01.10.2002

I. ŠTEVILA

1. OBSEG RACIONALNIH ŠTEVIL

a) $\mathbb{N}$ – z njimi štejemo
- $\{1, 2, 3, \ldots\}$
- lahko jih seštevamo in množimo
- ne moremo jih poljubno odštevati ($5-3$ ✓, $7-9$ //)

Naravna števila vložimo v cela.

b) $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$
- računske operacije z $\mathbb{N}$ razširimo na $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$), na $\mathbb{N}$ so enake kot prej
- v $\mathbb{Z}$ lahko seštevamo, odštevamo in množimo
- delimo lahko le včasih, v splošnem ne ($21:7$ ✓, $21:5$ //)

Cela števila vložimo v racionalna števila (= ulomki)

c) $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b};\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$
- kvocienti celih števil, pri čemer $b \neq 0$!
- dva kvocienta predstavljata isto racionalno število ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$), če je $ad = bc$. ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-7}{-14}$) – racionalna števila so RAZREDI ULOMKOV

Z racionalnimi števili lahko seštevamo, odštevamo, množimo in delimo z od nič različnimi števili.

Lastnosti računanja z racionalnimi števili:
Zapišemo ekonomično: tako, da jih je čim manj in ostale iz njih izpeljemo $\longrightarrow$ AKSIOMI RAČUNANJA

Lastnosti seštevanja:

AKSIOM 1. Za poljubna tri števila a, b, c je
$$(a+b)+c = a+(b+c)$$
(asociativnost vsote).

AKSIOM 2. Za poljubni a, b je
$$a+b = b+a.$$
(komutativnost vsote)

AKSIOM 3. Obstaja število 0 (nič), da za poljuben a velja
$$a+0 = a.$$

AKSIOM 4. Vsakemu številu a pripada nasprotno število $(-a)$, tako da je
$$a+(-a)=0.$$

Opomba 1. Ob danem a je nasprotno število eno samo.

DOKAZ. Recimo, da sta dve:
$$\left.\begin{matrix} a+b=0 \\ a+c=0 \end{matrix}\right\} (A3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c+(a+b)=c \rightarrow (A1)$$
$$\Rightarrow (c+a)+b=c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A2)\ (a+c)+b=c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0+b=c \Rightarrow (A3) \Rightarrow b=c. \blacksquare$$

Opomba 2. Pravilo krajšanja pri seštevanju. Iz
$$a+x = a+y$$
sledi $x=y$.

DOKAZ. $a+x=a+y \Rightarrow -a+(a+x) = -a+(a+y) \Rightarrow$
$\overset{(A1)}{\Longrightarrow} (-a+a)+x = (-a+a)+y \overset{(A2)}{\Rightarrow} (a+(-a))+x = (a+(-a))+y$
$\overset{(A4)}{\Longrightarrow} 0+x = 0+y \overset{(A3)}{\Longrightarrow} x=y. \blacksquare$

Posledica. $\boxed{-0=0}$ $\quad -0+0 \overset{(A4)}{=} 0 = 0+0 \underset{\text{krajšanje}}{\Longrightarrow} -0=0.$

Opomba 3. Odštevanje. Dani sta a, b, iščemo x, da je

$$b+x=a.$$

Denimo, da tak x obstaja.

$$b+x=a \quad |+(-b)$$
$$-b+b+x=-b+a$$
$$(-b+b)+x=-b+a$$
$$(b+(-b))+x=-b+a$$
$$0+x=-b+a$$
$$x=-b+a$$

$\Rightarrow$ Če tak x obstaja, je enak $-b+a$. Vstavimo:

$$b+x=b+(-b+a)\overset{?}{=}a$$
$$(b+(-b))+a\overset{?}{=}a$$
$$0+a\overset{?}{=}a$$
$$a\overset{?}{=}a. \checkmark \quad \blacksquare$$

Torej: ob danih a, b obstaja natanko en x, da je $b+x=a$. Ta x je $x=-b+a$. Imenujemo ga RAZLIKA števil a in b. Označimo $x=a-b$.

Definicija. RAZLIKO $a-b$ definiramo kot $-b+a=a+(-b)$.

Opomba 4. Poudariti želimo, da so vsa pravila posledica osnovnih pravil (aksiomov).

Lastnosti množenja:

AKSIOM 5. Za poljubna tri števila a, b, c je

$$(a\cdot b)c=a(b\cdot c)$$

(asociativnost množenja)

AKSIOM 6. Za poljubni a, b je
$$ab = ba.$$
(komutativnost množenja)

AKSIOM 7. Obstaja število 1. Produkt poljubnega števila a z 1 je enak a.
$$a \cdot 1 = a$$

AKSIOM 8. Vsako od 0 različno število a ima recipročno (obratno) število $\left(a^{-1} = \frac{1}{a}\right)$, tako da je
$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Opomba 1. Ob danem a je obratno število eno samo.

DOKAZ. $\left.\begin{array}{l} ab = 1 \\ ac = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c \cdot ab = c \cdot 1 \Rightarrow c(ab) = c \Rightarrow$
$$\Rightarrow (ca)b = c \Rightarrow (ac) \cdot b = c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \cdot b = c \Rightarrow b \cdot 1 = c \Rightarrow b = c. \blacksquare$$

Opomba 2. Pravilo krajšanja za množenje: če $a \neq 0$ iz
$$ax = ay \Rightarrow x = y.$$

DOKAZ. $ax = ay \Rightarrow (ax)a^{-1} = (ay)a^{-1} \Rightarrow (aa^{-1})x = (aa^{-1})y \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \cdot x = 1 \cdot y \Rightarrow x = y$ $\blacksquare$

Posledica. $1^{-1} = 1$

DOKAZ. $1^{-1} \cdot 1 \overset{(A8)}{=} 1$
$1 \cdot 1 \overset{(A7)}{=} 1$
$\Rightarrow 1^{-1} = 1.$ $\blacksquare$

AKSIOM 9. $1 \neq 0$, t.j. 0 in 1 sta različni števili.

AKSIOM 10. Za poljubna tri števila a, b, c velja
$$(a+b)c = ac + bc.$$
(distributivnostni zakon)

Opomba 1. $0 \cdot a = 0$ za $\forall a$

DOKAZ. $1+0=1 \Rightarrow a(1+0) = a\cdot 1 \Rightarrow a\cdot 1 + a\cdot 0 = a \cdot 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a\cdot 1 + a \cdot 0 = a\cdot 1 + 0 \Rightarrow a\cdot 0 = 0$. ▪

Opomba 2. $(-a)b = -ab$.

DOKAZ. $(-a)b + ab \overset{(A10)}{=} b((-a)+a) \overset{(A4)}{=} b\cdot 0 \overset{(O1)}{=} 0 \Rightarrow (-a)b = -ab$ ▪

Opomba 3. Distributivnostni zakon velja tudi za odštevanje:

$$(a-b)c = ac - bc.$$

DOKAZ. $(a-b)c = (a+(-b))c \Rightarrow ac + (-b)c \overset{(O2)}{=} ac - bc$. ▪

$= ac + (-bc) := ac - bc$
(def. razlike)

Opomba 4. Deljenje je nasprotna operacija množenju. Dani sta a in $b \neq 0$. Iščemo x, da bo

$$xb = a.$$

Kot pri odštevanju dokažemo, da tak x obstaja in je en sam. Enak je $x = a \cdot b^{-1}$.

Definicija. DELJENJE $a:b = x$ je ab^{-1}. $(b \neq 0)$
$a:b$ imenujemo KVOCIENT števil a in b in označimo:
$\frac{a}{b}$, $a:b$, a/b.

V $\mathbb{Q}$ lahko torej seštevamo, odštevamo, množimo in delimo (razen z 0). Množico števil, za katero veljajo aksiomi A1–A10, imenujemo OBSEG (števil). $\mathbb{Q}$ je obseg.

Delitev na pozitivna, negativna števila in 0:

AKSIOM 11. Če je število $a \neq 0$, je natanko eno od števil $a, -a$ pozitivno. Število 0 ni niti pozitivno niti negativno.

AKSIOM 12. Vsota $a+b$ in produkt ab pozitivnih števil a in b sta pozitivni števili.

Množica pozitivnih števil je torej ZAPRTA za seštevanje in množenje.

Aksiomi o urejenosti $\mathbb{Q}$:

<u>Urejenost</u>: Naj bosta $a, b \in \mathbb{Q}$ poljubni števili. Pravimo, da je $a > b$ ($\equiv b < a$), če je razlika $a-b$ pozitivna. Posebej torej $a > 0$ pomeni, da je $a - 0$ pozitivna, torej a pozitiven in $-a$ negativno število.

<u>Opomba 1.</u> Če sta a in b dve števili, nastopi natanko ena od možnosti: $a > b$, $a = b$, $a < b$ ($a-b$ pozitivno, nič ali negativno).

<u>Opomba 2.</u> (Tranzitivnost urejenosti)

$$a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c.$$

<u>DOKAZ</u>. $a-b$ pozitivno, $b-c$ pozitivno $\Rightarrow$ vsota je pozitivna: $a-b+b-c = a-c$ je pozitivno $\Rightarrow a > c$. ∎

<u>Opomba 3.</u> Če je $a > b$, je $a + c > b + c$ za $\forall c$. Če je $a > b$, $c > 0$, je $ac > bc$. Če je $a > b > 0$ in $c > d > 0$, je $ac > bd$.

<u>DOKAZ</u>.
- $a > b \Rightarrow a-b$ je pozitivno, $a - b > 0 \overset{(A3)}{\Rightarrow} (a-b)+0 > 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (a-b)+(c-c) > 0 \Rightarrow a+c-b-c > 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (a+c)+(-1)\cdot b+(-1)\cdot c \overset{(O2)}{>} 0 \Rightarrow (a+c)+(-1)(b+c) > 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (a+c) - 1\cdot(b+c) > 0 \Rightarrow (a+c)-(b+c) > 0 \overset{(ur.)}{\Rightarrow} (a+c) > (b+c)$. ∎
- $a > b \Rightarrow a-b > 0 \Rightarrow a\cdot 1 - b \cdot 1 > 0 \Rightarrow a\cdot c\cdot c^{-1} - b\cdot c\cdot c^{-1} > 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow c^{-1}(a\cdot c) - c^{-1}(b\cdot c) > 0\cdot c^{-1} \Rightarrow c^{-1}(ac-bc) > 0 \wedge c^{-1} > 0$
  $\Rightarrow ac - bc > 0 \Rightarrow ac > bc$ ∎   <u>$c>0 \Rightarrow c^{-1}>0$</u>: $c>0, c^{-1}<0 \Rightarrow cc^{-1} = -c(-c^{-1}) > 0$ $<0 \Rightarrow 1<0$
- $a > b > 0 \wedge c > d > 0 \Rightarrow a\cdot c > bc,\ c\cdot b > d\cdot b \Rightarrow a\cdot c > b\cdot c,\ b\cdot c > b\cdot d$
  $\Rightarrow a\cdot c > b\cdot d$ ∎

V $\mathbb{Q}$ lahko seštevamo, odštevamo, množimo in delimo in imamo relacijo urejenosti (A11, A12). Množico števil, za katero veljajo A1 - A12, imenujemo urejen obseg števil.

2. DEDEKINDOV AKSIOM, REALNA ŠTEVILA

03.10.2002

Zaenkrat še delamo z racionalnimi števili.

Definicija. Množica števil M je navzgor omejena, če obstaja število a, da je $x \leq a$ za $\forall x \in M$.

Vsakemu takemu a pravimo ZGORNJA MEJA množice M.

Opomba. Če je množica M navzgor omejena, ima nešteto zgornjih mej.

Z geometrijsko konstrukcijo lahko vsako racionalno število predstavimo kot točno določeno točko na številski premici.

Definicija. NATANČNA ZGORNJA MEJA. Naj bo M navzgor omejena množica števil. Najmanjšo (če obstaja) od vseh zgornjih mej množice M, imenujemo natančna zgornja meja.

Torej je m natančna zgornja meja M, če je:

i) $x \leq m$ za $\forall x \in M$ (m je zgornja meja),

ii) $c < m \Rightarrow c$ ni več zgornja meja: za vsaj en $y \in M$ velja: $c < y$.

Oznaka. Natančno zgornjo mejo množice M označimo s $\sup M$ (supremum).

Primer 1. Naj bo M množica vseh negativnih racionalnih števil. Natančna zgornja meja je potem 0, ker: $a \leq 0$ za $\forall a \in \mathbb{Q}^-$, če je $c < 0$ obstaja $y = \frac{c}{2}$ negativno in $c < y$.

<u>Primer 2</u>. Naj bo M množica vseh števil, ki niso pozitivna. Tedaj je spet $\sup M = 0$. (Supremum je lahko v M ali pa ne. Tukaj je $0 \in M$).

<u>Opomba</u>. Analogno definiramo navzdol omejene množice in spodnje meje. Natančna spodnja meja ($\inf M$ - infimum) je največja od spodnjih mej.

<u>Primer 3</u>. (Še zmeraj smo med racionalnimi števili!) Naj bo M množica vseh pozitivnih števil, katerih kvadrat je manjši od 2.

Pokažemo, da je m navzgor omejena: če je $x \in M$, je $x^2 < 2 < 9$, torej gotovo $x^2 < 9$ in $x \leq 3$. Torej je 3 zgornja meja. ⇒ zgornja meja obstaja

Vsako pozitivno število a, za katero je $a^2 > 2$ je zgornja meja. Če je $x \in M$ je $x^2 < 2 < a^2$, torej $x^2 < a^2$, torej $x < a$. $\Rightarrow a^2 > 2 \Rightarrow a$ je zgornja meja

Nobeno pozitivno število za katerega je $a^2 < 2$ ni zgornja meja. Pokažemo: $\Rightarrow a^2 < 2 \Rightarrow a$ ni zg. m.

$$a^2 < 2 \qquad q = \frac{2a+2}{a+2} = a + \frac{2-a^2}{a+2} > a.$$

$$q^2 - 2 = (4a^2 + 8a + 4)/(a^2 + 4a + 4) - 2 =$$

$$= \frac{4a^2 + 8a + 4 - 2a^2 - 8a - 8}{(a+2)^2} = \frac{2a^2 - 4}{(a+2)^2} =$$

$$= \frac{-2(2-a^2)}{(a+2)^2} < 0$$

Torej je $q^2 - 2$ manjše od 0, torej $q^2 < 2$. Potem je $q \in M$. Torej je $q \in M$ in $q > a$, torej a ni zgornja meja.

Sledi, da je pri natančni zgornji meji $\sup M$ $(\sup M)^2 = 2$.

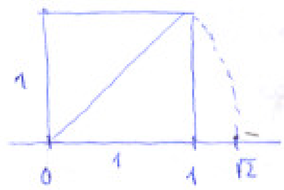
Pišemo $\sup M = a = \frac{m}{n}$, kjer sta m in n tuji.

$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m$ je sod (saj je kvadrat lihega števila vedno liho število). Potem je leva stran deljiva s 4.

zato je tudi desna stran deljiva s 4. Potem je tudi n sod, kar je protislovje ($(m,n)=1$). Sledi da je predpostavka $a=\frac{m}{n}$ napačna, t.j. 2 ni kvadrat nobenega racionalnega števila.

Posledica: M nima natančne zgornje meje v $\mathbb{Q}$.

Opomba. Množica vseh pozitivnih števil $a : a^2 > 2$ nima natančne spodnje meje.



(Konstrukcija $\sqrt{2}$)

Želimo, da bi vsaka točka na premici predstavljala neko število.
K A1–A12 dodamo še en aksiom, ki ga racionalna števila ne izpolnjujejo:

DEDEKINDOV AKSIOM. (A 13) Vsaka neprazna navzgor omejena množica števil ima natančno zgornjo mejo.

Opomba. Primer 3 ne izpolnjuje aksioma 13. Katera števila pa izpolnjujejo tudi A13? Taka števila se bodo imenovala REALNA ŠTEVILA. Kako videti, da realna števila obstajajo? Kako jih konstruirati iz racionalnih števil?

Osnovni izrek. (o obstoju realnih števil) Obstaja urejen obseg števil $\mathbb{R}$ (t.j. izpolnjuje aksiome A1–A12), ki izpolnjuje tudi A13 in vsebuje $\mathbb{Q}$ kot podobseg ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ in operacije $+$ in $\cdot$ v $\mathbb{R}$, uporabljena na $\mathbb{Q}$, sovpadata z že znanim seštevanjem in množenjem na $\mathbb{Q}$). Dalje, pozitivna števila v $\mathbb{R}$, ki so racionalna, so natanko $\mathbb{Q}^+$. $\mathbb{R}$ je obseg realnih števil.

Celoten dokaz je v Rudin: Principles of Mathematical Analysis in Vidav.

IDEJA DOKAZA. Idejo za konstrukcijo dajo zgornji primeri. Recimo, da želimo na premici opaziti "število", katerega kvadrat je 2. Da bi do tako točke prišli, vsa racionalna števila prerežemo na dva dela: tista, katerih kvadrat je manjši od 2 in tista, katerih kvadrat je večji (ali enak) 2 (spodnji in zgornji razred).

Definicija. Realno število je rez, ki razdeli racionalna števila na dva razreda.

$\mathbb{R}$ bo množica rezov. Rez (presek) je množica $A \subset \mathbb{Q}$, za katero je

i) $A \neq \emptyset$ in $A \neq \mathbb{Q}$,

ii) če je $p \in A$ in $q < p$, je $q \in A$,

iii) če je $p \in A$, je $p < r$ za nek $r \in A$ (natančne zgornje meje ne vzamemo zraven).

Definicija. Vsota rezov A in B, $A+B$, je množica vseh vsot oblike $r+s$, kjer je $r \in A$ in $s \in B$. Rez 0^* je množica vseh negativnih racionalnih števil.

Veljajo A1 - A4. Nasprotni rez definiramo kot množico tistih p, za katere obstaja $r > 0$, da je $-p-r \notin A$.

Rez A je pozitiven, če vsebuje 0^* (pa ni 0^*). $A \geq B$, če A vsebuje B.

Produkt pozitivnih rezov $A \cdot B$ je množica vseh p, da je $p \leq r \cdot s$ za $r \in A$, $s \in B$, $r > 0$, $s > 0$.

Rez 1^* je množica vseh $q < 1$.

Produkt poljubnih A in B je $(-A) \cdot (-B)$, če je $A, B < 0^*$, $-[(-A) \cdot B]$, če je $A < 0^*$, $B > 0^*$ in $-[A(-B)]$, če je $A > 0^*$ in $B < 0^*$.

Preprosto se pokaže, da množica rezov s temi operacijami izpolnjuje A1 - A12.

Rezi, dani z racionalnimi števili: če je $r \in \mathbb{Q}$, je r^* množica vseh $p \in \mathbb{Q}$, $p < r$. Tedaj velja $r^* + s^* = (r+s)^*$, $r^* \cdot s^* = (r \cdot s)^*$. $r^* > 0^*$ $\Leftrightarrow r > 0$. Zato lahko pri računanju identificiramo racionalno število r z rezom r^*.

Izpolnitev A13 o natančni zgornji meji: Naj bo $\mathcal{A}$ neprazna množica v $\mathbb{R}$ (množici rezov) in naj bo $B \in \mathbb{R}$ njena zgornja meja. Naj bo C unija vseh množic $A \in \mathcal{A}$. Pokažemo, da je C rez, t.j. $C \in \mathbb{R}$ in je $C = \sup \mathcal{A}$. Ker $\mathcal{A} \neq \emptyset$, obstaja $A_0 \in \mathcal{A}$. Ta A_0 ni prazen. Ker je $A_0 \subset C$, tudi C ni prazen. Dalje, $C \in B$, saj je vsak $A \subset \mathcal{A}$ vsebovan v

B (ker je B zgornja meja od A), $\leq$ pa pri rezih pomeni vsebovanje.
Ker $B \neq \mathbb{Q}$, potem $C \neq \mathbb{Q}$ (ker je $C \leq B$). Zato za C velja, da $C \neq \emptyset$ in $C \neq \mathbb{Q} \Rightarrow$ (i)

Naj bo $p \in C$. Potem je $p \in A_1$ za $A_1 \in \mathcal{A}$ (saj je C unija vseh $A \in \mathcal{A}$). Če je $q < p$, je $q \in A_1$, zato je $q \in C \Rightarrow$ (ii)

Če je $r \in A_1$ in $r > p$, potem je $r \in C$ ($p \in C$!!!). $\Rightarrow$ (iii)

Sledi, da C izpolnjuje (i), (ii), in (iii), torej je C res rez.

C je unija vseh $A \in \mathcal{A}$ in je rez. Po definiciji neenakosti $\leq$ pri rezih je $A \leq C$ za $\forall A \in \mathcal{A}$. Naj bo $D < C$. Torej je D prava podmnožica od C ($D \subset C$ in $D \neq C$). Tedaj obstaja $s \in C$, $s \notin D$. Ker je $s \in C$, je $s \in A$ za nek $A \in \mathcal{A}$. Ker $s \notin D$, je D prava podmnožica od A. Torej je $D < A$. Zato D ni več zgornja meja od $\mathcal{A}$.

Pokazali smo, da je C zgornja meja in če ga malo zmanjšamo (D), potem ni več zgornja meja. Torej je C najmanjša zgornja meja. $\blacksquare$

<u>Opomba</u>. To konstrukcijo je Dedekind objavil 1872. Drugo konstrukcijo je (z ekvivalenčnimi razredi Cauchyjevih zaporedij) objavil istega leta Cauchy.

Realna števila napolnijo vso premico.

POSLEDICE DEDEKINDOVEGA AKSIOMA

1. Vsaka navzdol omejena množica realnih števil ima natančno spodnjo mejo.

2. Množica celih števil $\mathbb{Z}$ ni navzgor omejena.

   <u>DOKAZ</u>. Če bi bila, bi imela natančno zgornjo mejo m. Tedaj $m-1$ ne bi mogla biti več zgornja meja. Potem bi obstajalo vsaj eno celo število $n > m-1$. Sledi $n+1 > m$. Ker je $n+1 \in \mathbb{Z}$, m ne more biti zgornja meja. Protislovje. $\blacksquare$

   Podobno $\mathbb{Z}$ ni navzdol omejena.

3. Za $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists b \in \mathbb{Z}$ da je $b > a$.

DOKAZ. Recimo, da $\exists\, a$, da je $a > b \in \mathbb{Z}$ za $\forall b$. Potem je a zgornja meja od $\mathbb{Z}$. Kar je protislovje z (2). ■

4. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ poljubni pozitivni števili. Obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $na > b$. (Arhimedova lastnost)

DOKAZ. Po (3) obstaja celo število n, da je $n > \frac{b}{a}$. Torej je $na > b$. ■

5. Naj bo $a > 0$. Obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $\frac{1}{n} < a$.

DOKAZ. Po (3) obstaja n, ki je večji od $\frac{1}{a}$. $n > \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{n} < a$. ■

3. INTERVALI

Definicija. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množico vseh $x \in \mathbb{R}$ med a in b imenujemo interval:

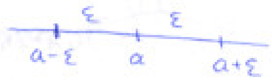
a) odprt $(a, b) = \{x;\ x > a,\ x < b\}$

b) zaprt $[a, b] = \{x;\ x \geq a,\ x \leq b\}$

c) $[a, b) = \{x;\ x \geq a,\ x < b\}$

d) $(a, b] = \{x;\ x > a,\ x \leq b\}$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ imenujemo ε-okolica števila a.



Decimalni ulomki

Vsako realno število je mogoče zapisati kot (končni ali) neskončni decimalni ulomek:

$x > 0$, $x \in \mathbb{R}$ omejimo med $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Interval $[n, n+1)$ razdelimo na 10 delov, x pade v enega od teh, ...

Naj bo $x > 0$. Po Posledici 3 obstaja $m \in \mathbb{Z}$, $m > x$. Množica $M = \{m \in \mathbb{Z}, m > x\}$ ni prazna. Je navzdol omejena (x !!!), zato ima natančno spodnjo mejo $\alpha \in M$. Če je $\alpha \notin M$, bi poljubno blizu α morala biti števila iz M. Ker so števila iz M med seboj oddaljena vsaj za 1, je tudi $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in M$. To pomeni, da obstaja najmanjše celo število α, ki je večje od x. Potem je $x \in [\alpha-1, \alpha)$. ($\exists\, n_0 \ni: x \in [n_0, n_0+1)$). Potem je n_0 največje celo število, da je $n_0 \leq x$. Sedaj poiščemo največje nenegativno celo število n_1, da je $n_0 + \frac{n_1}{10} \leq x$. (Možnosti je 10: $n_1 \in \{0, \dots, 9\}$)

Nadaljujemo. Ko smo izbrali $n_0, n_1, \dots, n_{k-1}$ je n_k največje tako celo število, da je $m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2} + \dots + \frac{m_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{m_k}{10^k} \leq x$.

$m_0, m_1 m_2 m_3 \dots m_k$ je decimalni zapis števila

Naj bo E množica števil $\{m_0 + \frac{m_1}{10} + \dots + \frac{m_k}{10^k}\ ;\ k = 0, 1, \dots\}$. Tedaj je $x = \sup E$. Pravimo, da je $x = m_0, m_1 m_2 \dots$ zapisan kot neskončni decimalni ulomek.

DOKAZ. x je natančna zgornja meja od E, če je zgornja meja in ni manjše.

a) Po definiciji števil iz E je vsako manjše ali enako x. Torej je x zgornja meja.

b) S protislovjem: denimo, da obstaja $y < x$, da je tudi y zgornja meja. Naj bo $\frac{1}{10^k} \leq x - y < \frac{1}{10^{k-1}}$. Potem je $z = m_0 + \frac{m_1}{10} + \dots + \frac{m_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{m_k}{10^k}$, $x - z = \frac{m_{k+1}}{10^{k+1}} + \dots \overset{*}{<} \frac{1}{10^k}$, $-z \leq -y$ oz. $z \geq y$. Potem y ni zgornja meja. Protislovje.

$\Rightarrow$ x je natančna zgornja meja.

* če je $x - z > \frac{1}{10^k}$, je $z + \frac{1}{10^k} < x$ in $\exists m > m_k$, da je $m_0 + \dots + \frac{m_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{m}{10^k} < x$, protislovje.

Posledica. Racionalna števila so povsod gosta v $\mathbb{R}$: med poljubnima dvema realnima številoma (če sta še tako blizu) je racionalno število.

DOKAZ. Naj bo $a < b$, $x = \frac{a+b}{2}$. Razvijmo x v neskončni decimalni ulomek. Naj bodo $x_0, x_1, x_2, \dots$ zaporedni decimalni približki za x. $M = \{x_0, x_1, \dots\}$. Vemo: $x = \sup M$. Ker je x natančna zgornja meja od M in $a < x$, obstaja $x_m \in M$, da je $x_m > a$. Torej je $a < x_m \leq x < b$. Torej je $a < x_m < b$ in smo našli racionalno število x_m med a in b.

Definicija. Realna števila, ki niso racionalna, imenujemo iracionalna. Realna števila, ki so rešitve kakšne algebraične enačbe $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$, kjer so $a_i \in \mathbb{Q}$, imenujemo ALGEBRAIČNA ŠTEVILA. (Primer: $x = \sqrt{2}$: $x^2 - 2 = 0$)
Iracionalna števila, ki niso algebraična, imenujemo TRANSCENDENTNA ŠTEVILA. (Primer: π, e).

10. 10. 2002

4. PEANOVI AKSIOMI

To so osnovne lastnosti naravnih števil $\mathbb{N}$, ki jih je formuliral italijanski matematik Peano (1858 - 1932).

P1. 1 je naravno število.

P2. Vsakemu naravnemu številu n (je prirejeno) sledi natanko določeno naravno število (NASLEDNIK n), ki ga označimo z n^+.

P3. Iz $n \neq m$ sledi $n^+ \neq m^+$.

P4. Število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.

P5. Vsaka množica naravnih števil, ki vsebuje 1 in je v njej s številom n vedno tudi n^+, vsebuje vsa naravna števila ($= \mathbb{N}$). $(P \subset \mathbb{N},\ 1 \in P,\ n \in P \Rightarrow n^+ \in P) \Rightarrow P = \mathbb{N}$
(AKSIOM O POPOLNI INDUKCIJI)

Opomba. Samo s pomočjo Peanovih aksiomov je mogoče v $\mathbb{N}$ najprej uvesti $+$ in $\cdot$ z osnovnimi lastnostmi in nato $\mathbb{N}$ vložiti v $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{Q}$ in iz $\mathbb{Q}$ z rezi konstruirati $\mathbb{R}$. Torej je mogoče realna števila konstruirati, če za osnovo vzamemo $\mathbb{N}$ z lastnostmi P1 - P5.

Opomba. Primer definicije vsote s pomočjo P1 - P5.

$p \in \mathbb{N} \quad p+1 := p^+,\ p+2 := (p+1)^+,\ p+3 := (p+2)^+ \ldots$

$p+k$ poznamo, $p+k+1 = (p+k)^+$

Vemo, kaj pomeni prišteti 1. Če vemo, kaj pomeni prišteti k, vemo prišteti $k+1$. Iz P5 sledi, da znamo prišteti poljubno število.

Produkt:

$p \in \mathbb{N} \quad p \cdot 1 = p,\ p \cdot 2 = p+p,\ p \cdot 3 = (p+p)+p = p \cdot 2 + p \ \ldots$

$p \cdot (k+1) = p \cdot k + p$

P znamo pomnožiti z 1, če ga znamo pomnožiti s k, ga znamo tudi s $k+1$, torej po P5 z vsemi.

5. ABSOLUTNA VREDNOST

Definicija. Če je $x \in \mathbb{R}$ je $|x| = \begin{cases} x, & \text{če je } x \geq 0 \\ -x, & \text{če je } x < 0 \end{cases}$

Opomba. $|x| = 0$ natanko tedaj, ko je $x = 0$.

$|x| = |-x|$

$-|x| \leq x \leq |x|$

Na številski premici je $|x|$ razdalja od 0 do x.

Propozicija. $|a+b| \leq |a| + |b|$

$|a \cdot b| = |a||b|$

DOKAZ.

i) $\underline{|a+b| \leq |a|+|b|}$ BŠZS: $|a| \geq |b|$ če je $a \geq b \geq 0$ $|a+b| = a+b = |a|+|b|$

če je $a \geq 0 \geq b$ $|a+b| = \underbrace{a+b}_{\substack{\leq 0 \\ \geq 0}} \leq a + \underbrace{|b|}_{\geq 0} = |a|+|b|$

če je $0 \geq a \geq b$ $|a+b| = \underbrace{-a-b}_{\geq 0} = |a|+|b|$

ii) ~ $a>0, b>0$ $|a \cdot b| = a \cdot b = |a||b|$

~ $a>0, b<0$ $|\underbrace{ab}_{<0}| = a \cdot (-b) = \underbrace{-ab}_{>0} = |a||b|$

~ $a<0, b<0$ $|\underbrace{ab}_{>0}| = -a(-b) = \underbrace{ab}_{>0} = |a||b|$

Posledica. $|a-b| \leq |a| + |b|$

$|a+b| \geq ||a|-|b||$

DOKAZ.

$$\left.\begin{array}{l} |a+b-b| \leq |a+b| + |b| \Rightarrow |a|-|b| \leq |a+b| \\ |a+b-a| \leq |a+b| + |a| \Rightarrow |b|-|a| \leq |a+b| \end{array}\right\} \Rightarrow |a+b| \geq ||a|-|b||$$

Posledica. $|a-b| \geq ||a|-|b||$

6. KOMPLEKSNA ŠTEVILA

Da bi npr. lahko reševali enačbe $x^2 = a$ za vsak $a \in \mathbb{R}$, razširimo obseg $\mathbb{R}$ na obseg kompleksnih števil $\mathbb{C}$.

Definicija. Kompleksno število je urejen par (a, b) realnih števil.

Definicija. Naj bo $x = (a, b)$ in $y = (c, d)$. Potem je $x = y$ natanko tedaj, ko je $a = c$ in $b = d$.

- $x+y = (a+c, b+d)$ - $(0,0) = 0$, $(1,0) = 1$
- $xy = (ac-bd, ad+bc)$

Izrek. Množica $\mathbb{C}$ z vsoto in produktom, definiranima kot zgoraj, in z $(1,0)$ kot 1 je obseg. (Izpolnjuje vse lastnosti A1 - A10)

DOKAZ. $x=(a,b)$, $y=(c,d)$, $z=(e,f)$

A1: $(x+y)+z = (a+c, b+d)+(e,f) = ((a+c)+e, (b+d)+f) =$
$= (a+(c+e), b+(d+f)) = (a,b)+(c+e, d+f) =$
$= x+(y+z)$

A3: $x+0 = (a,b)+(0,0) = (a+0, b+0) = (a,b) = x$

A4: Definirajmo: $-x = (-a,-b)$
$x+(-x) = (a,b)+(-a,-b) = (a+(-a), b+(-b)) = (0,0) = 0$

A5: $(xy)z = (ac-bd, ad+bc)(e,f) = ((ac-bd)e-(ac-bd)f,$
$(ad+bc)e+(ad+bc)f) = (ace-bde-acf-bcf, acf-bdf+ade+bce) =$
$= x(yz)$

A7: $x\cdot 1 = (a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1-b0, a0+b1) = (a,b) = x$

A8: Definirajmo: $x\neq 0$, $(a,b)\neq(0,0)$ oz. $a\neq 0$ ali $b\neq 0$, torej $a^2+b^2>0$.

$x^{-1} = \frac{1}{x} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

$x\cdot\frac{1}{x} = (a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2}-\frac{ba}{a^2+b^2}\right) =$
$= (1,0) = 1$

Izrek. $(a,0)+(b,0) = (a+b, 0)$
$(a,0)\cdot(b,0) = (ab, 0)$

Opomba. Kompleksna števila oblike $(a,0)$ lahko torej identificiramo z realnimi števili. $\mathbb{C}\ni(a,0)\leftrightarrow a\in\mathbb{R}$

Definiramo $i := (0,1)$.

Opomba. $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$

Opomba. Za lažje računanje: $a,b\in\mathbb{R}$ $(a,b) \overset{\text{dogovor}}{=} a+bi$.
$(a,b) = (a,0)+(0,b) = a+b(0,1) = a+bi$

Definicija. Če je $a, b \in \mathbb{R}$ in $z = a+bi$, potem je $\bar{z} = a - bi$ konjugirano število številu z.

a se imenuje realni del kompleksnega števila, b se imenuje imaginarni del.

$$a = \operatorname{Re} z$$
$$b = \operatorname{Im} z$$

Izrek. $z, w \in \mathbb{C}$

(i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(ii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(iii) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

(iv) $z\bar{z} = a^2+b^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$

DOKAZ.

i) $\bar{z}+\bar{w} = \overline{a+bi} + \overline{c+di} = a-bi+c-di = (a+c) - i(b+d) = \overline{(a+c)+i(b+d)} = \overline{z+w}$

ii) $\overline{zw} = \overline{(ac-bd)+i(bc+ad)} = (ac-bd) - i(bc+ad) = (a-bi)(c-di) = \bar{z}\,\bar{w}$

iii) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad a+bi+a-bi = z+\bar{z} = 2a = 2\operatorname{Re} z$

Definicija. $z \in \mathbb{C}$ $\quad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$, $z = a+bi; a,b \in \mathbb{R}$

Izrek. $z, w \in \mathbb{C}$

(i) $|z| > 0$, razen $z = 0 \Rightarrow |z| = 0$

(ii) $|\bar{z}| = |z|$, ker $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-b)^2}$

(iii) $|zw| = |z||w|$

(iv) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

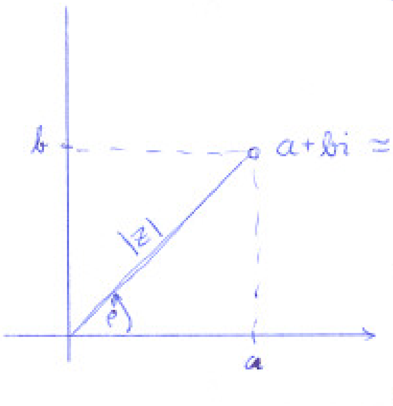
(v) $|z+w| \leq |z| + |w|$

DOKAZ. (v) $\overline{(\bar{z}w)} = \bar{\bar{z}} \cdot \bar{w} = z \cdot \bar{w}$

$$z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w = 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})$$

$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\cdot\bar{w}) + |w|^2 \leq$$
$$\leq |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 =$$
$$= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$$

15. 10. 2002



$a+bi \simeq (a,b) = z$

$a = |z|\cos\varphi$ $\quad z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi =$

$b = |z|\sin\varphi$ $\quad = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

φ ... argument z $\quad \varphi = \arg z$

KORENI ENOTE

So rešitve enačbe $z^n = 1$.

$$z = |z|\cos\alpha + i|z|\sin\alpha$$
$$w = |w|\cos\beta + i|w|\sin\beta$$

$$z \cdot w = (|z|\cos\alpha + i|z|\sin\alpha)\cdot(|w|\cdot\cos\beta + i|w|\sin\beta) =$$
$$= |zw|\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right)$$

Dve kompleksni števili zmnožimo tako, da se koti seštejejo, absolutne vrednosti pa zmnožijo.

$$\left(|z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi\right)^n = 1$$

$$|z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) = 1$$

$$\Rightarrow |z| = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos n\varphi = 1\\ \sin n\varphi = 0\end{array}} \Rightarrow n\varphi = 2\pi k$$
$$\varphi = 0, \tfrac{2\pi}{n}, \tfrac{4\pi}{n}, \dots, \tfrac{n}{n}2\pi, \dots$$

Rešitve enačbe so:
$$\boxed{\begin{array}{l} z = 1\\ z = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\\ z = \cos\frac{2}{n}\cdot 2\pi + i\sin\frac{2}{n}2\pi\\ \vdots\\ z = \cos\frac{n-1}{n}2\pi + i\sin\frac{n-1}{n}2\pi\end{array}}$$

To so oglišča pravilnega mnogokotnika na enotski krožnici.

II. ZAPOREDJA IN VRSTE

1. O MNOŽICAH IN PRESLIKAVAH

Definicija. Naj bosta A in B dve množici. Preslikava f množice A v množico B je pravilo, ki vsakemu $a \in A$ priredi natanko določen element $b \in B$.

Označimo $b = f(a)$.

A imenujemo definicijsko območje preslikave f.

Množico vseh $f(a)$, $a \in A$ imenujemo zaloga vrednosti.

Definicija. Naj bosta A in B dve množici, $f: A \to B$ preslikava. Če je $E \subset A$, označimo z $f(E)$ množico vseh elementov iz B oblike $f(a)$, $a \in E$. Pravimo, da je $f(E)$ slika množice E s preslikavo f.