R}$  ploskev  
 holo. premica v  $Y$

(včasih so use take

konstantne; mpz.  $Y = \mathbb{D}$ )

5.11

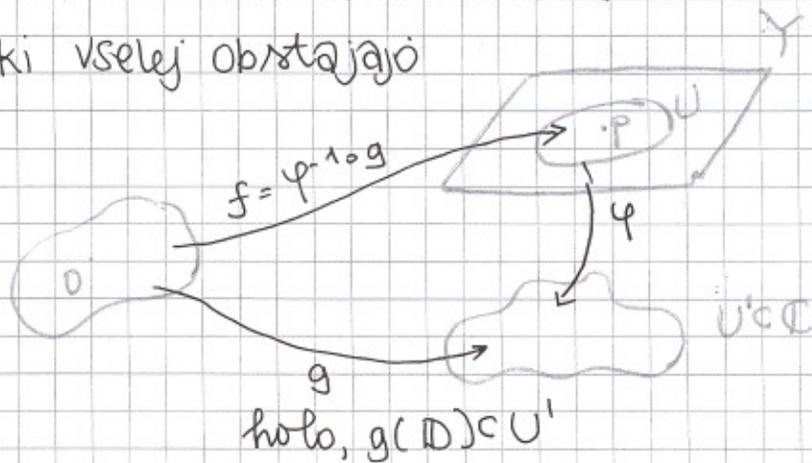
$Y$  hiperbolična (v smislu Brodyja in Kobayashija), če je vsaka holo. pr.  $\mathbb{C} \xrightarrow{f} Y$  konstantna.

Picardov izrek  $\Rightarrow$  vsaka odprta množica  $Y \subset \mathbb{C}$ , ki ne vsebuje vsaj dveh števil, je hiperbolična.

Primeri nehiperboličnih ploskev:  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ,  $\mathbb{C}/\pi$  = torus,  $\mathbb{P}^1$  (projektivna premica) - vsi resti so vse ostale  $\mathbb{R}$  ploskve hiperbolične

$\mathbb{D} \xrightarrow{f} Y$  holo  
 disk  
 HOLOMORFEN DISK  $\mathbb{D} \rightarrow Y$

Taki vselej obstajajo



### DEFINICIJA

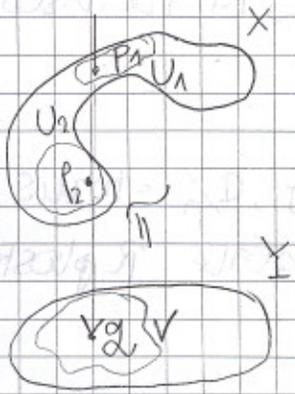
Preslikava  $f: X \rightarrow Y$  je BIHOLOMORFNA, če je holo in bijektivna.

Iz zmanjšani lastnosti holo. sn. sledi, da je tudi  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  holo.

5.12

# HOLOMORFNI KVOCIENTI

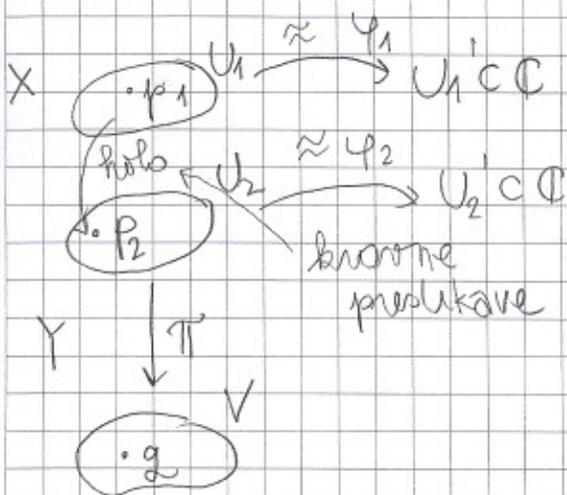
daaj bo  $X$  R. ploskev in  $\pi: X \rightarrow Y$  nek lokalni homeomorfizem,  $\pi(X) = Y$ .



Problem: ma  $Y$  npejati strukturo R. ploskve, tako da bo  $\pi$  holomorfna.

$$\tilde{\pi}: U_1 \xrightarrow{\approx} V \text{ homeom.}$$

$$\tilde{\pi}: U_2 \xrightarrow{\approx} V \text{ homeo.}$$



$U_1, U_2$  izberemo tako majhni, da imamo na njih lokalne koordinate.

Naravna ideja: homeom.

$$\varphi_1 \circ (\pi|_{U_1})^{-1}: V \rightarrow U_1' \text{ proglasim za karto}$$

$$\text{Tudi } \varphi_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1}: V \rightarrow U_2' \text{ tudi karta.}$$

Kompatibilnost: +  $\pi$  holo: problem.

$$(\pi|_{U_2})^{-1} \circ \pi|_{U_1}: U_1 \rightarrow U_2 \text{ mora biti holo, ker je}$$

kompozicija holo preslikav  $\rightarrow$  To v splošnem ne velja brez dodatne predp. na  $\pi$ .

5.13

Naj bo  $X$   $\mathbb{R}$ -ploskev.

$\text{Aut } X =$  holomorfni avtomorfizmi  $X$

$= \{ \gamma_n : X \rightarrow X \text{ hol., bijekt. vne} \}$

grupa za kompoziranje

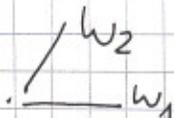
$\Gamma \subset \text{Aut } X$  naj bo meka podgrupa.

**PRIMER**

$X = \mathbb{C}, \text{Aut } \mathbb{C} = \{ z \rightarrow az + b; a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \}$

$\Gamma = \{ nw_1 + mw_2 \mid n, m \in \mathbb{Z} \} \subset \mathbb{C}$  abelova podgrpa

$w_1, w_2 \in \mathbb{C}_x, w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$



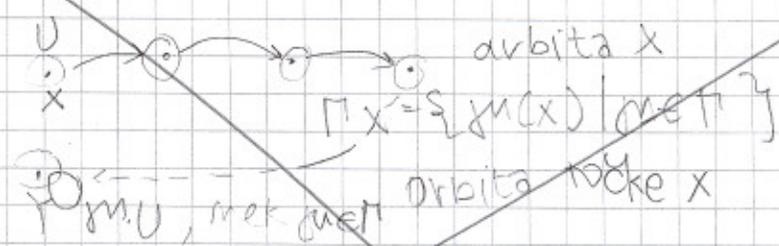
$\Gamma$  lahko razumem kot podgrupo  $\nu$   $\text{Aut } \mathbb{C}$

$w \rightsquigarrow \gamma_w \in \text{Aut } \mathbb{C}$

$\gamma_w(z) = z + w$  (translacija)

**DEFINICIJA**

$\Gamma$  deluje **PROSTO** (ali brez fiksnih točk) na  $X$ ,  
 če je  $\gamma_n(x) \neq x \quad \forall x \in X, \forall \gamma_n \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$



$\Gamma$  deluje na  $X$  popolnoma nevezno, če velja:

$x, y \in X, y \notin \Gamma \cdot x$  ( $x, y$  pripadata različnim orbitam)

potem  $\exists U \text{ odpr} \ni x; \exists V \text{ odpr} \ni y$  tako da  $\gamma_n \cdot U \cap V = \emptyset, \forall \gamma_n \in \Gamma$

( $\gamma_n \cdot U = \{ \gamma_n(p) \mid p \in U \}$ )

5.14

DEFINICIJA.

$\Gamma$  deluje PROSTO (ali brez fiksnih točk) na  $X$ ,  
če je  $\sigma(x) \neq x, \forall x \in X, \forall \sigma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ .

$\Gamma$  deluje na  $X$  POBOLNOMA NEZVEZNO, če velja:

1° Za vsak  $x \in X$  obstaja odprta okolica  
 $U \subset X$ , tako da je

$$\sigma(U) \cap U = \emptyset \quad \forall \sigma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$$

2°  $x, y \in X, y \notin \Gamma_x \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma(x) \mid \sigma \in \Gamma\}$ ,

$\exists U, V$  odprti v  $X, x \in U, y \in V$ ,

tako da velja:

$$\sigma(U) \cap V = \emptyset, \quad \forall \sigma \in \Gamma.$$

## OPOMBA

Od tod sledi, da ji

$$(p \cdot U) \cap (p' \cdot V) = \emptyset \quad \forall p, p' \in \Gamma$$

$$X/\Gamma := \text{prostor orbit} = X/\sim$$

$$x \sim y \Leftrightarrow y = \gamma(x) \text{ za nek } \gamma \in \Gamma$$

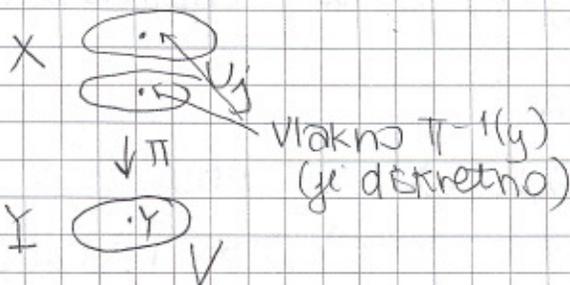
## DEFINICIJA (krovná projekcija)

Naj bosta  $X$  in  $Y$  top. prostora in  $\pi: X \rightarrow Y$  zvezna preslikava. Ta preslikava je krovná preslikava, če  $\forall y \in Y \exists \{U_i \in \mathcal{V}\}$   $y \in U_i$ , tako da je  $\pi^{-1}(U_i) = \bigsqcup U_j$

## IZREK

disjunktna unija odprtih množic  $U_j$   
 $\exists \pi: U_j \rightarrow V$  je homeom.,  $\forall j$ .

Sveznj z diskretnim vlaknom nad  $Y$ .



## IZREK

Naj bo  $X$  R. ploskev in  $\Gamma \subset \text{Aut } X$  neka grupa holo arbo morfizmov  $X$ , ki deluje prosto in popolnoma nezvezno na  $X$ . Tedaj ima prostor orbit  $Y = X/\Gamma$  strukturo R. ploskve, za katero je kvocientna projekcija  $\pi: X \rightarrow X/\Gamma = Y$  holomorfna krovná projekcija (Analogen izrek velja v kategoriji top. pr. ali v kat. gladikih mnt.)

5.16

DOKAZ

 $y \in Y$ 

||

orbita grupe  $\Gamma$  $x \in X$ 

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

||

 $x \in X, [x] = y$  $\pi^{-1}(y) = \{ \gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma \}$  $V = \pi^{-1}(y)$  orbita grupe  $\Gamma$ 

Ker grupa deluje povsemu mezuvezno mi brez fiksnih točk, lahko najdemo okolico  $U$  točke  $x$ , tako da je  $\gamma \cdot U \cap U = \emptyset, \forall \gamma \neq \text{Id}$ .

 $V := \pi^{-1}(y) \subset X$  $\pi^{-1}(y) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot U$ , paroma disjunkt.Na  $V$  vzamemo kvocient. top. $U$  odprta. $V = \pi^{-1}(y)$  je odprta  $\Leftrightarrow \pi^{-1}(y)$  odprtaKer je  $\pi^{-1}(y) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot U$  mi je vsak  $\gamma$  homeom. pl.  $U$ 

je to res.

Torej je  $\pi$  odprta preslikava

(slika odprte je odprta)

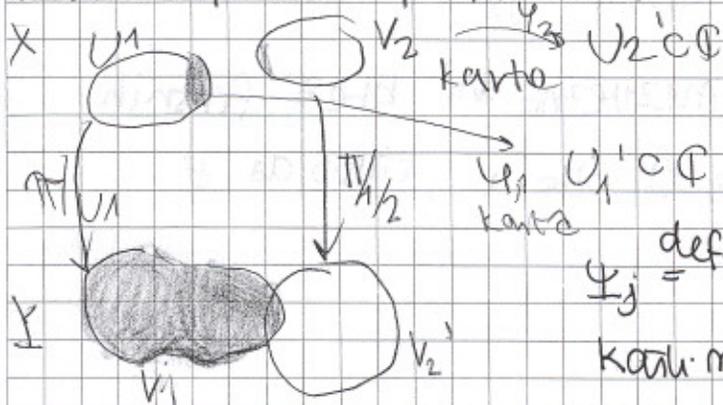
 $\pi: \gamma \cdot U \xrightarrow{\cong} V$  homeom.  $\Rightarrow \pi$  krovná proj.Vzamemo  $x \in X$  in  $U$  odp.  $x$  dovolj majhno, da obstaja holo karta  $U \xrightarrow{\cong} U' \subset \mathbb{C}$ .

5.17

Sedaj vzamemo presl.  $\Psi = \varphi \circ (\pi|_U)^{-1}: U \rightarrow U' \in \mathbb{C}$   
(homeom)

za lokalno karto na  $Y$ .

KOMPATIBILNOST TAKIH KART



$$\Psi_2 \circ \varphi_1^{-1} = (\varphi_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ (\pi|_{U_1})^{-1})^{-1} = \varphi_2 [(\pi|_{U_2})^{-1} \circ \pi|_{U_1}] \varphi_1^{-1}$$

Če preslikava ohranja orbite, torej  $x \rightarrow \gamma^n \cdot x, \gamma \in \mathbb{P}$   
Manifoloma še odvisen od  $x$   
zvezna (homeom.).

Karto je  $m$  neodvisen od  $X$  ma vsaki povezani  
komponenti def. od močjo.  
 $\neq$  holo.

Vse take karte  $(U, \Psi)$  na  $Y$  sestavljajo kompl.  
atlas.

Če konstr. očitno, da je  $\pi$  holo.

## PRIMER

$$\textcircled{1} \Gamma = \{ m | k \in \mathbb{Z} \}$$

$$f_{1k}(z) = z + k \cdot a, \quad a \in \mathbb{C}$$

translacije

$$\Gamma \subset \text{Aut}(\mathbb{C}) \quad a \in \mathbb{C}_*$$

$$\Gamma \cdot z = \{ z + k \cdot a \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

 $\mathbb{C}$ 
 $\downarrow \pi$ 

$$\mathbb{C} / \Gamma = \mathbb{C}_*$$

 $\mathbb{C}_*$  Iščemo  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_*$   $a$ -periodična

$$\pi(z) = e^{2\pi i z / a} \in \mathbb{C}_*$$

$$\pi(z + ka) = e^{2\pi i (z + ka) / a} = e^{2\pi i z / a} \cdot e^{2\pi i \cdot k}$$

$$a = 1$$

$$\pi(z) = e^{2\pi i z}$$

$$\textcircled{2} \Gamma = \left\{ m w_1, m w_2 \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} / \Gamma = \text{komp. torus}$$

$$\frac{w_2}{w_1} \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{3} \Gamma \subset \text{Aut}(\mathbb{D}) \quad (\text{Fuchsova / Kleinova})$$

$\mathbb{D} / \Gamma$  skoraj vse R. ploskve so te oblike. Vse hiperbolične R. pl. so te oblike.

21.4.2008

$\Gamma$  grupa hol. aut  $X$ ;  $X \xrightarrow{\pi} X / \Gamma = Y$  pristo mi popolnoma nezvezano delovanje;

Dodp  $X$  je **FUNDAMENTALNA DOMENA**,

Če je  $\pi(\mathbb{D}) = Y$  in je  $\pi|_{\mathbb{D}}$  injektivna

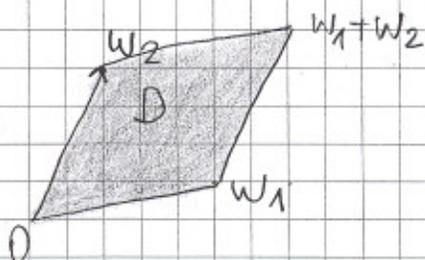
$$(\pi(x) = \pi(y) \ \& \ x, y \in \mathbb{D}) \Rightarrow x, y \in \partial \mathbb{D}$$

*Alta*

5.19

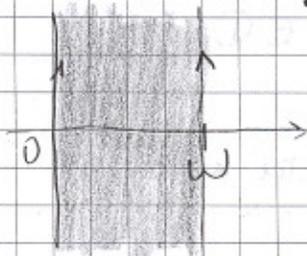
# PRIMER

(1)  $\Gamma = \{ m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \} \subset \mathbb{C}$



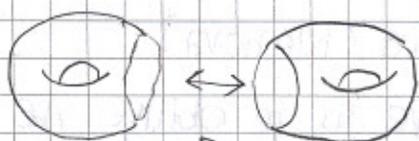
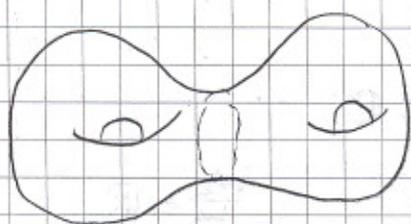
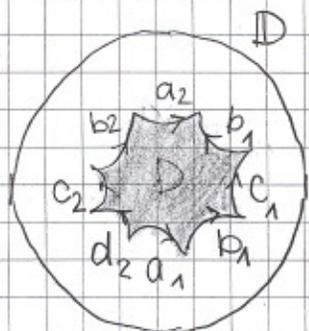
(2) Če je  $\bar{D}$  kompaktno, je  $Y = \mathbb{C}/\Gamma$  kompakten.

$\mathbb{C}/\Gamma = \mathbb{C}^*$



$\Gamma = \{ m\omega \mid m \in \mathbb{Z} \}$

(3)  $X = \mathbb{D}$



↑ iz  $a_1, a_2, b_1, b_2$

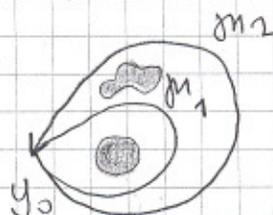
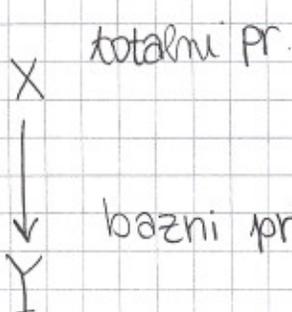
## UNIVERZALNI KROVNI PROSTOR

Naj bo  $Y$  poljubna R. ploskev, potem  $\exists$  meka enostavno povezana R. ploskev  $X$  (vsaka sklenjena krivulja v  $X$  je homotopna konstanti) in holomorfná krovná proj.  $\Pi: X \rightarrow Y$  (univerzálna krovná proj.)

↑  $X$  enostavno pov

5.20

Do izomorfizma motačno je  $X$  enolično določem.



### PRIMER

$$Y = \mathbb{C}_*, X = \mathbb{C} \quad \pi: X \rightarrow Y, z \mapsto e^z$$

Poleg tega dobimo na  $X$  meko grupo  $\Gamma \subset \text{Aut } X$ , ki deluje prosto, popolnoma nevezno, tranzitivno na vlaknih.

$\Gamma =$  grupa kvornih translacij kvorne presj.  $\pi: X \rightarrow Y \Rightarrow Y = X/\Gamma$

### POSLEDICA

Vsaka Riemannova ploskev je oblike  $X = X/\Gamma$ , kjer je  $X$  meka enostavno pov. R. ploskev in je  $\Gamma \subset \text{Aut } Y$  meka grupa, ki deluje prosto in popolnoma nevezno na  $X$ .

Očito imamo (vsaj) tri enost. pov. R. ploskve:

$$S = \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ (Riemannova sfera), } \mathbb{C}, \mathbb{D}$$

### IZREK (RIEMANN, KOEBE)

Vsaka povezana in enostavno povezana R. ploskev je biholomorfna ene od ploskev  $\mathbb{P}^1, \mathbb{C}, \mathbb{D}$

Torej je vsaka Riemannova ploskev kvocijent ene od ploskev  $\mathbb{P}^1, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ .

$$\text{Aut } \mathbb{P}^1 = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0 \right\}$$

$$-\frac{d}{c} \mapsto \infty; \infty \mapsto \frac{a}{c}$$

# 5.21

Preveri: Vsak avtomorfizem  $P^1$  ima fiksno točko  $\varphi(z) = z$   
 $\Rightarrow P^1$  nima moblovega metrič. kvocienta

$\mathbb{C}$

$$\text{Aut } \mathbb{C} = \{ z \mapsto az + b; a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \}$$

$a \neq 1 \Rightarrow \varphi$  ima fiksno točko

$$\begin{aligned} \subseteq \text{Aut } \mathbb{C} \quad a z + b &= z & a \neq 1 &\Rightarrow z = \frac{b}{1-a} \\ (a-1)z &= -b \end{aligned}$$

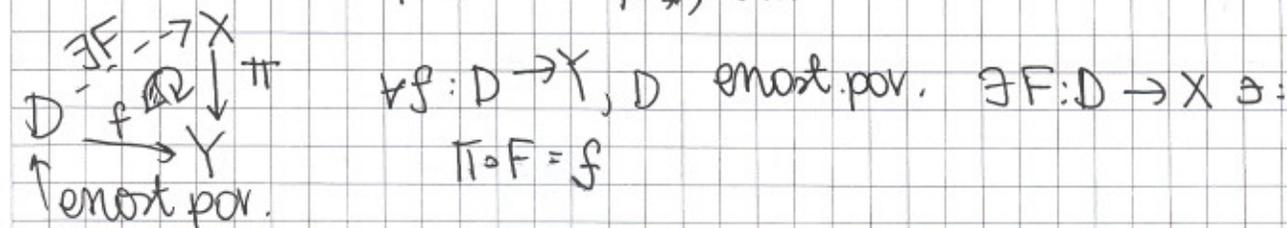
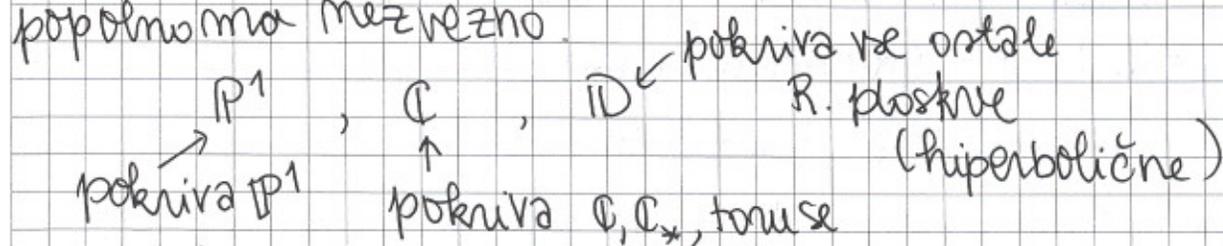
$$G = \{ z \mapsto z + b \mid b \in \mathbb{C} \} \cong \mathbb{C}$$

$\Gamma \subset G$

1. primer  $\Gamma = \{ m \cdot w; m \in \mathbb{Z}, z \mapsto e^{\frac{2\pi i}{w}} z \}; w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$   
 $\Rightarrow \mathbb{C}/\Gamma = \mathbb{C}_* \quad z \mapsto e^{\frac{2\pi i}{w}} z$

2. primer  $\Gamma = \{ m w_1 + n w_2 \} \quad \frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$   
 $\mathbb{C}/\Gamma = \text{torus}$

Če dodamo še kak generator, grupe ne bi delovale popolnoma brezno.



## PRIMER

$$X = D, D = \mathbb{C}$$

Liouville:  $F = \text{konst} \Rightarrow f = \text{konst}$ .

(takšnim ploskvam pravimo hiperbolične)

## 5.22

MEROMORFNE FUNKCIJE KOT HOLOMORFNE  
PRESLIKAVE V R. SFERO  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 

Lokalno:

$a \in \mathbb{C}$ ,  $f$  holomorfná funkcia v neki punkturani okolici  
točke  $a$ ,  $z$  izol. sing. v  $a$ .

Recimo, da  $f$  v  $z=a$  ima pol.

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \text{reg. def.} = \frac{h(z)}{(z-a)^n}$$

$h$  holomorfná v okolici  $a$ ,  $h(a) \neq 0$

$$z \rightarrow a \Rightarrow |f(z)| \rightarrow +\infty$$

$$U \setminus \{a\} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$$

$\uparrow$   
 $U$

$\xrightarrow{f}$   
 $a \rightarrow \infty$

Razširjena preslikava v  $\mathbb{P}^1$   
je zvezna.

dodamo  $a$

Trdimo, da je tako razširjena preslikava holomorfná  
(kot preslikava  $U \rightarrow \mathbb{P}^1$ )

Jo preverimo tako, da si ogledamo  $\Psi \circ f$ , kjer je  $\Psi$   
neka lokalna karta na  $\mathbb{P}^1$ .

$$V = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$W \longrightarrow \frac{1}{W}$$

$$\infty \longrightarrow 0$$

$$(\Psi \circ f)(z) = \frac{1}{f(z)} = (z-a)^n \frac{1}{h(z)}$$

Ta pa je holomorfná v okolici  
 $a$ , morda tudi v  $z=a$

**IZREK**

Naj bo  $f$  holomorfna fncja v neki okolici (pункtirani) okolici  $U \setminus \{a\} \subset \mathbb{C}$  točke  $a \in \mathbb{C}$ . Ekvivalentno je:

(a)  $f$  ima v točki  $a$  odpravljivo singularnost ali pa pol

(b)  $f$  se razširi do holomorfne preslikave  $U \rightarrow \mathbb{P}^1$   
 ( $f$  ima pol v  $a \iff f(a) = \infty \in \mathbb{P}^1$ )

**DOKAZ**

(a)  $\Rightarrow$  (b)  $\checkmark$

(b)  $\Rightarrow$  (a)

Denimo, da se  $f$  razširi v  $a$

$f(a) \in \mathbb{C} \Rightarrow$  odpravljiva singularnost

$f(a) = \infty$ . Ker je  $f$  zvezna v  $a$ , sledi  $f(z) \neq 0$ ,

$\forall z$  v neki ~~pункtirani~~ okolici  $\forall \{a\}$  točke  $a$

$$f(U \setminus \{a\}) \subset \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \ni w$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \Psi & & \downarrow \\ \mathbb{C} & & \frac{1}{w} \end{array}$$

Bo predpostavki (b) je kompozicija

$$(\Psi \circ f)(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \text{holomorfna v okolici}$$

$$= (z-a)^n g(z), \quad g \stackrel{z=a}{\text{holo}}, \quad g(a) \neq 0$$

$$(\Psi \circ f)(a) = 0 \quad (\text{ničla v } a)$$

5.24

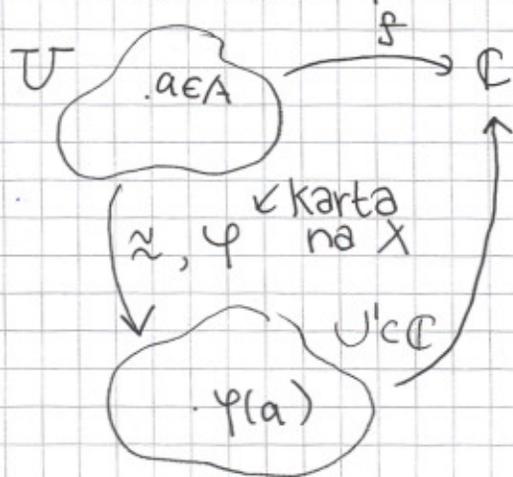
$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^n g(z)} = \frac{h(z)}{(z-a)^n} \quad (h = \frac{1}{g} \text{ holó})$$

$\Rightarrow$  pol reda  $n$  v  $z=a$

Meromorfne fn. na R. pl.  $X$ :

$$X \setminus A \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

A neka diskretna podmnožica v  $X$ .



$f$  meromorfna  $\Leftrightarrow$   
 $f \circ \varphi^{-1}$  meromorfna za  
 vse lokalne karte  $\varphi$  na  $X$ .

**PRIMER**

$$X = \mathbb{P}^1 \supset U \text{ odprta } \ni \infty$$

$$f: U \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ holó.}$$

Kdaj je  $f$  meromorfna v  $\infty$ ?

$U$  izberemo tako, da ne vsebuje točke  $\infty$ .



$$\begin{array}{l} \infty \xrightarrow{\varphi} 0 \\ U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \\ \frac{1}{z} \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{z} \end{array}$$

$$(f \circ \varphi^{-1})(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

5.25

$f$  meromorfná v  $\infty \Leftrightarrow z \rightarrow f\left(\frac{1}{z}\right)$  <sup>meno</sup> holo v 0.

Laurentov rozvoj  $f$  v  $\infty$

(na kolebarvi  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ )

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \frac{1}{z^n} \quad \leftarrow \text{Kdež je to merom v 0?}$$

To velja  $\Leftrightarrow$  glavni del je končen.

$$\left[ f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^N \frac{c_m}{z^n} \right]$$

1. primer

$$f(\infty) \in \mathbb{C}$$

Ta funkcija je holo v  $\infty \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{z}\right)$  je holo v 0.

$$\Leftrightarrow c_m = 0 \quad \forall m > 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^n \quad \text{za } z \text{ blizu } 0$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

↑ pogoj za holomorfnost v  $\infty$

$$f(\infty) = c_0$$

2. primer

$$\infty \xrightarrow{f} \infty$$

 $f\left(\frac{1}{z}\right)$ : Kdaj je ta merom  $n \cdot z = 0$ ?

$$0 \rightarrow \infty \text{ (pol v } 0)$$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{C_{-n}}{z^n} + \frac{C_{-n+1}}{z^{n-1}} + \dots + C_0 + C_1 z + \dots$$

končen glavni del

$$f(z) = C_{-n} z^n + C_{-n+1} z^{n-1} + \dots + C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \dots$$

polinom v  $z$ 

↑ ta holo fn.

$$\text{je v } \infty = 0$$

Poseben primer:

holo. polinom  $p(z)$ ,  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se razširi kotmerom. fn. na  $\mathbb{P}^1 \Rightarrow$  holo preslikava  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ ;

$$\infty \mapsto \infty$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & \cup & \\ \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & p \text{ pol.} & \end{array}$$

Naloga:

Dokaži, da so vse holo fn.  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  podane zracionalnimi fn.  $z \rightarrow \frac{P(z)}{Q(z)}$ 

TRDITEV

12.5.2007

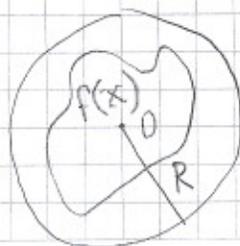
$X$  kompaktna, povezana  $\mathbb{R}$ . prostor in  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfná funkcija, potem je  $f$  konstantna.

DOKAZ

$$f(x) \in \mathbb{C}$$

 $\underbrace{\quad}_{\text{kompaktna}}$ 

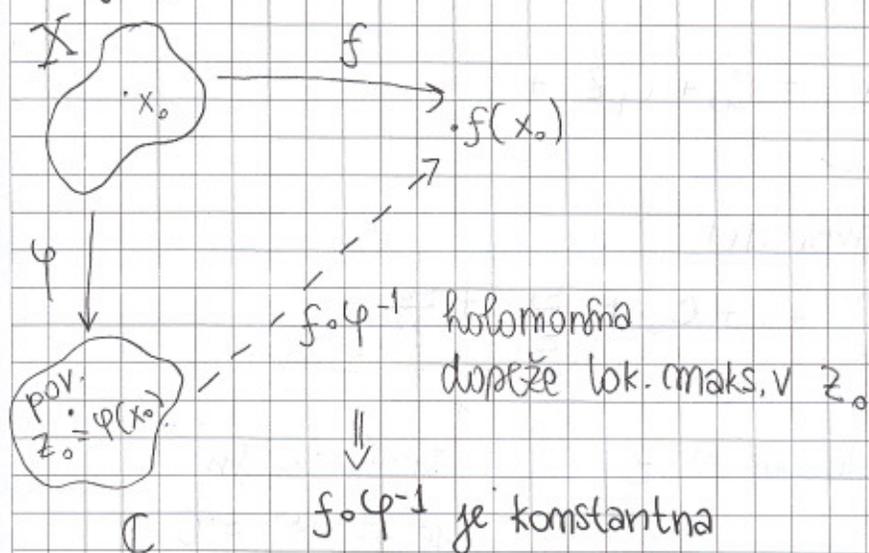
$$R = \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$$



5.27

Ker je  $X$  kompaktna, obstaja  $x_0 \in X$ ,  $|f(x_0)| = R$ .

V točki  $x_0$  funkcija  $|f|$  dopeže svoj maksimum. Ker je  $f$  holomorfná (v vsaki lokalni karti okrog  $x_0$ ), sledi, da je  $f$  konstantna.



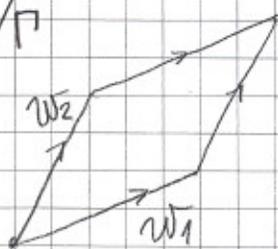
$\Rightarrow f$  konstantna na neki okolici  $U \ni x_0$  v  $X$ . Od tod sledi, da je  $f$  konst. na  $X$ .

(po principu identičnosti, tu ga dokažemo enako kot za  $f_n$ .)

## FUNKCIJE NA TORUSU

$$X = \mathbb{C} / \Gamma$$

torus kompaktem



$$w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$$

$$\Gamma = \{m w_1 + n w_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

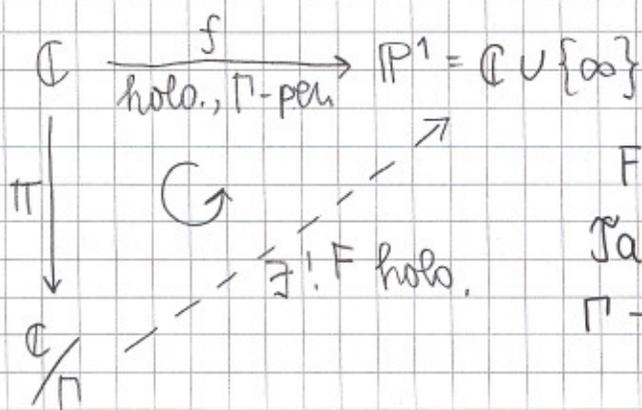
holomorfnih funkcij na  $X$  ni.

meromorfne  $f_n$ : 
$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{w \in \Gamma \\ w \neq 0}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

konvergira k meromorfni  $f_n$  na  $\mathbb{C}$

Ta fn. ima pol reda 2 v vsaki točki  $w \in \Gamma$ .

Dokaži:  $f$  je  $\Gamma$ -periodična, tj.  $f(z+w) = f(z) \quad \forall w_0 \in \Gamma$



$$F(\pi(z)) := f(z)$$

Ta def. je dobra, ker je  $f$   $\Gamma$ -periodična

Tako dobljena funkcija  $F: \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$  se imenuje Weierstrassova  $\mathcal{P}$ -funkcija.

S pomočjo  $\mathcal{P}$  in njenih odvodov dobimo zelo veliko holomorfnih fn. na torusu (holom. prese. v  $\mathbb{P}^1$ )

## IZREK

Na vsaki kompaktni  $\mathbb{R}$ -ploskvi obstaja "veliko" holomorfnih funkcij.

Na vsaki nekompaktni (odprti)  $\mathbb{R}$ -ploskvi  $\exists$  tudi veliko holomorfnih fn.

$X$  nekompaktna; potem

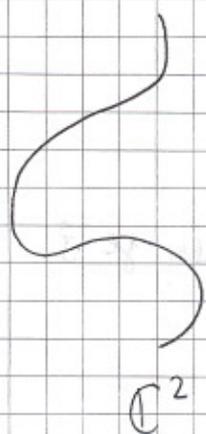
(a) holomorfne fn. na  $X$  ločijo točke ( $x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow \exists f \in \mathcal{H}(X) : f(x_1) \neq f(x_2)$ )

(b)  $X$  je holom. konv.:  $\forall \{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$  brez stekoušča v  $X$   $\exists$  taka holom. fn.  $f \in \mathcal{H}(X)$ , da je  $|f(x_j)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$

$\hat{K}_X = K \cup \{ \text{relativno komp. por. komponente od } X \setminus K \}$  (dokaži, da  $X \text{ odpr} \subset \mathbb{C}$ )

$K^{\text{komp}} \subset X \Rightarrow K_X := \{ z \in X; \|f\|_K \leq 1, \forall f \in \mathcal{H}(X) \}$  komp.

# RIEMANNOVE PLOSKVE KOT KOMPLEKSNE (AFINE ALI PROJEKTIVNE) KRIVULJE



Najpreprostejši primer:

kompleksne krivulje v  $\mathbb{C}^2$

$$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \{(z, w) \mid z, w \in \mathbb{C}\}$$

$$P(z, w) = \sum_{j, k} c_{j, k} z^j w^k \quad \text{končna vsota}$$

$\Rightarrow P$  holomorfni polinom  $z, w$

$$c_{j, k} \in \mathbb{C}$$

Neholomorfni polinomi vsebujejo še člene  $\bar{z}, \bar{w}$ .

$P$  nekompst. holo. polinom

$$C = \{(z, w) \mid P(z, w) = 0\} \quad \text{afina (ravninska) algebraična}$$

Krivulja  $\uparrow$  def. s polinomom

## IZREK

Vsaka afina algebraična krivulja je Riemannova ploskev izven neke homotne podmnožice  $C_{\text{sing}} = \text{singularna množica } C$



$$C \setminus C_{\text{sing}} = C_{\text{reg}}$$

## DOKAZ

Znano je: kolobar polimomov

$$\mathbb{C}[z, w] = \{\text{holomorfni polinomi v } z, w\} \quad \text{je}$$

Gaussov, tj. ima enolično faktorizacijo v nerazcepne

polimome:  $P = P_1^{k_1} \cdots P_m^{k_m}$ ,  $P_j$  polinom,  $k_j \in \mathbb{N}$

$$\{P=0\} = \bigcup_{j=1}^m \{P_j=0\} \quad \{P_j=0\} \cap \{P_{j'}=0\} = \emptyset \quad \text{končni, } j \neq j'$$

$$C = \bigcup_{j=1}^m C_j$$

5.30

Ogledimo si torej primer, ko je  $P$  nerazcepen polinom.

Recimo, da je  $P$  stopnje  $n$ . Potem lahko  $\triangleright \mathbb{C}$ -lin.

Zamenjavo koordinat na  $\mathbb{C}^2$  dosežemo ( $P \rightsquigarrow P \circ A, A \in GL_2(\mathbb{C}),$   
 $A$  blizu  $I$ ),

da ima  $P$  red  $n$  v spremenljivki  $w$

$$P(z, w) = \sum C_{jk} z^j w^k \quad \text{red } P = \max \{j+k; C_{jk} \neq 0\}$$

red  $j+k$

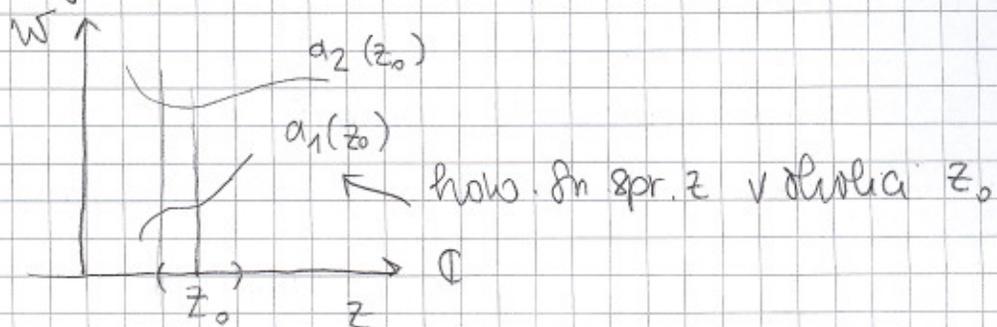
$$P(z, w) = C_0 w^n + C_1(z) w^{n-1} + \dots + C_n(z)$$

polinomi v  $z$

Za fiksen  $z \in \mathbb{C}$  si ogledamo mn. ničel  $\{w \in \mathbb{C}; P(z, w) = 0\} =$   
 $= \{a_1(z), \dots, a_n(z)\}$

Z fiksen;  $P(z, \cdot)$  polinom stopnje  $n$  v  $w$  s ponovitvami  
 $\rightsquigarrow n$  ničel

(lahko se zgodi, da niso vse ničle med seboj različne)



Recimo, da je  $z_0 \in \mathbb{C}$  taka točka, da so št.  $a_1(z_0), \dots, a_n(z_0)$   
 paroma različne. Torej je  $a_j(z_0)$  ničla reda 1 šn.  $P(z_0, \cdot)$

**LEMA**

Obstaja okolice  $U \subset \mathbb{C}$  točke  $z_0$  in holo. šn.  $a_j: U \rightarrow \mathbb{C}$   
 $(j=1, \dots, n)$

tako, da je  $a_j(z)$  dano št. in da je  $\forall z \in U \{w \in \mathbb{C}; P(z, w) = 0\} = \{a_1(z), \dots, a_m(z)\}$

(Po pomenu, da so v neki okolici točke  $z_0 \in \mathbb{C}$  ničle polinoma  $P(z; \cdot)$  holomorfne fn. spremenljivke  $z$ )

### DOKAZ

$\alpha_2$   
 $\alpha_1 = a_1(z)$

$z_0$

Izberemo  $r > 0$ ,  $2r > \max_{j \neq k} |a_j - a_k|$

Diski  $D(\alpha_j, r)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , so paroma disjunktne.

Fiksirajmo  $j \in \{1, \dots, m\}$

Ogledamo si  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-d_j|=r} \frac{\partial P}{\partial w}(z, w) \frac{dw}{P(z, w)} =: N(z)$ .

Pridimo, da je integral dobro def. ( $P \neq 0$  na integracijskem domoči), če je  $z$  dovolj blizu  $z_0$ .

Ker so  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ničle polinoma  $P(z_0, \cdot)$ , je  $P(z_0, w) \neq 0$ ,

$|w - a_j| = r$ ,  $j = 1, \dots, m$

Ker je  $P$  zvezna fn. obeh spremenljivk in ker so krožnice kompaktne sledi:  $P(z, w) \neq 0$ ,  $|w - a_j| = r$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $z$  dovolj blizu  $z_0$

Po principu argumenta je  $N(z) = \#$  ničel  $P(z, \cdot)$  na disku  $|w - a_j| < r$   
Nzvezna, celostevilka

$\Rightarrow N(z)$  konstantna,  $z$  blizu  $z_0$

$N(z_0) = 1$  po konstrukciji  $\Rightarrow N(z) = 1 \forall z$  blizu  $z_0$

Označimo to ničlo z  $a_j(z)$

$|a_j(z) - a_j| < r$ ,  $z$  blizu  $z_0$ . Po izreku o residuih je

5.32

$$\text{je } a_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a_j|=r} w \cdot \frac{\frac{\partial P}{\partial w}(z,w)}{P(z,w)} dw$$

Integrand je hol. fn.  $z \Rightarrow a_j(z)$  hol.  
 ( $\frac{\partial}{\partial z}$  lahko "noter neseš")

19.5.2008

$P$  je holomorfna, če je diferenciablema in  $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial P}{\partial \bar{w}} = 0$ .

$$z = x + iy$$

$$w = u + iv$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial u} + i \frac{\partial P}{\partial v} \right)$$

Holomorfne funkcije več spremenljivk lahko lokalno predstavim

$\rightarrow$  konvergentno potenčno vrsto v danih kompl. spremenljivkah

$$P(z,w) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}_+} c_{j,k} (z-a)^j (w-b)^k$$

Dokončamo dokaz izreka:

Pokazati, da je kvečjemu končna množica točk  $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ ,  
 kjer je  $P(a,b) = 0, \frac{\partial P}{\partial w}(a,b) = 0$

$$\left( \begin{array}{l} C = \{ (z,w) \mid P(z,w) = 0 \} \text{ algebraična krivulja} \\ \pi: C \rightarrow \mathbb{C} \\ \pi(z,w) = z \\ \text{Oznaka: } \text{br}(\pi|_C) := \{ (z,w) \mid P(z,w) = \frac{\partial P}{\partial w}(z,w) = 0 \} \end{array} \right)$$

$$P(z, w) = C_0 w^n + C_1 w^{n-1} + \dots + C_n$$

Za fiksen  $z \in \mathbb{C}$  je  $\{w; P(z, w)\} = \{d_1(z), \dots, d_n(z)\}$

s ponovitvami

Števila  $d_1(z), d_2(z), \dots, d_n(z)$  me moremo globalno def. kot enolične fn.  $z$ .

PRIMER:

$$P(z, w) = w^2 - z = 0$$

$$d_{1,2}(z) = \pm \sqrt{z}$$

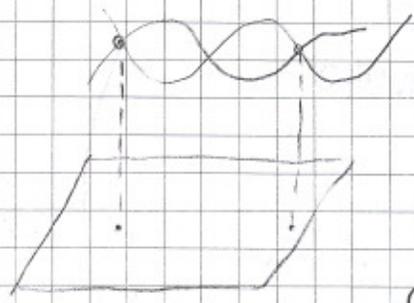
Razvejišče  $v (0,0)$  ni dobro def. hol. fn. (pri dveh razvejiščah prideš z ene veje na drugo).

Vemo, da lahko  $d_1, d_2, \dots, d_n$  lokalno def. kot holomorfnosti fn. nad množico  $\mathbb{C} \setminus \Pi(\text{br}(\pi|_c))$ . Def.  $S(z) := \prod_{1 \leq j < k \leq n} (d_j(z) - d_k(z))$

Ča fn. je za  $\forall z \in \mathbb{C}$  dobro def, ker je simetrična fn. od števil  $d_1(z), \dots, d_n(z)$ , torej neodvisna od njihovega vrstnega reda.

Iz konstrukcije sledi:  $\{z \in \mathbb{C}; S(z) = 0\} = \Pi(\text{br}(\pi|_c)) = \{z \in \mathbb{C} \mid P(z, \cdot) \text{ ima}$

many kot  $n$  prvoma različnih ničel}



Vemo, da  $S(z) \neq 0$  za nek  $z \in \mathbb{C}$ ,  $S \neq 0$ . Jrdimo, da je  $S(z)$  polinom

$\neq 0$ . Ker je na vsakem vlaknu  $C_z = \{w \in \mathbb{C} \mid P(z, w) = 0\}$  največ  $n$  točk,

je množica  $\text{br}(\pi|_c)$  komična.  $\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \text{br}(\pi|_c) = \mathbb{R}$ . ploskev (lokalni graf ene spremenljivke) komična

Ogledamo si kolobar  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \subset \mathbb{C}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$   
 simetrični polinomi      kolobar polinomov  
 $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$Q \in S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \Leftrightarrow Q(\alpha_{\pi(1)}, \dots, \alpha_{\pi(n)}) = Q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

za  $\forall$  permutacijo  $\{1, \dots, n\}$

Primeri simetričnih polinomov:

$$\prod_{j=1}^m (x - \alpha_j) = x^m + \underbrace{g_1(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}_{\text{VIETE: } -(\alpha_1 + \dots + \alpha_m)} x^{m-1} + \dots + \underbrace{g_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}_{(-1)^m \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

$g_1, g_2, \dots, g_n$  so elementi kolobarja  $S(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

### IZREK

$g_1, \dots, g_n$  generirajo kolobar  $S(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , tj. vsak  $Q \in S(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  se da izraziti kot polinom  $\forall g_1, \dots, g_n$ .

Naš primer:

$$g_1(\alpha_1(z), \dots, \alpha_n(z)) = -(\alpha_1(z) + \dots + \alpha_n(z)) = \frac{c_1(z)}{c_0} \text{ polinom v } z$$

$$g_2(\alpha_1(z), \dots, \alpha_n(z)) = \frac{c_2(z)}{c_0} \text{ polinom v } z$$

Po izreku sledi da lahko  $\delta(z)$  izrazimo kot polinom v funkcijah  $c_1(z), \dots, c_n(z)$ . Ti pa so polinomi v  $z$ , torej je tudi  $\delta(z)$  polinom v  $z$ .

### OPOMBA

$\forall$  polinomajšem primeru, ko je  $P(z, w) = c_0 w^n + c_1 w^{n-1} + \dots + c_n(z)$

Alta: Weierstrassovi polinomi

5.35

in so  $C_j(z)$  holomorfne in, vidimo da ima enak način,  
 da je  $S(z)$  polinom in  $\{C_j(z)\}$ , torej holo in. v  $z$ .  
 $\Rightarrow \{S=0\} = \pi(\text{br } \pi|_C) = \text{zapeta, diskretna množica}$

$$\sigma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot k$$

Ti simetrični polinomi tudi generirajo kolobar  
 $S(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R} \frac{w^k \frac{\partial P}{\partial w}(z, w)}{P(z, w)} dw = \sum_{j=1}^n \alpha_j(z)^k$$

← holo v  $z$   
 ↑ holo v  $z$

izrek o potankih  
 R velik

## SINGULARNE IN REGULARNE TOČKE ALGEBRAIČNE KRIVULJE

$$C = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0 \}$$

$$C_{\text{sing}} := \bigcap_{\pi \text{ lin. prej. } \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}} \text{br } (\pi|_C) = \{ (z, w) \in C \mid \text{nobena lin. prej. } \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \text{ ni lok. inj. v okolici te točke, če jo zozimo na } \mathbb{C} \}$$

SINGULARNI LOKUS

$$C_{\text{reg}} = C \setminus C_{\text{sing}}$$

REGULARNI LOKUS

5.36

Prejšnji izrek pokaže, da je v okolici vsake točke  $(z, w) \in C_{\text{reg}}$  mn. C graf neke holo. fn. v primeru izbranih lin. koordinat na  $\mathbb{C}^2$ ; torej je  $C_{\text{reg}}$  Riemannova ploskev, vložena v  $\mathbb{C}^2$ .

## TRDITEV

$$C_{\text{sing}} = \left\{ (z, w) \in C : \frac{\partial P}{\partial z}(z, w) = \frac{\partial P}{\partial w}(z, w) = 0 \right\}$$

$$\nabla P = \left( \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial w} \right) = 0 \text{ holomorfní gradient}$$

## DOKAZ

Če je  $\frac{\partial P}{\partial w}(z, w) \neq 0$ ,  $(z, w) \in C$ , vemo, da je lokalno C graf oblike  $w = \alpha(z) = \text{holo. fn. } z \Rightarrow (z, w) \in C_{\text{reg}}$

Podobno, če  $\frac{\partial P}{\partial z}(z, w) \neq 0$ , tedaj je C lokalno graf oblike  $z = \beta(w)$  holo.

$$\Rightarrow C_{\text{sing}} \subset \left\{ (z, w); \nabla P(z, w) = 0 \right\} = \left\{ P=0, \frac{\partial P}{\partial z}=0, \frac{\partial P}{\partial w}=0 \right\}$$

Obratno ne bomo dokazali.

## SARDOV IZREK (POSEBEN PRIMER)

Če je  $P(z, w)$  nekomp. holo. polinom,  $\exists$  največ končno mnogo števil  $c \in \mathbb{C}$ , za katere ima sistem treh polinomov enačb  $P=c, \frac{\partial P}{\partial z}=0, \frac{\partial P}{\partial w}=0$  kakšno rešitev v  $\mathbb{C}^2$ .

## PRIMER

$$P(z, w) = w^3 - z^2$$

$$\nabla P(z, w) = (-2z, 3w^2) = 0 \Leftrightarrow z = w = 0$$

$$C_0 = \{P=0\} \text{ je sing. v } (0,0)$$

$$C \neq \emptyset, \{P=c\} = \{w^3 - z^2 = c\}$$

ostre  
zgladi

## POSLEDICA

Za vse, razen končno mnogo  $c \in \mathbb{C}$  je alg. krivulja  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = c\}$  nesingularna, torej zaprta R. ploštev, vložena v  $\mathbb{C}^2$ .

## POSPLOŠITVE

1° Algebraične krivulje v  $\mathbb{C}^n$

$$C = \{P_1 = 0, \dots, P_k = 0\}$$

$$P_j = P_j(z_1, \dots, z_n) \text{ polinomi; } k \geq n-1$$

$$\mathbb{C}^3, C = \{P_1 = 0, P_2 = 0\};$$

$$(z, w) \in C \quad \nabla P_1, \nabla P_2$$

Če sta gradienta  $\nabla$ -lin. neodvisna, potem je  $C$  nesing. krivulja v okolici te točke.

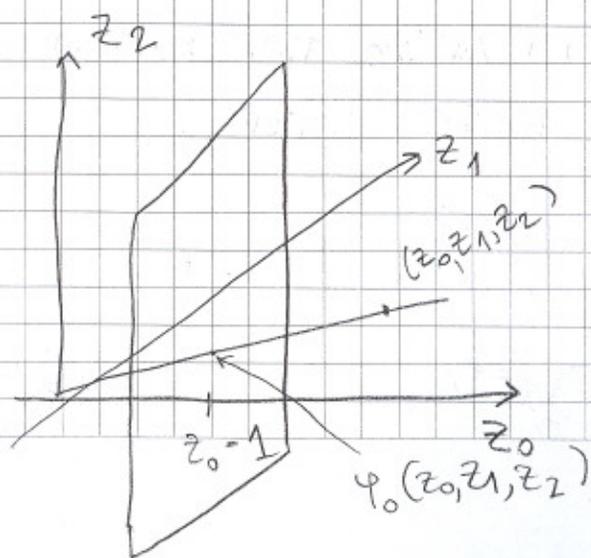
## 2° PROJEKTIVNO ALGEBRAIČNE KRIVULJE

kompleksne krivulje v projektivnih prostorih

PROJEKTIVNA RAVNINA  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$

$\mathbb{P}^2 = \{\text{kompleksne premice skozi } 0 \in \mathbb{C}^3 \sim \mathbb{C}^3\}$

$\mathbb{P}^n = \{\text{kompleksne premice skozi } 0 \sim \mathbb{C}^{n+1}\}$



$$\mathbb{C}_*^3 = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \ni \lambda = \mathbb{C}_* \cdot (z_0, z_1, z_2)$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{P}^2$$

$$\ni [z_0 : z_1 : z_2]$$

$$[\lambda z_0 : \lambda z_1 : \lambda z_2] = [z_0 : z_1 : z_2]$$

$$\tilde{U}_0 = \{ (z_0, z_1, z_2) ; z_0 \neq 0 \} \subset \mathbb{C}^3$$

$$\downarrow \pi$$

$$U_0 = \{ [z_0 : z_1 : z_2] ; z_0 \neq 0 \}$$

$$\cap$$
  

$$\mathbb{P}^2$$

$$U_0 \xrightarrow[\cong]{\varphi_0} \mathbb{C}^2$$

$$\varphi_0([z_0 : z_1 : z_2]) = \left( \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0} \right)$$

$$\varphi_0(z, w) = [1 : z : w]$$

$(U_0, \varphi_0)$  lokalna karta na  $\mathbb{P}^2$

$$\mathbb{P}^2 \setminus U_0 = \{ [0 : z_1 : z_2] ; (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \} \cong \mathbb{P}^1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^2 = \underbrace{U_0}_{\cong \mathbb{C}^2} \cup \mathbb{P}^1$$

$$U_1 = \{ [z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 ; z_1 \neq 0 \} \xrightarrow[\cong]{\varphi_1} \mathbb{C}^2$$

$$\varphi_1([z_0 : z_1 : z_2]) = \left( \frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1} \right)$$

$$U_2 = \{ [z_0 : z_1 : z_2] ; z_2 \neq 0 \} \xrightarrow[\cong]{\varphi_2} \mathbb{C}^2$$

$$\varphi_2([z_0 : z_1 : z_2]) = \left( \frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right)$$

### PREHODNE PRESLIKAVE

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z, w) = \varphi_1([1 : z : w]) = \left( \frac{1}{z}, \frac{w}{z} \right)$$

holo. ma  $z \neq 0$  (ulomljena lin.)

Podobno ostale.

$\mathbb{P}^2$  je kompleksna (alg.) mnogoterost

↑ ker so prehodne presl.  
ulomljene lin.

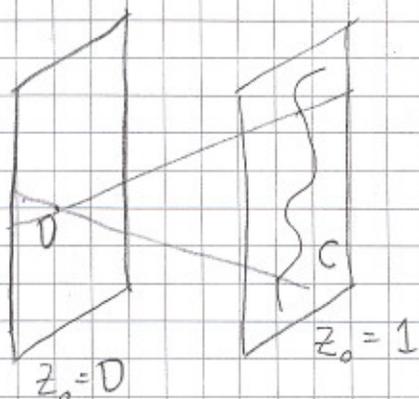
26.5.2008

Zadnjic:  $\mathbb{P}^n$ 

$$\mathbb{P}^2 = \{[z_0 : z_1 : z_2]\}$$

$$C = \{[z_0 : z_1 : z_2] \mid \underbrace{P(z_0, z_1, z_2)}_{\text{homogen polinom}} = 0\}$$

kompl. krivulja:

 $\mathbb{C}^3$ 

$$C \cap \{z_0 \neq 0\} = \underbrace{\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid P(1, z_1, z_2) = 0\}}_{\substack{\text{karta na } \mathbb{P}^2 \\ \cong \\ \mathbb{C}^2}}$$

Ta krivulja je gladka (torej R. ploskev), če  $P(1, z_1, z_2)$  nima kritičnih točk na mišeni množici  $(\frac{\partial P}{\partial z_1} \neq 0$  ali  $\frac{\partial P}{\partial z_2} \neq 0)$

**PRIMER**

$$P(z_0, z_1, z_2) = z_0^d + z_1^d + z_2^d$$

$$C = \{P=0\} \subset \mathbb{P}^2 \quad (d \in \mathbb{N})$$

Fermatova krivulja stopnje  $d$ 

$$d=1: C = \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$$

↑  
pog. premica

Preveri, da je  $C$  gladka krivulja (brez sing.) za  $\forall d \in \mathbb{N}$

Kako najdemo hol. preslikave R. ploskve v  $\mathbb{P}^n$ ?
 $X$  kompaktna R. pl.;  $\exists X \xrightarrow{\text{hol.}} \mathbb{P}^2$  (holo inverzija)

 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$  (vložitve)

Alta

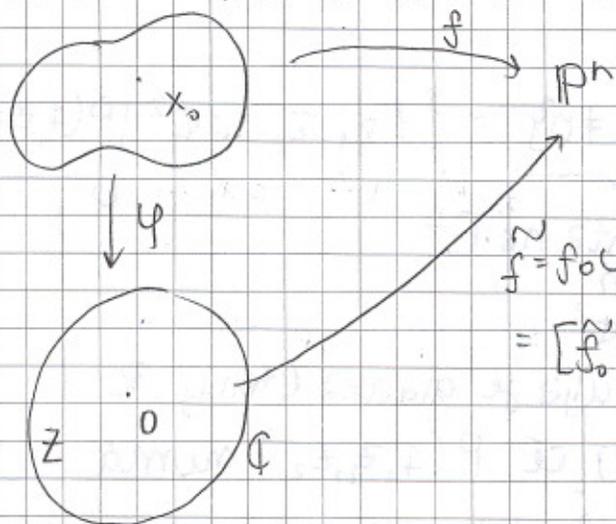
# 5.40

ideja:

$$X \ni x \rightarrow f(x) = [f_0(x) : f_1(x) : \dots : f_m(x)] \in \mathbb{P}^n$$

$f_0, \dots, f_m$  meromorfne sn. na  $X$ , brez skupnih ničel.

$\mathbb{C}$  ima  $\nu$  melki točki  $X_0 \in X$  katera od sn.  $f_j$  pol, izberemo na  $X$  lokalno karto, v kateri je  $X_0 = 0$

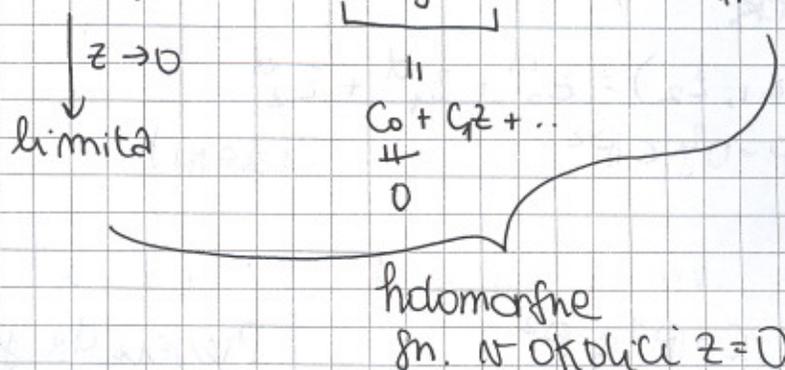


$$\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1} = [\tilde{f}_0 : \tilde{f}_1 : \dots : \tilde{f}_m]$$

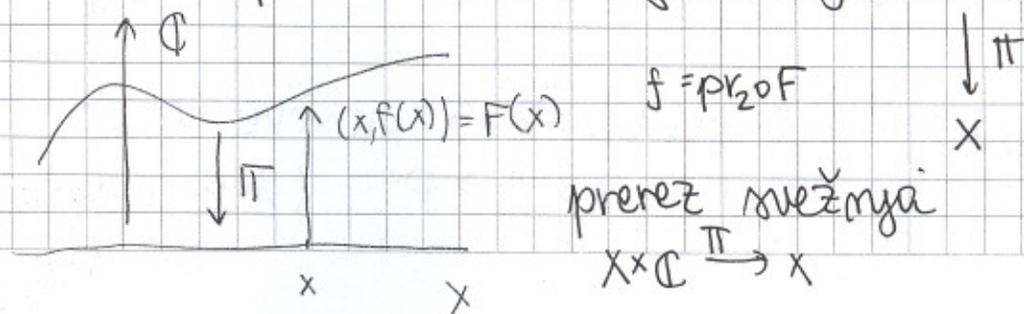
Izberemo indeks  $j \in \{0, \dots, m\}$  tako, da ima  $\tilde{f}_j$  pol stopnje  $k \neq 0$ , ostale sn. pa pol stopnje  $\leq k$   $\neq 0$ .

Lokalno  $\nu$  okolici  $z=0$ :

$$[\tilde{f}_0(z) : \dots : \tilde{f}_m(z)] = [z^k \tilde{f}_0(z) : \dots : z^k \tilde{f}_j(z) : \dots : z^k \tilde{f}_m(z)]$$



Holo sn. na  $X =$  "prerez 'trivialnega sveženja'  $X \times \mathbb{C}$ "





5.42

(mreženjske karte)

$$\begin{array}{ccc} \Phi_\alpha : E|_{U_\alpha} := \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\cong} & U_\alpha \times \mathbb{C} \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U_\alpha \end{array}$$

Tako da je za  $\forall \alpha, \beta \in I$  prehodna preslikava oblika

$$\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} \quad (\text{prehod iz karte } \beta \text{ na karto } \alpha)$$

$$\Phi_{\alpha\beta}(x, z) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot z)$$

( $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ )  
( $z \in \mathbb{C}$ )

holo. fn. na  $U_\alpha \cap U_\beta$  brez  
ničel

Preveri:  $\alpha, \beta, \gamma$ 

$$\Phi_{\alpha\gamma} = \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma}$$

Druština holomorfnih holo fn.  $g_{\alpha\beta}$  zadošča:

(i)  $g_{\alpha\alpha} \equiv 1$  na  $U_\alpha$

(ii)  $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\alpha} \equiv 1$  ( $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ )  
↑ na  $U_\alpha \cap U_\beta$

(iii)  $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma\alpha} \equiv 1$   
↑ na  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

Druština holo fn.  $\{g_{\alpha\beta}\}$ , ki zadošča lastnostim

(i)-(iii), se imenuje **MULTIPLIKATIVEN** holó 1-kocikel.

### IZREK

Za vsak multip. holó 1-kocikel  $(g_{\alpha\beta})$  na  $X$  obstaja holó omeženi premic  $E \xrightarrow{\pi} X$ , ki ima danu sn.  $g_{\alpha\beta}$  za prehodne sn.

### DOKAZ

$U = \{U_\alpha \text{ odp. } \alpha \in I\}$  pokrije  $X$

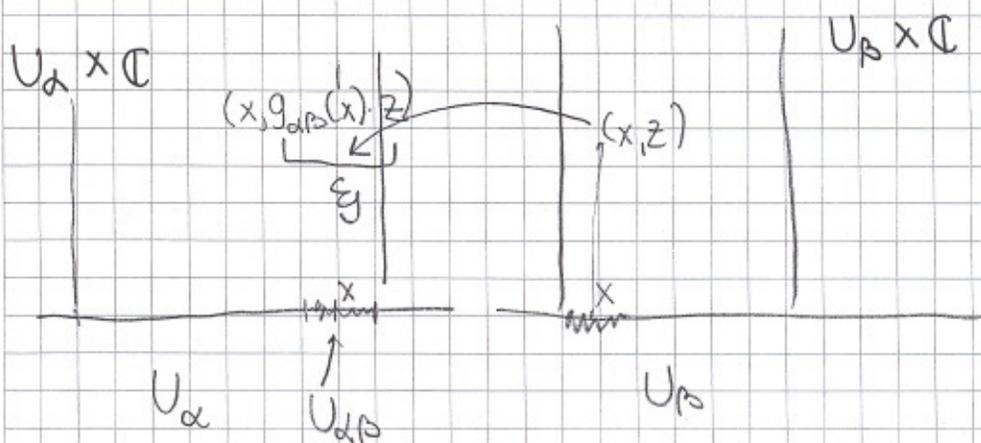
$g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^*$  holó sn.

$$E \stackrel{\text{def.}}{=} \bigsqcup_{\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C} / \sim$$

disjunktna unija

$$\downarrow \pi$$

$$\mathbb{R}^2 X$$



Naloga:  
Preveri, da je  $\sim$  ekvivalenčna relacija, če je  $(g_{\alpha\beta})$  1-kocikel

$$\begin{array}{ccc} (x, z) & \sim & (y, \xi) \\ \uparrow & & \uparrow \\ U_\beta \times \mathbb{C} & & U_\alpha \times \mathbb{C} \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \in U_{\alpha\beta} \\ \xi = g_{\alpha\beta}(x) \cdot z \end{array} \right.$$

Preveri, da je tako dobljeni  $E$  res poveženj premnic  
nad  $X$  in da obhajajo karte

$$\bar{\Phi}_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{C}$$

Za katere je  $\bar{\Phi}_{\alpha\beta}(x, z) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot z)$

PRIMER

$$1^\circ U = \{x^2\}; \quad g = 1$$

$$E = X \times \mathbb{C} \rightarrow X$$

(trivialen produktni poveženj)

$$2^\circ X = \mathbb{P}^1 = \begin{matrix} z \in \mathbb{C} \\ \parallel \\ U \end{matrix} \sqcup \begin{matrix} \frac{1}{z} \in \mathbb{C} \\ \parallel \\ V \end{matrix}$$

Drugo pokritje:

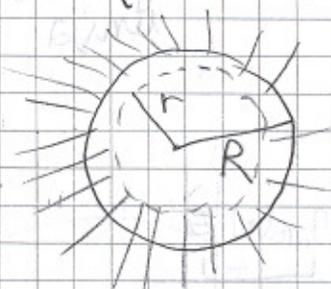
$$U = \mathbb{D}(0, R)$$

$$V = (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}(0, R)}) \cup \{\infty\}$$

$$\{U, V\} \text{ pokritje } = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$\mathbb{P}^1$

$$U \cap V = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$



$$U \cap V = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$$

Naj bo  $g(z)$  nemučelna holo fn. na  $U \cap V = \{r < |z| < R\}$ .

Zlepimo  $(z, \xi) \in V \times \mathbb{C}$  s točko  $(z, g(z) \cdot \xi) \in U \times \mathbb{C}$

Konkretno:

$$g(z) = z^k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$E_k \rightarrow \mathbb{P}^1$  prirejeni poveženj premnic.

Do izomorfizma matančno so  $\{E_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

vsi možni holo. sv. pn. nad  $\mathbb{P}^1$ .

↑ premic

$$K = \mathbb{C} \quad E_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$$

## DEFINICIJA

Prerez mrežnja  $E \xrightarrow{\pi} X$  je taka preslikava  $f: X \rightarrow E$ ,  
 ki zadošča  $\pi \circ f(x) = x$  ( $\Leftrightarrow f(x) \in E_x$ )

$E = X \times \mathbb{C}$  trivialen:

preuze identificiramo s funkcijami  $X \rightarrow \mathbb{C}$  (graf. sn.)

$$\begin{array}{ccc}
 E|_{U_\alpha} & \xrightarrow[\Phi_\alpha]{\cong} & U_\alpha \times \mathbb{C} \\
 \uparrow f & & \nearrow (x, f_\alpha(x)) \\
 & & x
 \end{array}$$

Če imamo mreženjski atlas

$\{\Phi_\alpha \mid \alpha \in I\}$  nad pokritjem  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  baze  $X$ ,  
 $\Delta$  prehodnimi sn.  $g_{\alpha\beta}$ , potem je vsak prerez  $f: X \rightarrow E$   
 podan s kolekcijo funkcij

$$\{f_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C} \mid \alpha \in I\},$$

ki zadoščajo pogojem

$$\boxed{
 \begin{array}{l}
 x \in U_{\alpha\beta}: \\
 f_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x) \cdot f_\beta(x)
 \end{array}
 } \leftarrow \text{prehodni pogoji}$$

Preuzi so posplošitev pojma funkcije

$$f \text{ holo} \Leftrightarrow f_\alpha \text{ holo}, \forall \alpha$$

$\Gamma(X, E) =$  množica vseh prerezov mrežnja  $E =$

$= \mathbb{C}$ -vektorski prostor

5.46

$\Gamma_{\text{ge}}(X, E) =$  holo. prerezi

$X \longrightarrow \mathcal{O}_X \in E_X$  ničelni prerez

Gladkih prerezov veliko.

$X$  kompaktna  $\Rightarrow \Gamma_{\text{ge}}(X, E)$  homično razsežen  $\mathbb{C}$ -vekt. pr.  
(lahko se zgodi, da je to  $\{0\}$ )

Če je holo prerezov  $E$  "veliko", lahko zastavljamo

preslikave

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^n$$

$$x \in E_X \rightarrow [f_0(x) : f_1(x) : \dots : f_n(x)]$$

↑  
prerezi  
sveženja  $E$   
brez skupnih  
ničel!

↓  
(ni vedno  
točka v  $\mathbb{P}^n$ )

$$E_x \approx \mathbb{C}$$

pri spremembi identifikacije

$E_x \simeq \mathbb{C}$  množimo z meničelnim  
hompl. številom

$x$

To me vpliva na razmerje med komp.  $\rightarrow$   
dobimo isto točko v  $\mathbb{P}^n$ .

Kodajova vložitev