ABELOVA NAGRADA 2009 MIKHAELU GROMOVU

FRANC FORSTNERIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 32E10, 32E30, 32H02

Članek vsebuje nekaj osnovnih dejstev o življenju in delu slavnega norveškega matematika Nielsa Henrika Abela, o nagradi za matematiko, ki nosi njegovo ime, in o revolucionarnih dosežkih Mikhaela Gromova, prejemnika Abelove nagrade za leto 2009, na področju geometrije. V zadnjem delu je podrobneje predstavljen homotopski princip Oka-Grauert-Gromov v kompleksni analizi in geometriji.

THE 2009 ABEL PRIZE TO MIKHAEL GROMOV

The article brings some basic facts on the life and work of the famous Norwegian mathematician Niels Henrik Abel, on the establishment of the Abel Prize, and on the revolutionary contributions of the 2009 Abel Prize winner, Mikhael Gromov, to geometry. The last part contains an exposition of the Oka-Grauert-Gromov principle in complex analysis and geometry.

1. Uvod

Ob vprašanju, katera mednarodna nagrada na področju matematike je najpomembnejša in najprestižnejša, med matematiki ni popolnega soglasja: je to Fieldsova medalja ali Abelova nagrada? Vsekakor sta omenjeni nagradi na prvih dveh mestih, imata pa različen pomen.

Fieldsova medalja se podeljuje vsako četrto leto na mednarodnem matematičnem kongresu štirim prejemnikom do starosti 40 let, ki so dosegli najbolj originalne prebojne dosežke in s tem rešili kak zelo pomemben in dolgo časa odprt matematični problem. Simbolni pomen Fieldsove medalje je vsekakor dosti večji, kot bi lahko pripisali njeni sorazmerno skromni denarni vsoti.

Abelovo nagrado pa lahko prejme matematik, ki je pomembno zaznamoval določeno področje matematike skozi daljše obdobje in ki je prispeval vrsto ključnih dosežkov k njenemu razvoju. Nagrado podeljuje Norveška akademija znanosti enkrat na leto od leta 2003 dalje. Po statusu in ugledu je Abelova nagrada postala enakovredna Nobelovi nagradi na področju fizike, kemije in medicine.

Abelovo nagrado za leto 2009 je prejel *Mikhael Leonidovich Gromov* za svoje revolucionarne prispevke h geometriji. Nagrado je Gromov prejel iz rok norveškega kralja Haralda na prireditvi v Oslu 19. maja 2009.

V zapisu je na kratko predstavljeno življenje in delo genialnega norveškega matematika Nielsa Henrika Abela ter ozadje, ki je vodilo do ustanovitve Abelove nagrade. Zatem sledi oris nekaterih temeljnih prispevkov Mikhaela Gromova k različnim področjem matematike. V zadnjem delu je predstavljen princip Oka-Grauert-Gromov ter nekaj novejših prispevkov sodelavcev raziskovalne skupine *Analiza in geometrija* k temu področju.

2. Življenje in delo Nielsa Henrika Abela

Niels Henrik Abel (1802–1829) je prispeval revolucionarna odkritja na mnogih področjih matematike in po njem se danes imenuje vrsta matematičnih pojmov in objektov.

Kot študent na Univerzi v Kristianiji (današnjem Oslu, Norveška) je Abel skušal rešiti splošno enačbo pete stopnje

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\,.$$

Mislil je že, da mu je uspelo, a je svojo napako pravočasno odkril. V članku v samostojni brošuri, objavljeni leta 1824, je dokazal, da se ta enačba ne da rešiti z radikali, to je z eksplicitno formulo, v kateri bi nastopali algebraični izrazi (vsote, produkti, koreni, ...) v koeficientih a_0, a_1, ..., a_5. Preprost primer enačbe pete stopnje, ki ni rešljiva z radikali, je $x^5 - x + 1 = 0$. S tem je Abel rešil problem, ki je izzival matematike od časov Bombellija in Vieta, in tako preprečil nadaljnje neuspešne ali napačne poizkuse reševanja. Podrobnejši dokaz je objavil leta 1826 v prvem zvezku *Crellove revije*. Abelov rezultat velja tudi za enačbe višje stopnje, enačbe do vključno četrte stopnje pa so vselej rešljive z radikali.

Abelov rezultat o nerešljivosti polinomskih enačb od pete stopnje dalje z radikali je nadaljeval drugi genialni matematik tedanjega časa, *Évariste Galois* (1811–1832) [14], ki je ob tem razvil začetke *Galoisove teorije*. Ta pomembna algebraična teorija povezuje grupe z razširitvami obsegov; grupe pri tem nastopajo kot grupe avtomorfizmov obsegov. V jeziku Galoisove teorije je polinomska enačba rešljiva z radikali natanko tedaj, ko je prirejena Galoisova grupa rešljiva (solvable). Pri splošni enačbi n-te stopnje je prirejena Galoisova grupa izomorfna grupi S_n vseh permutacij množice z n

elementi; za $n \geq 5$ grupa S_n ni rešljiva, medtem ko so grupe S_2, S_3 in S_4 rešljive.

Leta 1825 je Abel prejel štipendijo norveške vlade, ki mu je omogočila dvoletno gostovanje pri tedaj pomembnih matematikih v Berlinu, v Italiji in v Parizu. V tem času je raziskoval teorijo funkcij, še posebej eliptične in hipereliptične funkcije, ter nov razred funkcij, ki nosi njegovo ime. Napisal je več člankov o konvergenci vrst, o Abelovih integralih in o eliptičnih funkcijah.

Leta 1828 je Abel postal inštruktor na univerzi in vojaški šoli v Kristianiji (Oslu). *August Leopold Crelle* (1780–1855) mu je leta 1829 priskrbel profesorsko mesto na Univerzi v Berlinu in mu je 8. aprila 1829 pisal o tem. Bilo je prepozno, saj je Abel umrl za posledicami tuberkuloze dva dni pred tem v starosti 27 let.

Abelova dela so pomemben prispevek k matematiki zlasti na področju algebre, teorije grup, integralnega računa in teorije eliptičnih funkcij. Večino svojih znanstvenih del je objavil v reviji *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ki jo je ustanovil Leopold Crelle leta 1826 in jo urejal do svoje smrti leta 1855. Že v prvem zvezku revije je bilo objavljenih kar pet Abelovih člankov. V drugem zvezku iz leta 1827 je izšel prvi del njegovih *Rechérches sur les fonctions elliptiques*, ki pomenijo začetek teorije dvojno periodičnih funkcij. Abelova matematična dela je zbral in uredil *Bernt Michael Holmboe* (1795–1850) in norveška vlada je omogočila objavo leta 1839. Leta 1881 je izšla razširjena izdaja, ki sta jo uredila *Peter Ludwig Mejdell Sylow* (1832–1918) in *Marius Sophus Lie* (1842–1899).

Abelovo delo je bilo v prvi vrsti teoretično, brez posebnega prizadevanja po praktični uporabi dosežkov. Kljub temu je bilo izjemno odmevno in je vodilo k razvoju številnih teorij, od katerih so mnoge kasneje doživele tudi praktično uporabo. Mnogo matematičnih objektov je dobilo pridevnik abelovski. Govorimo o Abelovi integralski enačbi, ki vodi do Abelovih funkcij. Komutativne grupe imenujemo *Abelove grupe.* Pomemben razred transcendentnih funkcij se imenuje po njem.

Čeprav ima matematika izjemen praktični in vzgojni pomen in je nepogrešljiva podstat vrsti drugih znanosti, vsebuje tudi bistvene elemente estetike – čistost oblike, preprostost v objemu kompleksnosti, eleganco in celo lepoto. V zgodovini sta bila praktični pomen in uporaba matematičnih izsledkov najpogosteje le nenačrtovan stranski produkt. Še posebej na primerih, kot sta Abel in Galois, nas zgodovina uči, da vrhunski matematiki potrebujejo predvsem ustvarjalno svobodo in stimulativno okolje za delo.

Abelova zgodba je značilna še v enem pogledu, ki pogosto preseneča znanstvenike na drugih področjih – kako mladi so lahko matematiki, ko pridejo do svojih najpomembnejših odkritij. Abel je naredil izjemne stvari do svojega sedemindvajsetega leta. Omenili smo tudi Évarista Galoisa, ki je pri osemnajstih letih položil temelje izjemno pomembne Galoisove teorije. Po drugi strani pa mnogi matematiki ostanejo znanstveno aktivni še celo potem, ko že prejemajo zasluženo pokojnino. V tem smislu veliki matematiki bolj spominjajo na velike skladatelje kot pa na znanstvenike na drugih področjih.

Več o življenju in delu Abela lahko bralec najde v Wikipediji [1] in številnih drugih virih.

3. O Abelovi nagradi

Ob stoletnici Abelovega rojstva leta 1902 si je znani norveški matematik Sophus Lie (po njem se imenujejo *Liejeve grupe*) prizadeval ustanoviti nagrado z Abelovim imenom. V svoja prizadevanja je vključil mednarodno matematično skupnost; norveški kralj Oskar II je ponudil pomoč. Znanstveno društvo v Kristianiji, predhodnik Norveške akademije znanosti v Oslu, je pripravilo potrebne dokumente za podeljevanje nagrade enkrat na vsakih pet let. Organiziran je bil festival v Kristianiji (Oslu) in v Abelovem rojstnem kraju Frøland, Abel pa je dobil spomenik v bližini kraljeve palače v Oslu.

Na žalost pa je prekinitev državne zveze Norveške s Švedsko leta 1905 ter posledična politična nestabilnost prekrižala te načrte.

Napori za ustanovitev nagrade so bili obnovljeni šele sto let kasneje, ob 200-letnici Abelovega rojstva v letu 2002, tokrat uspešno. Nagrado podeljuje Norveška akademija znanosti, nagrajenca pa izbere izmed nominiranih kandidatov petčlanska komisija v mednarodni sestavi.

Prva Abelova nagrada v znesku 6 milijonov norveških kron (približno 750 000 evrov) je bila podeljena 3. junija 2003, prejemnik je bil *Jean-Pierre Serre*. Naslednji nagrajenci so bili *sir Michael Francis Atiyah* in *Isadore M. Singer* (2004), *Peter D. Lax* (2005), *Lennart Carleson* (2006), *Srinivasa S. R. Varadhan* (2007), *John Griggs Thompson* in *Jacques Tits* (2008) ter *Mikhael Leonidovich Gromov* (2009). Več o Abelovi nagradi v [23].

4. O delu Mikhaela Gromova na področju geometrije

Geometrija je eno najstarejših in najbolj temeljnih področij matematike in znanosti nasploh. Njen izvor sega tisočletja nazaj v zgodovino, v čase Arhimeda, Evklida, Pitagore in drugih velikih začetnikov. Tedaj je znanje vzniklo iz potrebe najti odgovore na praktična vprašanja, kot je recimo oceniti velikost kakega zemljišča, iz potreb pri navigaciji na morju, pa tudi iz bolj ezoteričnih želja, kot je izračunati oddaljenost Lune od Zemlje.

Geometrija se ukvarja s študijem pojmov, kot so velikost, oblika, razdalja, medsebojna lega objektov, pa tudi z dosti bolj kompleksnimi lastnostmi ploskev in njihovih višje razsežnih analogov (mnogoterosti), kot je npr. ukrivljenost. *Einsteinova teorija relativnosti* sloni na *Lorentzevi geometriji.* Področje geometrije, ki se imenuje *umeritvena teorija* (angl. *gauge theory*), ima ključno vlogo v modernih teorijah matematične fizike, kot so *Donaldsonova* in *Seiberg-Wittenova teorija.*

V zadnjih petdesetih letih je geometrija doživela revolucionaren razvoj in spremembe. Mikhael Gromov je pri tem kreiral in vodil nekatere najpomembnejše smeri razvoja ter je razvijal originalne ideje, ki so podale nove perspektive v geometriji in posledično tudi v drugih področjih matematike. Imel je bistveno vlogo pri izgradnji moderne *Riemannove geometrije*, sodobnem področju matematike s koreninami v klasični Riemannovi geometriji (glej [20]). Je tudi eden od utemeljiteljev *globalne simplektične geometrije.* Njegovo najbolj znano in verjetno najslavnejše delo je vodilo v definicijo *Gromov–Wittenovih invariant* [19]. To je sedaj eno od izjemno aktivnih področij matematike, tesno povezavanih s področjem moderne teoretične fizike, ki se imenuje *kvantna teorija polja.*

Eno od orodij, ki jih je Gromov na ustvarjalen način uporabil pri razvoju simplektične geometrije, je *analiza kompleksnih krivulj v skoraj kompleksnih mnogoterostih.* To so mnogoterosti M sode dimenzije $2n$, katerih tangentni prostori T_pM so opremljeni z operatorjem J, katerega kvadrat je enak minus identiteti: $J^2 = -id$. Modelna ali standardna skoraj kompleksna struktura J_{st} na kompleksnem evklidskem prostoru $\mathbb{C}^n$ deluje kot množenje vektorja z imaginarno enoto $i = \sqrt{-1}$. S pomočjo tega operatorja J se Cauchy-Riemannov sistem enačb za holomorfne funkcije $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ zapiše v obliki

$$df_p(Jv) = i\, df_p(v)\,, \quad p \in \mathbb{C}^n, \quad v \in T_p\mathbb{C}^n \approx \mathbb{C}^n.$$

Pri tem je $df_p(v)$ vrednost diferenciala funkcije f v točki p v smeri tangentnega vektorja $v \in T_p\mathbb{C}^n$. Ni težko videti, da lahko koordinate v okolici neke točke p izberemo tako, da J sovpada s standardno strukturo J_{st} na tangentnem prostoru $T_p\mathbb{C}^n$, v splošnem pa tega pogoja ni mogoče izpolniti v vsaki točki neke odprte množice. Še več, na splošni skoraj kompleksni mnogoterosti je Cauchy-Riemannova enačba predoločena in nima nobenih netrivialnih rešitev, torej taka mnogoterost nima nekonstantnih lokalnih holomorfnih funkcij. Skoraj kompleksna struktura J se imenuje *integrabilna*, če lahko najdemo lokalne koordinate v okolici vsake točke $p \in M$, v katerih J ustreza standardni strukturi J_{st} na $\mathbb{C}^n$. Potrebni in zadostni pogoj za integrabilnost strukture nam podaja Newlander-Nirenbergov izrek [31].

Po drugi strani pa v vsaki skoraj kompleksni mnogoterosti (M, J) obstajajo *skoraj kompleksne krivulje*, npr. preslikave $f\colon \mathbb{D} \to M$ z enotnega diska $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ ali drugih Riemannovih ploskev, ki zadoščajo Cauchy-Riemannovi enačbi

$$df_p(iv) = J(df_p(v)), \quad p \in \mathbb{D}, \quad v \in T_p\mathbb{D}.$$

Gromov je iznašel kreativno uporabo takih krivulj pri izgradnji globalne simplektične geometrije in simplektične topologije [18]. *Simplektična mnogoterost* je realna mnogoterost M sode dimenzije $2n$ skupaj s simplektično formo ω; to je diferencialna 2-forma, ki je sklenjena ($d\omega = 0$) in neizrojena ($\omega^n \neq 0$). Model je evklidski prostor $\mathbb{R}^{2n}$ s koordinatami $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ in s formo $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + \cdots + dx_n \wedge dy_n$. Lokalno je vsaka simplektična forma ekvivalentna tej modelni formi.

Vzemimo sedaj trojico (M, ω, J), kjer je ω simplektična forma in J skoraj kompleksna struktura na M, tako da je $\omega(v, Jv) > 0$ za vsak neničeln tangenten vektor $v \in TM$. *Gromov-Wittenove invariante* simplektične mnogoterosti (M, ω) so racionalna števila, ki na določen način preštejejo psevdoholomorfne krivulje danega roda v (M, J), ki sekajo neki končen nabor podmnogoterosti v M. Te invariante, ki sta jih razvila Mikhael Gromov in Edward Witten, predstavimo kot homološke ali kohomološke razrede z racionalnimi koeficienti. Njihov glavni pomen je, da nam pomagajo razločevati simplektične mnogoterosti, ki se jih pred tem ni dalo ločiti. Poleg tega imajo bistveno vlogo pri razvoju teorije strun. Povezane so z vrsto drugih geometrijskih invariant, kot npr. Donaldsonove in Seiberg-Wittenove invariante. Za kompaktne simplektične 4-mnogoterosti je Clifford Taubes pokazal ekvivalenco med svojo različico Gromov-Wittenovih invariant in Seiberg-Wittenovimi invariantami. Več o tem lahko bralec najde v [19, 30].

Skoraj kompleksne krivulje so našle pomembno uporabo tudi v definiciji *Flœrove homologije* [35].

Delo Gromova na področju teorije grup s polinomialno rastjo je prineslo nove ideje, ki so za vedno spremenile naše razumevanje diskretnih neskončnih grup. Gromov je prepoznal geometrijske zakonitosti diskretnih grup in rešil vrsto dolgo odprtih problemov. Njegovi geometrijski argumenti so naredili komplicirane kombinatorične argumente veliko bolj naravne in učinkovite. Več o tem v originalnem skoraj 200 strani dolgem članku Gromova [21].

V zadnjem času se Gromov ukvarja tudi z novimi izzivi, ki jih matematiki prinaša biologija, še posebej molekularna biologija in genetske raziskave (glej monografijo [2]). V pogovoru, ki sem ga imel z njim dan po podelitvi nagrade na slovesni večerji v prostorih Norveške akademije znanosti, je med drugim priznal, da je genomika zelo hud izziv in da matematiki očitno še nismo iznašli prave vrste matematike za reševanje teh problemov.

5. Homotopski princip Oka-Grauert-Gromov

Gromov je bil vse od začetkov svoje matematične kariere eden od glavnih akterjev pri razvoju pojma *homotopski princip* ali, na kratko, *h-princip*. Veljavnost h-principa v nekem analitičnem ali geometričnem problemu pomeni, da obstaja analitična rešitev, v kolikor ni topoloških ovir. O tem je napisal monografijo, objavljeno v ugledni Springerjevi zbirki *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* [20].

Do pred dobrimi dvajsetimi leti je bil h-princip v kompleksni analizi omejen na klasični *Oka-Grauertov princip* o klasifikaciji holomorfnih vektorskih svežnjev in njim pridruženih glavnih svežnjev na Steinovih mnogoterostih (glej [32, 15, 16, 17, 24, 29]). *Steinove mnogoterosti* so tiste kompleksne mnogoterosti, ki jih lahko predstavimo kot kompleksne podmnogoterosti v kakem evklidskem prostoru $\mathbb{C}^n$; to je, kot množice $X \subset \mathbb{C}^n$, definirane s končno mnogo holomorfnimi enačbami oblike

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{j_1,\ldots,j_n=0}^{\infty} c_{j_1,\ldots,j_n}\, z_1^{j_1} z_2^{j_2} \cdots z_n^{j_n} = 0\,.$$

Vrsta mora konvergirati za vse $z \in \mathbb{C}^n$. Steinove mnogoterosti so torej analitičen analog afino algebraičnim mnogoterostim, ki so rešitve sistemov polinomskih enačb, s končnimi vsotami namesto vrst.

Glavni rezultat Oka-Grauertove teorije je, da se topološka klasifikacija holomorfnih vektorskih svežnjev in, splošneje, glavnih svežnjev na vsaki Steinovi mnogoterosti X ujema z njihovo holomorfno klasifikacijo. Bistvo dokaza je v tem, da lahko vsako zvezno preslikavo $X \to M$ v poljubno kompleksno homogeno mnogoterost M homotopsko deformiramo do neke holomorfne preslikave. Če uporabimo ta rezultat za preslikave $X \to G_k(\mathbb{C}^n)$ v Grassmanovo mnogoterost vseh kompleksnih k-razsežnih podprostorov v $\mathbb{C}^n$ in pri tem opazujemo povleke univerzalnega vektorskega svežnja $U_{k,n} \to G_k(\mathbb{C}^n)$ na X, takoj sledi, da ima vsak topološki kompleksni vektorski svežnj nad X strukturo holomorfnega vektorskega svežnja. Podobno ugotovimo, da izomorfizmi med dvema vektorskima svežnjema ustrezajo prerezom nekega pridruženega glavnega svežnja; ker je vsak zvezen prerez homotopen nekemu holomorfnemu prerezu, sledi, da je vsak topološki izomorfizem homotopen nekemu holomorfnemu izomorfizmu.

Ključno posplošitev z izjemno zanimivimi posledicami je Gromov orisal v članku [22] v letu 1989. Tako se je rodila *teorija Oka-Grauert-Gromov* o tem, kdaj lahko vsako zvezno preslikavo poljubne Steinove mnogoterosti X v dano kompleksno mnogoterost Y zvezno deformiramo v neko holomorfno preslikavo. Pri deformaciji želimo ohraniti preslikavo holomorfno in poljubno blizu začetni preslikavi na ustreznih podmnožicah v X, kjer je le-ta že holomorfna. Poleg tega želimo hkrati obravnavati vse preslikave iz neke družine preslikav $f_p\colon X \to Y$, ki so zvezno odvisne od parametra p v primernem prostoru parametrov. Če ima Y to lastnost, se imenuje *mnogoterost Oka.*

Analogno vprašanje nas zanima za družine mnogoterosti Y_x, ki so vlakna $\pi^{-1}(x)$ neke holomorfne submerzije $\pi\colon Y \to X$ kompleksne mnogoterosti Y na Steinovo mnogoterost X. Problem je najti *holomorfne prereze* $f\colon X \to Y$, to je preslikave, ki zadoščajo pogoju $f(x) \in Y_x$ za vsak $x \in X$. Glavno vprašanje je, kdaj lahko vsak zvezen prerez deformiramo v neki holomorfen prerez. Gromov je našel preprost zadostni pogoj na vlakna Y_x, ki zahteva obstoj dovolj velike množice holomorfnih preslikav $\mathbb{C}^k \to Y_x$; take mnogoterosti danes imenujemo *eliptične* v smislu Gromova.

Enega najpomembnejših primerov te vrste dobimo, če vzamemo neki holomorfen vektorski sveženj $E \to X$, nato pa iz totalnega prostora E odstranimo neko analitično množico $A \subset E$, torej je $Y = E \setminus A$. Če je kompleksna dimenzija vsakega vlakna $A_x \subset E_x \cong \mathbb{C}^k$ največ $k-2$ in če je A dovolj pohlevna v neskončnosti, potem lahko vsak zvezen prerez $f\colon X \to E \setminus A$, ki se izogne množici A, deformiramo v holomorfen prerez, tako da se celotna homotopija izogne A.

Kot je pri Gromovu v navadi, je dokaze svojih rezultatov le orisal v glavnih potezah; običajno je potrebno še precej napornega dela drugih matematikov, da se njegovi dosežki postavijo na trdne temelje in da jih razume širši krog matematikov. V danem primeru sem v letu 1997, ko sem se začel zanimati za te probleme, povprašal nekaj ključnih kolegov v svetu, ali so bile podrobnosti že narejene in ali so rezultati Gromova razumljeni. Odgovor je bil negativen, a rezultati so bili medtem že uporabljeni v nadaljnjih delih in postalo je tem bolj pomembno, da bi se stvari razčistile. V nekaj letih sva to naredila z Jasno Prezelj in rezultate objavila v seriji člankov [10, 11, 12]. Ključni prispevek pri razumevanju splošnega rezultata o prerezih submerzij je dala J. Prezelj v svoji doktorski disertaciji (Univerza v Ljubljani, 2000). Pred nedavnim je Prezljeva posplošila rezultat Gromova na širši razred 1-konveksnih mnogoterosti, ki so prave holomorfne modifikacije Steinovih prostorov [34].

V svojem članku [22] je Gromov med drugim zastavil vprašanje, ali je mogoče karakterizirati lastnost Oka dane kompleksne mnogoterosti Y s kako preprosto Rungejevo aproksimacijsko lastnostjo za holomorfne preslikave $\mathbb{C}^n \to Y$. Ta problem sem rešil v člankih [7, 9], kjer sem pokazal, da je kompleksna mnogoterost Y mnogoterost Oka natanko tedaj, ko lahko vsako holomorfno preslikavo $U \to Y$, definirano na neki odprti okolici $U \subset \mathbb{C}^n$ dane kompaktne konveksne množice K v $\mathbb{C}^n$, aproksimiramo enakomerno na K s holomorfnimi preslikavami $\mathbb{C}^n \to Y$. Ta karakterizacija bistveno olajša preverjanje lastnosti Oka v konkretnih primerih. Ena od preprostih, a zelo uporabnih posledic je naslednja: Denimo, da sta E in B kompleksni mnogoterosti in je $\pi\colon E \to B$ holomorfen sveženj, katerega vlakno je mnogoterost Oka. Potem je E mnogoterost Oka natanko tedaj, ko je B mnogoterost Oka.

Druga karakterizacija mnogoterosti Oka je povezana s klasičnim razširitvenim izrekom Henrija Cartana (1904–2008), ki posploši Weierstrassov interpolacijski izrek za holomorfne funkcije ene spremenljivke. Cartanov izrek pove, da se vsaka holomorfna funkcija $f\colon A \to \mathbb{C}$ z zaprte analitične podmnožice A v neki Steinovi mnogoterosti X razširi do holomorfne funkcije $F\colon X \to \mathbb{C}$. Sedaj postavimo enako vprašanje s tem, da obseg kompleksnih števil $\mathbb{C}$ nadomestimo z neko kompleksno mnogoterostjo Y. Zaradi topoloških ovir dane preslikave $f\colon A \to Y$ s podmnožice $A \subset X$ v splošnem ni mogoče razširiti niti do zvezne preslikave $X \to Y$. Relevantno vprašanje se glasi:

Ali je mogoče vsako zvezno razširitev $F\colon X \to Y$ dane holomorfne preslikave $f\colon A \to Y$ deformirati v holomorfno preslikavo $F_1\colon X \to Y$, tako da deformacija miruje na A?

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ X \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Odgovor je pozitiven natanko tedaj, ko je Y mnogoterost Oka.

Med Riemannovimi ploskvami (to so enorazsežne kompleksne mnogoterosti) so mnogoterosti Oka ravno tiste, ki niso hiperbolične; poleg kompleksne ravnine $\mathbb{C}$ so to še Riemannova sfera $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$, punktirana ravnina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ter kompleksni torusi (to so holomorfni kvocienti ravnine $\mathbb{C}$ po neki dvojno generirani grupi translacij). Po izreku Riemann-Koebe so vse preostale Riemannove ploskve holomorfni kvocienti diska $\mathbb{D}$ in so zato hiperbolične, kar pomeni, da je vsaka holomorfna preslikava ravnine $\mathbb{C}$ v tako ploskev konstantna. Med višje razsežnimi kompleksnimi mnogoterostmi sestavljajo mnogoterosti Oka bistveno bogatejšo družino (glej [7, 8]).

V [3] sva z Barbaro Drinovec Drnovšek posplošila omenjene rezultate na holomorfne preslikave $D \to Y$ z omejenih strogo psevdokonveksnih domen D v Steinovih mnogoterostih, ki so zvezne ali gladke do roba domene. V drugi smeri sva skupaj z Markom Slaparjem pokazala, da homotopski princip velja za preslikave $X \to Y$ Steinovih mnogoterosti X v poljubno kompleksno mnogoterost Y, če je dovoljeno na X homotopno spremeniti kompleksno strukturo J v neko drugo Steinovo strukturo J' [13]. V primeru Steinovih ploskev ($\dim_{\mathbb{C}} X = 2$) je treba v splošnem zamenjati tudi gladko strukturo na X in pri tem pridemo do zanimivih povezav s 4-dimenzionalno topologijo.

V zadnjem obdobju je Finnur Lárusson obravnaval teorijo Oka-Grauert-Gromov s sredstvi abstraktne homotopske teorije (glej [26, 27, 28]). V ta namen je zgradil modelno kategorijo, v kateri so Steinove mnogoterosti *kofibrantne* (začetni objekti), mnogoterosti Oka pa *fibrantne* (končni objekti). Teorija se naravno razširi na holomorfne preslikave (morfizme). Holomorfna preslikava $\pi\colon E \to B$ med dvema kompleksnima mnogoterostma se imenuje *preslikava Oka*, če je topološka fibracija (kar pomeni, da ima lastnost dviga homotopije) in če velja homotopski princip za dvig holomorfnih preslikav s Steinovih mnogoterosti. Slednje pomeni, da je za vsako holomorfno preslikavo $f: X \to B$ z neke Steinove mnogoterosti X vsak njen zvezen dvig $F: X \to E$ homotopen nekemu holomorfnemu dvigu.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Preslikave Oka so ravno fibracije v Lárussonovi modelni kategoriji.

Med uporabami principa Oka-Grauert-Gromov omenimo finejšo analizo vektorskih svežnjev in, splošneje, koherentnih analitičnih snopov na Steinovih mnogoterostih, konstrukcije holomorfnih vložitev in imerzij Steinovih mnogoterosti v evklidske prostore minimalne dimenzije [4, 33], homotopski princip za holomorfne imerzije [20] in submerzije [6] Steinovih mnogoterosti, pa vse do najnovejših uporab pri faktorizaciji nilhomotopnih holomorfnih matričnih funkcij $X \to SL_n(\mathbb{C})$ z vrednostmi v grupi $SL_n(\mathbb{C})$ [25].

Bralec, ki bi ga utegnila zanimati teorija Oka-Grauert-Gromov ter njene ramifikacije v kompleksni geometriji, lahko nadaljuje s poljudnim člankom [5]. Obsežnejša monografija na to temo je v pripravi.

LITERATURA

[1] *Niels Henrik Abel*, `http://sl.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel`.

[2] A. Carbone in M. Gromov: *Mathematical slices of molecular biology. With an introduction in French by Éric Westhof*, Gaz. Math. No. **88** (2001).

[3] B. Drinovec Drnovšek in F. Forstnerič: *Approximation of holomorphic mappings on strongly pseudoconvex domains*, Forum Math. **20** (2008), str. 817–840.

[4] Y. Eliashberg in M. L. Gromov: *Embeddings of Stein manifolds*, Ann. Math. **136** (1992), str. 123–135.

[5] F. Forstnerič: *Princip Oka-Grauert-Gromov in uporaba v kompleksni geometriji*, `http://www.fmf.uni-lj.si/~forstneric/`.

[6] F. Forstnerič: *Noncritical holomorphic functions on Stein manifolds*, Acta Math. **191** (2003), str. 143–189.

[7] F. Forstnerič: *Runge approximation on convex sets implies Oka's property*, Ann. Math. (2) **163** (2006), str. 689–707.

[8] F. Forstnerič: *Holomorphic flexibility properties of complex manifolds*, Amer. J. Math. **128** (2006), str. 239–270.

[9] F. Forstnerič: *Oka Manifolds*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. Math., **347** (2009), str. 1017–1020.

[10] F. Forstnerič in J. Prezelj: *Oka's principle for holomorphic fiber bundles with sprays*, Math. Ann. **317** (2000), str. 117–154.

[11] F. Forstnerič in J. Prezelj: *Oka's principle for holomorphic submersions with sprays*, Math. Ann. **322** (2002), str. 633–666.

[12] F. Forstnerič in J. Prezelj: *Extending holomorphic sections from complex subvarieties*, Math. Z. **236** (2001), str. 43–68.

[13] F. Forstnerič in M. Slapar: *Stein structures and holomorphic mappings*, Math. Z. **256** (2007), str. 615–646.

[14] *Évariste Galois*, `http://sl.wikipedia.org/wiki/Évariste_Galois`.

[15] H. Grauert: *On Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds*, Ann. of Math. **68** (1958), str. 460–472.

[16] H. Grauert: *Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen*, Math. Ann. **133** (1957), str. 450–472.

[17] H. Grauert: *Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen*, Math. Ann. **135** (1958), str. 263–273.

[18] M. Gromov : *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), str. 307–347.

[19] M. Gromov: *Soft and hard symplectic geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley 1986), str. 81–98, Amer. Math. Soc., Providence 1987.

[20] M. Gromov: *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 9, Springer-Verlag, Berlin 1986.

[21] M. Gromov: *Hyperbolic groups*, v *Essays in group theory*, str. 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 8, Springer-Verlag, New York 1987.

[22] M. Gromov: *Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 4, str. 851–897.

[23] *Gromov receives 2009 Abel Prize*, Notices Amer. Math. Soc. **56** (2009) 6, str. 730–731.

[24] G. M. Henkin in J. Leiterer: *The Oka-Grauert principle without induction over the base dimension*, Math. Ann. **311** (1998) 1, str. 71–93.

[25] B. Ivarsson in F. Kutzschebauch: *A solution of Gromov's Vaserstein problem*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **346** (2008) 23–24, str. 1239–1243.

[26] F. Lárusson: *Excision for simplicial sheaves on the Stein site and Gromov's Oka principle*, Internat. J. Math. **14** (2003), str. 191–209.

[27] F. Lárusson: *Model structures and the Oka principle*, J. Pure Appl. Algebra **192** (2004), str. 203–223.

[28] F. Lárusson: *Mapping cylinders and the Oka principle*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), str. 1145–1159.

[29] J. Leiterer: *Holomorphic vector bundles and the Oka-Grauert principle*, Itogi Nauki i Tekhniki, Current problems in mathematics, Fundamental directions **10**, str. 75–121, 283, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moskva, 1986.

[30] D. McDuff in D. Salamon: *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications 52, American Mathematical Society, Providence, 2004.

[31] A. Newlander in L. Nirenberg: *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. (2) **65** (1957), str. 391–404.

[32] K. Oka: *Sur les fonctions des plusieurs variables. III: Deuxième problème de Cousin*, J. Sc. Hiroshima Univ. **9** (1939), str. 7–19.

[33] J. Prezelj: *Interpolation of embeddings of Stein manifolds on discrete sets*, Math. Ann. **326** (2003), str. 275–296.

[34] J. Prezelj: *A relative Oka-Grauert principle for holomorphic submersions over 1-convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010) 8, str. 4213–4228.

[35] Z. Szabó: *Lecture notes on Heegaard Floer homology. Low dimensional topology*, IAS/Park City Math. Ser. 15. (2009), str. 197–228.