KORENI ENOTE

So rešitve enačbe $z^n = 1$.

$$z = |z|\cos\alpha + i|z|\sin\alpha$$
$$w = |w|\cos\beta + i|w|\sin\beta$$

$$z \cdot w = \left(|z|\cos\alpha + i|z|\sin\alpha\right)\cdot\left(|w|\cdot\cos\beta + i|w|\sin\beta\right) =$$
$$= |zw|\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right)$$

Dve kompleksni števili zmnožimo tako, da se koti seštejejo, absolutne vrednosti pa zmnožijo.

$$\left(|z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi\right)^n = 1$$

$$|z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) = 1$$

$$\Rightarrow |z| = 1$$

$$\boxed{\begin{matrix}\cos n\varphi = 1\\ \sin n\varphi = 0\end{matrix}} \Rightarrow n\varphi = 2\pi k$$
$$\varphi = 0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{n}{n}2\pi, \ldots$$

Rešitve enačbe so:

$$\boxed{\begin{aligned} z &= 1\\ z &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\\ z &= \cos\frac{2}{n}\cdot 2\pi + i\sin\frac{2}{n}2\pi\\ &\vdots\\ z &= \cos\frac{n-1}{n}2\pi + i\sin\frac{n-1}{n}2\pi \end{aligned}}$$

To so oglišča pravilnega mnogokotnika na enotski krožnici.

II. ZAPOREDJA IN VRSTE

1. O MNOŽICAH IN PRESLIKAVAH

Definicija. Naj bosta A in B dve množici. Preslikava f množice A v množico B je pravilo, ki vsakemu $a \in A$ priredi natanko določen element $b \in B$. Označimo $b = f(a)$.

A imenujemo definicijsko območje preslikave f.

Množico vseh $f(a)$, $a \in A$ imenujemo zaloga vrednosti.

Definicija. Naj bosta A in B dve množici, $f: A \to B$ preslikava. Če je $E \subset A$, označimo z $f(E)$ množico vseh elementov iz B oblike $f(a)$, $a \in E$. Pravimo, da je $f(E)$ slika množice E s preslikavo f.

Poseben primer: $f(A)$ je kar zaloga vrednosti.

Če je $f(A) = B$, se f imenuje surjektivna preslikava (surjekcija).

A imenujemo definicijsko območje.

Preslikava je injektivna, če iz $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Definicija. $f: A \to B$, $E \subset B$, tedaj je $f^{-1}(E)$ množica vseh takih $a \in A$, za katere je $f(a) \in E$.

Posebej, če je $b \in B$ je $f^{-1}(b)$ množica vseh $a \in A$, da je $f(a) = b$.

$f^{-1}(E)$ imenujemo inverzna slika (praslika) množice E pri f.

Opomba. Preslikava $f: A \to B$ je injektivna, če ima za $\forall b \in B$ množica $f^{-1}(b)$ vsebuje kvečjemu en element iz A.

Definicija. $f: A \to B$ je bijektivna (povratno enolična), če je hkrati injektivna in surjektivna.

Opomba. Naj bo $f: A \to B$ bijekcija. $b \in B$. Ker je f surjektivna, obstaja a iz A, da je $f(a) = b$, ker je injektivna, je tak a en sam. Torej za vsak $b \in B$ obstaja natanko en $a \in A$, da je $f(a) = b$. Tako je definirana iz B v A $b \in B \mapsto a$; $f(a) = b$ ~ inverzna preslikava bijektivne preslikave f, pišemo $f^{-1}: B \to A$, $f^{-1}(b) = a \Rightarrow f(a) = b$.

Definicija. $f: A \to B$, $g: B \to C$. Kompozicija (kompozitum) preslikave f s preslikavo g je preslikava iz A v C, ki jo označimo z $g \circ f$ in je definirana $g \circ f(a) = g(f(a))$.

Primer. $id_A: A \to A$; $id_A(a) = a$

Opomba. $f: A \to B$ je bijektivna. $f^{-1} \circ f \equiv id_A$, $f \circ f^{-1} = id_B$.

Definicija. Množici A in B sta enako močni (EKVIPOLENTNI), če obstaja bijektivna preslikava $f: A \to B$. Pravimo, da imata A in B isto moč (isto kardinalno število).

Opomba. Definicija je dobra, saj je $f^{-1}: B \to A$ tudi bijekcija.

Opomba. Pišimo $A \sim B$, če sta A in B ekvipolentni. Velja

i) $A \sim A$ (refleksivnost)

ii) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (simetričnost)

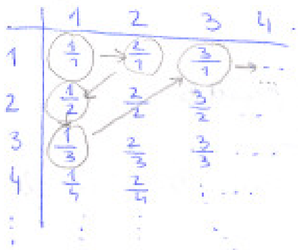
iii) $A \sim B$ in $B \sim C$ je $A \sim C$ (tranzitivnost)

Relacijo $\sim$ z lastnostmi i, ii, iii imenujemo ekvivalenčna relacija (relacija ekvivalence).

Izrek. Končni množici sta ekvipolentni natanko tedaj, ko imata isto število elementov.

Definicija. Vsaka množica, ki je ekvipolentna $\mathbb{N}$, se imenuje ŠTEVNA množica.

Primeri: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$



Preštejemo $\mathbb{Q}^+$.

Izrek. Vsaka neskončna podmnožica števne množice je števna.

DOKAZ. Elemente oštevilčimo z naravnimi števili (gledamo kot $\mathbb{N}$). Naša neskončna podmnožica B bo tako kar podmnožica $\mathbb{N}$. Naj bo n_1 najmanjše število, ki je v B, n_2 najmanjše število iz B, ki je večje od n_1, ... Ker je B neskončna, se to nikoli ne neha, pridemo pa do vseh števil iz B. Naša bijekcija je $f: B \leftarrow \mathbb{N}$, $f(k) = n_k$. ⊠

2. ZAPOREDJA ŠTEVIL (neskončna ~)

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

Definicija. Zaporedje realnih števil je preslikava iz $\mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$, označimo jo z f, potem je $f(n) = a_n$.
(Vsakemu naravnemu številu pripade natančno določeno realno število.)

17.10.2002

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ a_n ... n-ti člen zaporedja

Primeri: $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$a_n = n$: $1, 2, 3, 4, \dots$

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$ $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $\forall n \geq 3$

(Fibonacci)

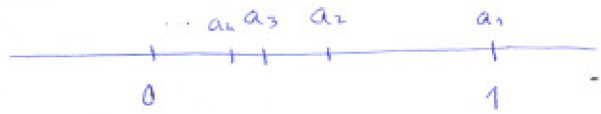
Definicija. Zaporedje a_n je navzgor omejeno (če je zaloga vrednosti preslikave $n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N}$, t.j. množica vseh a_n navzgor omejena, t.j.), če obstaja $M < \infty$, da je $a_n \leq M$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Podobno definiramo navzdol omejeno zaporedje.

Definicija. Natančna zgornja meja zaporedja a_n (ki je navzgor omejeno), označimo jo s $\sup a_n$, je natančna zgornja meja množice vseh a_n, torej če:

i) $a_n \leq l$ za $\forall n$

ii) za $\forall\, l' < l \;\; \exists a_{n_0} \ni: a_{n_0} > l'$.

Primer. $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$



Zaporedje je navzgor in navzdol omejeno.

$\sup a_n = 1$ $\inf a_n = 0$

∘ $a_n \leq 1 \;\forall n$
$\frac{1}{n} \leq 1 \;\forall n$ ✓

∘ $l' < 1 \Rightarrow a_1 > l'$ ✓

$\sup a_n = 1$

∘ $a_n \geq 0 \;\forall n$
$\frac{1}{n} \geq 0 \;\forall n$ ✓

∘ $l' > 0 \Rightarrow \exists\, \frac{1}{n} < l'$
$\exists n: n > \frac{1}{l'}$ ✓

$\inf a_n = 0$

3. STEKALIŠČA ZAPOREDJA

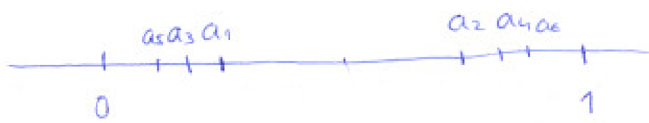
Definicija. Število a imenujemo stekališče zaporedja a_n, če v vsaki (še tako majhni) okolici števila a leži neskončno mnogo členov zaporedja a_n.

ε-okolica št. a: $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \ni: |x-a| < \varepsilon\}$

a je stekališče zaporedja a_n, če za $\forall \varepsilon > 0$ velja, da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za neskončno mnogo n.

Primer: i) $1, 2, 3, \dots$ nima stekališča

ii) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots$



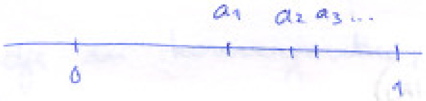
Zaporedje ima dve stekališči: 0 in 1.

DOKAZ. $|a_n - 1| < \varepsilon$? za nesk. n ?

Ogledamo si člene $a_2, a_4, a_6, \dots$, torej oblike $\frac{m}{m+1} = a_m, m \in S$

$$\left|\frac{m}{m+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{m+1}\right| = \left|\frac{1}{m+1}\right| < \varepsilon$$

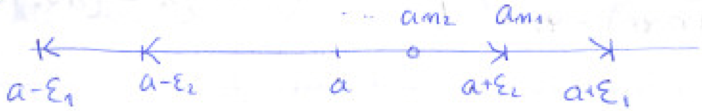
Takih $m \in S$ je neskončno. (Obstaja najmanjši $m_0 \in S$, da je $|m_0 + 1| > \frac{1}{\varepsilon}$, potem je $\forall n \in S, n > m_0$ ustrezen.)

iii) $a_n = \frac{n}{n+1}$ 

Edino stekališče je 1.

Izrek. Če vsaka (še tako majhna) okolica števila a vsebuje neki člen zaporedja a_n, $a_i \neq a$, potem je a stekališče.

DOKAZ.



Pokažemo, da je okolicah neskončno členov. Eden je gotovo – $a_{n_1} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Naj bo $\varepsilon_k = |a_{n_k} - a|$. Lahko najdemo $a_{n_{k+1}}$, da je $a_{n_{k+1}} \in |a_{n_k} - a|$, $a_{n_{k+1}} \neq a$. Potem jih dobimo neskončno. ■

Izrek. Vsako na obe strani omejeno zaporedje a_n ima vsaj eno stekališče.

Gledamo taka števila med mejama, da je manjših le končno mnogo. Poiščemo največje tako število – natančno stekališče je največja zgornja meja.

Naj bo a_n omejeno zaporedje, U množica x-ov, da je $a_n < x$ za končno mnogo n-jev (ali za nobenega). U ni prazna (vsebuje vse spodnje meje). U je navzgor omejena, saj je zaporedje a_n navzgor omejeno (naj bo $a_n \le m$ za vse $m \in M$, če je $x > m$, potem $x \notin U$, ker so levo od njega vsi členi a_n). Torej ima U natančno zgornjo mejo. (A13) $c = \sup U$. Pokažemo, da je c stekališče (eno od ~) zaporedja a_n. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem $c+\varepsilon \notin U$. Potem za neskončno členov zaporedja a_n velja $a_n < c+\varepsilon$. $c-\varepsilon$ ni več zgornja meja U, torej obstaja $\alpha > c-\varepsilon$, tak da $\alpha \in U$. Potem je $a_n < \alpha$ za največ končno mnogo n-jev, torej $a_n \le c-\varepsilon$ za končno n. Potem je neskončno členov med $c-\varepsilon$ in $c+\varepsilon$: $c-\varepsilon \le a_n \le c+\varepsilon$. Potem je c stekališče. ■

Opomba. Pojem stekališča lahko posplošimo na množice.

4. KONVERGENTNA ZAPOREDJA

Definicija. Zaporedje $\{a_n\}$ konvergira proti številu a, če v vsaki okolici števila a ležijo vsi členi zaporedja od nekega naprej, t.j. če za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $|a_n - a| < \varepsilon$ za $\forall n \ge n_0$.

Opomba. Če zaporedje konvergira, konvergira proti enemu samemu številu.

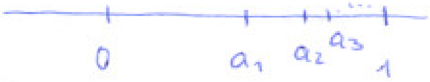
Opomba. Če zaporedje konvergira, je konvergentno.

Število a je limita zaporedja $\{a_n\}$: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Če zaporedje ni konvergentno, mu rečemo divergentno zaporedje (pravimo, da divergira).

Primer. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \quad a_n = \frac{n}{n+1}$

Ali konvergira? Če, kaj je limita?



$\rightsquigarrow$ Kandidat za limito je 1.

Ali res za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ni: |a_n - 1| \leq \varepsilon$ za $\forall n > n_0$.

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \leq \varepsilon$$

$$\left|\frac{-1}{n+1}\right| \leq \varepsilon$$

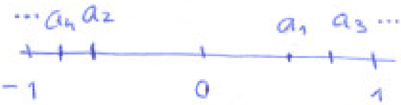
$$\exists ?\, n_0 \ni: \quad \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+1 \quad \forall n \geq n_0 \ \checkmark$$

(Za n_0 vzamemo celo število, ki je večje od $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.) $\Rightarrow$ 1 je res limita $\{a_n\}$.

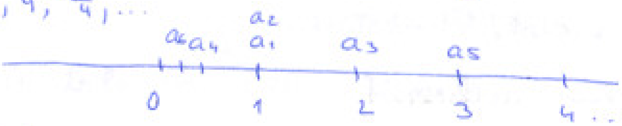
Primer: $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$

$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$



Zaporedje nima limite, ker ima dve stekališči, v okolici katerih je po neskončno mnogo členov. Tako niso nikoli v okolici nobenega števila skoraj vsi členi (nikoli jih ni zunaj poljubno majhne okolice le končno mnogo).

Opomba. Limita zaporedja je vedno hkrati tudi stekališče zaporedja. Stekališče ni nujno limita, tudi če je eno samo. Primer: 1, 1, 2, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{4}$, ...



Stekališče je eno samo: 0, zaporedje pa ni konvergentno.

Definicija. Zaporedje a_n zadošča Cauchyjevemu pogoju, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da velja $|a_n - a_m| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$ in $m \geq n_0$. (Augustin-Louis Cauchy 1789-1857)

Izrek. Zaporedje a_n je konvergentno natanko tedaj, ko izpolnjuje Cauchyjev pogoj.

DOKAZ. a) Naj bo $\{a_n\}$ konvergentno, a njegova limita. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je a limita $\{a_n\}$, obstaja n_0, da je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ za vse $n \geq n_0$. Če je $m, n \geq n_0$, je $|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| = |a_n - a| + |a_m - a| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Torej $\exists n_0 \ni: m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$ (Cauchyjev pogoj je izpolnjen.)

b) Naj $\{a_n\}$ izpolnjuje Cauchyjev pogoj. Potem je a_n na obe strani omejeno. Res: za $\varepsilon = 1$ obstaja n_0, da je $|a_n - a_m| < 1$ za vse $m, n \geq n_0$. V posebnem velja $|a_n - a_{n_0}| < 1$ za vse $n \geq n_0$. Torej vsi členi zaporedja a_n od n_0-tega naprej ležijo na intervalu $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1)$. Izven tega jih je torej le končno mnogo ($n_0 - 1$ členov). Potem je zaporedje res na obe strani omejeno.

Ker je $\{a_n\}$ omejeno, ima vsaj eno stekališče. Pokažemo, da je eno samo in da je limita.

Denimo, da ima $\{a_n\}$ dve stekališči: a, b, $a \neq b$. Naj bo $|b - a| = l$.

Ker je a stekališče, velja $|a_n - a| < \frac{l}{3}$ za neskončno mnogo n-jev. Potem obstajajo poljubno veliki n, da je $|a_n - a| < \frac{l}{3}$. Analogno obstajajo poljubno veliki m, da je $|a_m - b| < \frac{l}{3}$. To pomeni, da lahko najdemo poljubno velika m, n, da hkrati velja $|a_n - a| < \frac{l}{3}$, $|a_m - b| < \frac{l}{3}$, sledi $|a_m - a_n| > \frac{l}{3}$. Potem pa Cauchyjev pogoj ni izpolnjen. Protislovje. Stekališče je eno samo, označimo ga z a.

Pokažemo, da je a limita $\{a_n\}$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Pokažemo, da leži izven okolice $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ končno mnogo členov. Če bi bilo zunaj neskončno mnogo členov, bi lahko našli podzaporedje $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$, da bi bili vsi členi $\{a_{n_i}\}$ zunaj, torej $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$. Tako podzaporedje je omejeno, zato ima vsaj eno stekališče c, ki je hkrati stekališče $\{a_n\}$. Ker za vse a_{n_k} velja $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$, sledi, da je $|c - a| \geq \varepsilon$. Potem $c \neq a$. Protislovje. ($\{a_n\}$ bi imelo dve stekališči) Potem je zunaj $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ le končno mnogo členov – od nekega naprej so vsi v $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, t.j. $\exists n_0 \ni: |a_n - a| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$. Potem je a limita. ■

Opomba. Hkrati smo dokazali še: Vsako zaporedje, ki je na obe strani omejeno in ima eno samo stekališče, je konvergentno (in to stekališče je njegova limita. Velja tudi obratno (sledi neposredno iz definicije).

Opomba. Če zaporedje ni omejeno in ima eno samo stekališče, ni nujno konvergentno.

5. MONOTONA ZAPOREDJA

<u>Definicija</u>. Zaporedje je naraščajoče, če je $a_n \leq a_{n+1}$ za $\forall n$ in padajoče, če je $a_n \geq a_{n+1}$ za $\forall n$.

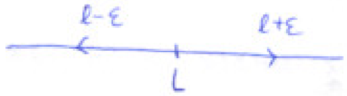
Naraščajoča in padajoča zaporedja se imenujejo monotona.

<u>Opomba</u>. Strogo naraščajoče: $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$, strogo padajoče: $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$.

<u>Izrek</u>. Naraščajoče zaporedje $\{a_n\}$ je konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno. Takrat je njegova limita enaka natančni zgornji meji.

DOKAZ. a) Če je $\{a_n\}$ konvergentno, je (navzdol in) navzgor omejeno.

b) Naj bo $\{a_n\}$ naraščajoče in navzgor omejeno. Naj bo $l = \sup\{a_n\}$. Pokazati je treba, da je l limita. Naj bo $\varepsilon > 0$.



Torej: $\exists n_0 \ni: |a_n - l| < \varepsilon$ za $\forall n \geq n_0$, t.j. $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ za $\forall n \geq n_0$.

Ker je $l = \sup\{a_n\}$, je $a_n \leq l$ za $\forall n$, torej $a_n < l + \varepsilon$ za $\forall n$. $l - \varepsilon$ ni več zgornja meja, t.j. $\exists a_{n_0} \ni: a_{n_0} > l - \varepsilon$, ker pa zaporedje narašča, je $a_n > a_{n_0} > l - \varepsilon$ za $\forall n > n_0$. Torej je $l - \varepsilon < a_n$ za $\forall n \geq n_0$. Potem je l res limita.

<u>Izrek</u>. Padajoče zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je navzdol omejeno. Potem je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$.

<u>Izrek</u>. Naj bo $[a_n, b_n] = j_n$ zaporedje vloženih zaprtih intervalov, t.j. $j_{n+1} \subset j_n$. Naj zaporedje njihovih dolžin konvergira k 0, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$. Potem obstaja c, ki je vsebovan v vseh intervalih, t.j. $c \in j_n$ za $\forall n$.

Oglejmo si zaporedji a_n in b_n. Ker je $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, je $a_{n+1} \geq a_n$ in $b_{n+1} \leq b_n$, oz. $\{a_n\}$ je naraščajoče, $\{b_n\}$ padajoče, $\{a_n\}$ je navzgor omejeno, $\{b_n\}$ je navzdol omejeno. Potem ima a_n limito: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$, $\inf b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Ker gredo dolžine proti 0 in $a_j \leq \sup a_n \leq \inf b_n \leq b_j$, $\forall j$, je $\sup a_n = \inf b_n$. Potem obstaja $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Potem je jasno $c \in [a_j, b_j] = J_j$ za $\forall j$ in ni nobenega drugega takega c (drugače ni $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$). ▫

Definicija. Naj bo $\{a_n\}$ zaporedje. Podzaporedje zaporedja $\{a_n\}$ imenujemo vsako zaporedje $\{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots\}$, kjer je $n_1 < n_2 \dots < n_k \dots$

Izrek. Naj bo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
Tedaj je $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$ za vsako podzaporedje $\{a_{n_k}\}$ zaporedja $\{a_n\}$.

Izrek. Naj bo $\{a_n\}$ zaporedje, c je stekališče $\{a_n\}$ natanko tedaj, ko obstaja podzaporedje $\{a_{n_k}\}$, ki konvergira k c.

DOKAZ. a) Naj obstaja podzaporedje $\{a_{n_k}\}$, ki konvergira k c. $\varepsilon > 0$, $\exists k_0 \ni: |a_{n_k} - c| < \varepsilon$ za $\forall k \geq k_0$. Takih a_n-jev je neskončno $(a_{n_{k_0}}, a_{n_{k_0+1}}, \dots)$. Sledi, da je c stekališče $\{a_n\}$.

b) Naj bo c stekališče zaporedja a_n. Konstruiramo podzaporedje, ki konvergira k c. Naj bo U_n padajoče zaporedje okolic od c, da je $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{c\}$, npr. $U_n = (c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n})$.
Ker je c stekališče, obstaja neskončno n-jev, da je $a_n \in U_1$. Potem obstaja $a_{n_1} \in U_1$. Dalje obstaja neskončno n-jev, da je $a_n \in U_2$, torej obstaja $a_{n_2} \in U_2$, $n_2 > n_1$. Nadaljujemo, $a_k \in U_k$. Pokažemo, da to podzaporedje konvergira k c. $\varepsilon > 0$ Izberimo n_0 tako velik, da bo $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$, tedaj bo za vse $k \geq k_0$ $U_k = \{c - \frac{1}{k}, c + \frac{1}{k}\} \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Ker je $a_{n_k} \in U_k$, sledi, da je $a_{n_k} \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ za vse $k \geq k_0$. ∎

Posledica. Vsako omejeno zaporedje vsebuje konvergentno podzaporedje.

Izrek. Zaporedje ostane konvergentno z isto limito, če mu dodamo (odvzamemo) končno mnogo členov. Vsako podzaporedje konvergentnega zaporedja je konvergentno z isto limito.

Izrek. Naj bosta $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ konvergentni zaporedji. Tedaj konvergirajo tudi
$a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots$;
$a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n$;
$a_1 b_1, \dots, a_n b_n$;
in velja $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$.

DOKAZ. a) $\{a_n\}, \{b_n\}$ konvergirata, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Želimo pokazati $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, t.j. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \ni: |a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$ za $\forall n \geq n_0$. $|a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$.
$\exists n_0' \ni: |a_n - a| < \varepsilon/2\ \forall n \geq n_0'$ in $\exists n_0'' \ni: |b_n - b| < \varepsilon/2\ \forall n \geq n_0''$.
Potem naj bo $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$. Če je $n \geq n_0$ je $n \geq n_0'$ in $n \geq n_0''$.

Za $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, torej $|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$. ∎

29. 10. 2002

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\lim a_n = a$, $\lim b_n = b \Rightarrow a_n b_n$ konvergira k ab, t.j.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ni: |a_n b_n - ab| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

$a_n b_n - ab = a_n b_n - a b_n + a b_n - ab = (a_n - a) b_n + (b_n - b) a$

$b_n \leq M$, saj je b_n konvergentno in zato omejeno.
Ker zaporedje $a_n \to a$, obstaja n_0', da je $(a_n - a) < \frac{\varepsilon}{2M}$ za vse $n \geq n_0'$. Recimo, da je $a \neq 0$. Ker je $b_n \to b$, obstaja n_0'', da je $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$ za $\forall n \geq n_0''$.

Naj bo n_0 večje od števil n_0', n_0''. Naj bo $n \geq n_0$. Tedaj je $n \geq n_0'$ in $n \geq n_0''$. Torej je $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| =$
$= |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \leq |b_n(a_n - a)| + |(b_n - b)a| =$
$= |b_n|\,|(a_n - a)| + |(b_n - b)|\,|a| = |b_n|\,|\frac{\varepsilon}{2M}| + |\frac{\varepsilon}{2|a|}|\,|a| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Če je $a = 0$, je $(b_n - b)a = 0$ za vse n, potem je $n_0 = n_0'$. ∎

Posledica. Če je $\{a_n\}$ konvergentno in $\lambda \in \mathbb{R}$, je tudi $\{\lambda a_n\}$ konvergentno in je $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

DOKAZ. Sledi iz prejšnjega izreka: a_n, $b_n = \lambda$.

Opomba. Z indukcijo vidimo, da pravila za limite vsote in produkta velja za poljubno število sumandov ali faktorjev.

Izrek. Naj bo $\{a_n\}$ konvergentno in naj bo $a = \lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\}$. Predpostavimo, da je $a_n \neq 0$ za vse n in $a \neq 0$. Tedaj je $\{\frac{1}{a_n}\}$ konvergentno in $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

DOKAZ. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ni: \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$ za $\forall n > n_0$, t.j. $\left|\frac{a_n - a}{a a_n}\right| < \varepsilon$...

Obstaja pozitivno število $\eta > 0$, da je $|a_n| \geq \eta$ za vse n (ker je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ in vsi členi $a_n \neq 0$). (Ker je $a \neq 0$, je $(a - \frac{|a|}{2}, a + \frac{|a|}{2})$ vsaj za $\frac{|a|}{2}$ stran od 0, v njem pa so vsi a_n od nekega naprej, zunaj jih je končno mnogo, ki so zvrsti vsi različni od 0, torej obstaja $\eta > 0$, da v $(-\eta, \eta)$ ni nobenega člena).

Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker $a_n \to a$, obstaja $n_0 \ni: |a_n - a| < |a| \eta \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$. Torej $|(a_n - a)/(a a_n)| \leq \frac{|a|\eta\varepsilon}{|a|\eta} = \varepsilon$. ∎

Posledica. Naj bosta $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ konvergentni. Naj bodo vsi $b_n \neq 0$ in naj bo $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Tedaj $\frac{a_n}{b_n}$ konvergira in $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

... konvergentno? Koj je limita?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n^2+1}{2n^3+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}} = \left(\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right) : \left(\lim_{n\to\infty}\right.$$

$$= \frac{\lim 1 - \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n^3}}{\lim 2 + \lim \frac{1}{n^2}} = \frac{1-0+0}{2+0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$ (li

6. ZGORNJA IN SPODNJA LIMITA, LIMITI $+\infty, -\infty$

$1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$

$1, 2, 3, 4, 5, \dots \longrightarrow +\infty$ ⇝ To sicer ni konvergentno zaporedje, i… še zmeraj dobro obnašanje – konve… $+\infty$.

<u>Definicija</u>. Pravimo, da zaporedje $\{a_n\}$ <u>konvergira k $+\infty$</u>, če za … $A<\infty$ obstaja n_0, da je $a_n > A$ za vse $n \geq n_0$. $\lim_{n\to\infty} a$…

<u>Opomba</u>. Tako zaporedje je seveda divergentno, včasih pravimo, … določeno divergentno k $+\infty$.

<u>Definicija</u>. Pravimo, da zaporedje a_n konvergira k $-\infty$, če za vsak … obstaja n_0, da je $a_n < A$ za vsak $n > n_0$. V tem primeru pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

<u>…rimer</u>. $-1, -2, -3, -4, \dots \to -\infty$

…j bo zaporedje $\{a_n\}$ na obe strani omejeno. Vemo, da ima vsaj en …kališče. Če je tako eno samo, je limita. Lahko pa ima več …kališč. Množica stekališč E je seveda navzgor in navzdol omejena.

<u>…icija</u>. Naj bo $\{a_n\}$ omejeno zaporedje in naj bo E množica njegovih stekališč. Tedaj je E neprazna, na obe strani omejena množica in $\sup E$ imenujemo ZGORNJA LIMITA ZAPOREDJA $\{a_n\}$ in označimo $\sup E = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Podobno $\inf E = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ imenujemo SPODNJA LIMITA $\{a_n\}$.

…a. Iz definicij stekališča, supremuma in infimuma sledi, da sta $\limsup_{n\to\infty} a_n$ in $\liminf_{n\to\infty} a_n$ spet stekališči zaporedja. Torej sta to kar največje in najmanjše stekališče.

…a. Naj bo $\{a_n\}$ navzgor neomejeno. Tedaj pišemo $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Če je navzdol neomejeno: $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Naj bo $\{a_n\}$ …

definiramo $\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf E$. Če je $E=\emptyset$, je $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Naj bo $\{a_n\}$ navzdol neomejeno in navzgor omejeno. Če $E \neq \emptyset$, je $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup E$, če je $E = \emptyset$, je $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Opomba. $+\infty$ in $-\infty$ moremo obravnavati kot števili.

Izrek. Naj bo $\{a_n\}$ na obe strani omejeno zaporedje. Tedaj je $c = \limsup_{n\to\infty} a_n$ natanko tedaj, ko za $\forall \varepsilon > 0$ velja:

a) $a_n > c+\varepsilon$ za največ končno mnogo n-jev.

b) $a_n > c-\varepsilon$ za neskončno mnogo n-jev.

Torej je c tudi stekališče $\{a_n\}$.

DOKAZ. a) Naj bo $c = \limsup_{n\to\infty} a_n$, t.j. $c = \sup E$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Če bi za neskončno členov a_n veljalo $a_n \geq c+\varepsilon$, potem bi torej imeli podzaporedje $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$, da je $a_{n_k} \geq c+\varepsilon$ za vsak k in to podzaporedje ima stekališče c', da je $c' \geq c+\varepsilon$. Ampak c' je tudi stekališče a_n, potem pa $c \neq \limsup_{n\to\infty} a_n$. Protislovje. $a_n \geq c+\varepsilon$ za končno mnogo n-jev.

b) Naj c izpolnjuje (a) in (b), $\varepsilon > 0$. (a) in (b) skupaj povesta, da je med $c-\varepsilon$ in $c+\varepsilon$ neskončno členov zaporedja a_n. Torej je c stekališče zaporedja a_n, torej $c \in E$. Dalje: za $\forall x \in E$ velja $x \leq c$. Res, če bi za nek $x \in E$ veljalo $x > c$, bi v poljubno majhni okolici od x ležalo neskončno a_n-jev. Torej obstaja $\varepsilon > 0$, da je $a_n > c+\varepsilon$ za neskončno n-jev. Protislovje z (a).

Potem je $x \leq c$ $\forall x \in E$ in $c \in E$. Torej je c res natančna zgornja meja E, t.j. $c = \limsup_{n\to\infty} a_n$. ∎

Izrek. Naj bo $\{a_n\}$ omejeno. Tedaj je $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_n \left[\sup_{k\geq n} a_k\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{k\geq n} a_k\right]$. $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_n \left[\inf_{k\geq n} a_k\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\inf_{k\geq n} a_k\right]$. * Dokaz doma.

Primer. $a_n \equiv (-1)^n \frac{n+1}{n}$: $-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots$

Dve stekališči: -1 in 1. Torej je $\limsup_{n\to\infty} a_n = +1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

7. DEFINICIJA POTENCE a^r PRI REALNEM EKSPONENTU r

<u>Izrek.</u> Naj bo $0 < q < 1$. Tedaj je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

<u>DOKAZ.</u> Ker je $0<q<1$, je $q^{n+1} = q \cdot q^n < q^n$, torej je zaporedje $\{q^n\}$ padajoče. Vsa števila q^n so seveda večja od nič. Torej je q^n padajoče navzdol omejeno zaporedje (≥ 0). Torej ima limito c. $q, q^2, q^3, \dots \to c = \lim_{n\to\infty} q^n$

$$q^2, q^3, \dots \to c = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} q q^n =$$
$$= q \lim_{n\to\infty} q^n = qc,$$ torej je $c = qc$ oz. $c(1-q)=0$, $1-q \neq 0$, saj je $0<q<1$, potem je $c=0$. ∎

<u>Izrek.</u> Naj bo $q > 1$. Tedaj $\{q^n\}$ divergira. Velja $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

<u>DOKAZ.</u> Za vsak n je $q^{n+1} = q \cdot q^n > q^n$, saj je $q>1$. Potem je zaporedje naraščajoče. Pokažemo, da to zaporedje ni navzgor omejeno. Če bi bilo, bi konvergiralo k nekemu c. Vendar bi bilo $c=0$, kar ni dobro, ker so vsi členi zaporedja $q^n > 1$. Torej $\{q^n\}$ ni navzgor omejeno.

Naj bo A poljubno veliko pozitivno število. Ker $\{q^n\}$ ni navzgor omejeno, obstaja $n_0 \ni: q^{n_0} > A$. Ker $\{q^n\}$ narašča, je $q^n \geq q^{n_0} > A$ za vse $n \geq n_0$. Sledi, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. ∎

<u>Opomba.</u> Pravimo, da če je $q>1$, postane q^n poljubno velik, če je n dovolj velik.

<u>Izrek.</u> Za vsak $a>0$ in $m \in \mathbb{N}$ obstaja natanko en $x>0$, da je $x^m = a$.

<u>DOKAZ.</u> Naj bo $a>0$. Če tak x obstaja, je unijno en sam. Iz $x_1 > x_2$ namreč sledi $x_1^m > x_2^m$, torej iz $x_1^m = x_2^m \Rightarrow x_1 = x_2$.

Obstoj: Določili bomo zaporedje $x_0, x_1, \dots \to x$. Naj bo x_0 največje nenegativno celo število, da je $x_0^m \leq a$. Tedaj je seveda $x_0^m \leq a < (x_0+1)^m$, če je slučajno $x_0^m = a$, smo na koncu, saj je kar $x = x_0$. Drugače izberemo za x_1 največje od števil $x_0, x_0+0{,}1, x_0+0{,}2, \dots, x_0+0{,}9$, za katero je še $x_1^m \leq a$. Tedaj je $x_1^m \leq a < (x_1+0{,}1)^m$; če je $x_1^m = a$, je $x = x_1$. Če je $x_1^m < a$, nadaljujemo. Imamo dve možnosti. Lahko po končno korakih pridemo do x_n, da je $x_n^m = a$. V tem primeru je $x = x_m$. Če do takega x_n ne pridemo nikoli, potem imamo zaporedje $\{x_n\}$, da je za vsak n $x_n^m \le a < (x_n + (0,1)^n)^m$.

Zaporedje $\{x_n\}$ narašča in je navzgor omejeno. Zaporedje $\{x_n + (0,1)^n\}$ pada in je navzdol omejeno. Ker je razlika poljubno majhna ($= 0,1^n \to 0$), (obe zaporedji konvergirata), ko je n dovolj velik, obe zaporedji konvergirata k isti limiti, imenujmo jo x. Ker za vse n velja $x_n^m \le a < (x_n + (0,1)^n)^m$, sledi: $x^m = (\lim_{n\to\infty} x_n)^m =$

$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{x_n^m}_{\le a} \le a$, saj je $x_n^m \le a$ za vse n. Podobno je $x^m =$

$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{(x_n + (0,1)^n)^m}_{\ge a} \ge a$. Potem je $x^m \le a \le x^m$, torej $a = x^m$. ∎

Opomba. x iz izreka označimo z $\sqrt[m]{a}$ (m-ti koren iz a). To je edino število, za katerega je $(\sqrt[m]{a})^m = a$.

Opomba. Če je $0 < a < b$, je tudi $\sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{b}$ za $\forall m$. Če bi bilo $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$, bi bilo $(\sqrt[m]{a})^m > (\sqrt[m]{b})^m$, t.j. $a > b$.

Opomba. Ker je $\sqrt[m]{a}$ za vsak a en sam (med pozitivnimi števili), sledi:

- $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$
- $\sqrt[m]{a^m} = (\sqrt[m]{a})^m$
- $\sqrt[mq]{a^{mp}} = \sqrt[q]{\sqrt[m]{(a^p)^m}} = \sqrt[q]{a^p}$ (∗)
- $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[q]{a^p}\,\sqrt[q_1]{a^{p_1}} = \sqrt[qq_1]{a^{pq_1} a^{p_1 q}} = \sqrt[qq_1]{a^{pq_1 + q_1 p}}$ (∗∗)

Definicija. Naj bosta p in q naravni števili. Potem je $a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$.

Opomba. Definicija sovpada z že znano potenco s celim eksponentom, če je p deljiv s q.

Opomba. Definicija je dobra, saj je zaradi (∗) $a^{\frac{np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Izrek. Vse lastnosti računanja s potencami, ko so eksponenti cela števila, veljajo tudi za racionalne eksponente.

Opomba. Negativni eksponenti: $a^{-\frac{p}{q}} = (\frac{1}{a})^{\frac{p}{q}}$.

Dogovor: $a^0 = 1$.

Izrek. Za $\forall a > 0$ je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

DOKAZ. Če je $a > 1$, tedaj je $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$, saj je $a^n < a^{n+1}$ in zato $\sqrt[n(n+1)]{a^n} < \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}}$. Torej zaporedje $\sqrt[n]{a}$ pada. Navzdol je omejeno (vsi členi so večji od 1). Potem $\{\sqrt[n]{a}\}$ konvergira, limito označimo z α. Jasno je $\alpha \ge 1$. Pokažemo: $\alpha = 1$. $\sqrt[n]{a} \ge \alpha$ $\forall n$, sledi $a \ge \alpha^n$ $\forall n$. Če bi bil $\alpha > 1$, bi α^n naraščala čez vse meje, kar bi bilo protislovno. Potem je $\alpha = 1$. ∎

Če je $a = 1$, je $\sqrt[n]{a} = 1$, $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$. ∎

Naj bo $a<1$. Potem je $\sqrt[n+1]{a} > \sqrt[n]{a}$. Zaporedje $\sqrt[n]{a}$ torej narašča, navzgor je omejeno z 1. Potem je konvergentno in $c = \lim_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{a}\} = \sup_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{a}\}$. Če je $c<1$, je $\sqrt[n]{a} \leq c$ za vse n, torej $a \leq c^n$ za vse n. Ampak $c^n \to 0$. Protislovje. Torej je $c=1$. ▫

<u>Posledica</u>. Naj bo $a>0$. Za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$, da je $|a^h - 1| < \varepsilon$ za vsako racionalno število h, za katero je $|h|<\delta$.

<u>DOKAZ</u>. $\varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$, $\exists n_0 \ni: |\sqrt[n]{a}-1| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, $\exists m_0 \ni: |\sqrt[n]{\frac{1}{a}}-1| < \varepsilon$ za vse $\geq m_0$.

Torej obstaja n, da je hkrati $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$ in $|\sqrt[n]{\frac{1}{a}}-1|<\varepsilon$.

Naj bo $\delta = \frac{1}{n}$. Če je $h \in \mathbb{Q}$ in $0<h<\delta=\frac{1}{n}$ je v primeru, ko je $a>1$ $a^h < \sqrt[n]{a}$ (saj iz $h=\frac{p}{q}<\frac{1}{n}$ sledi $pn<q$, $a^{pn}<a^q$, $a^h<\sqrt[n]{a}$).

Potem je $a^h - 1 < \sqrt[n]{a}-1$, torej $|a^h-1| < |\sqrt[n]{a}-1| <$.

Ko je $a<1$, je $a^h > \sqrt[n]{a}$, kar da $|1-a^h| < |1-\sqrt[n]{a}| \Rightarrow |a^h-1|<|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$.
DOMA

∘ Če je $h<0$, $|a^h-1|<\varepsilon$, če je h racionalen in $-\delta<h<0$. ▫

<u>Izrek</u>. Naj bo $a>0$ in naj zaporedje ulomkov $r_1, r_2, \dots$ konvergira. Tedaj konvergira tudi zaporedje $a^{r_1}, a^{r_2}, \dots$. Če je $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ in je r slučajno racionalno, je $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r$.

<u>DOKAZ</u>. ∘ Naj bo $a>1$. Zaporedje r_n je omejeno, saj je konvergentno, naj bo $r_n \leq M$ za vse n; $M \in \mathbb{Q}$. Pišimo $A_n = a^{r_n}$.

Pokazali bomo, da je zaporedje A_n Cauchyjevo (A_n konvergira).

$A_m - A_n = a^{r_m} - a^{r_n} = a^{r_n}(a^{r_m - r_n} - 1)$.

Najprej velja $a^{r_m} \leq a^M$ za vse m. Naj bo $\varepsilon>0$. Potem obstaja $\delta>0$, da je $|a^h - 1| < \varepsilon/a^M$ za vsak $h\in\mathbb{Q}, |h|<\delta$.

Ker $\{r_n\}$ konvergira, izpolnjuje Cauchyjev pogoj: $\exists n_0 \ni: |r_n - r_m| < \delta$ za vse $n \geq n_0$, $m \geq n_0$.

Torej: $|A_m - A_n| = |a^{r_n}||a^{r_m - r_n} - 1| < a^M \frac{\varepsilon}{a^M} = \varepsilon$ za $m,n > n_0$.

Za $\{A_n\}$ je torej izpolnjen Cauchyjev pogoj in je $\{a^{r_n}\}$ konvergentno.

∘ Naj bo $r\in\mathbb{Q}$, $r = \lim_{n\to\infty} r_n$. Tedaj je a^r dobro definiran.

$A_n - a^r = a^{r_n} - a^r = a^r(a^{r_n - r} - 1)$. Ker $r_n \to r$, $r_n - r \to 0$, torej $(a^{r_n - r} - 1) \to 0$. Potem je $\lim_{n\to\infty}(A_n - a^r) = 0$, torej $\lim_{n\to\infty} A_n = a^r$. ▫

<u>Opomba</u>. Če r_n konvergira za $\forall a>0$ velja $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} > 0$.

To sledi iz dejstva, da je r_n na obe strani omejeno, $|r_n| \leq M$ za vse n.

Če je $a>1$ iz $-M \leq r_n \leq M$ sledi $a^{-M} \leq a^{r_n} \leq a^M$, če je $a<1$, je $a^M \leq a^{r_n} \leq a^{-M}$

Zaporedje A_n je navzdol omejeno z a^M oz. $a^{-M} > 0$ za vse n.

Torej je $\lim A_n > 0$. ▫

Izrek. Naj imata zaporedji racionalnih števil $\{r_n\}$, $\{s_n\}$ isto limito. Tedaj imata za $\forall a>0$ tudi $\{a^{r_n}\}$ in $\{a^{s_n}\}$ isto limito.

DOKAZ. $A_n = a^{r_n}$, $B_n = a^{s_n}$. Po izreku $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ in $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$.
Dalje $A \neq 0$ in $B \neq 0$ (opomba), zato pravilo za limito kvocienta da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{A}{B}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n - s_n}) = 1, \text{ ker je } (r_n - s_n) \to 0.$$

$(\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ |a^h - 1| < \varepsilon$ za vse $h \leq \delta$, $h = r_n - s_n \Rightarrow |a^{r_n - s_n} - 1| < \varepsilon$ za $\forall \varepsilon)$

Torej je $\frac{A}{B} = 1$ in $A = B$. ⊠

Torej: $a>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, $r_n \in \mathbb{Q}$, tedaj a^{r_n} konvergira. Če je $r = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, tudi a^{s_n} konvergira k isti limiti. Če je slučajno $r \in \mathbb{Q}$, je $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r$.

Definicija. Naj bo $a>0$ in $r \in \mathbb{R}$. Naj bo r zaporedje ulomkov, ki konvergira k r. Potem definiramo

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Opomba. Definicija je dobra, ker je $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ neodvisna od zaporedja $\{r_n\}$, t.j. je odvisna le od r. V primeru ko je $r \in \mathbb{Q}$, sovpade z že znano definicijo.

Opomba. S pomočjo računskih pravil za limite je mogoče videti, da vsa računska pravila za potence z racionalnimi eksponenti veljajo tudi za potence z realnimi eksponenti.

Primer. $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$

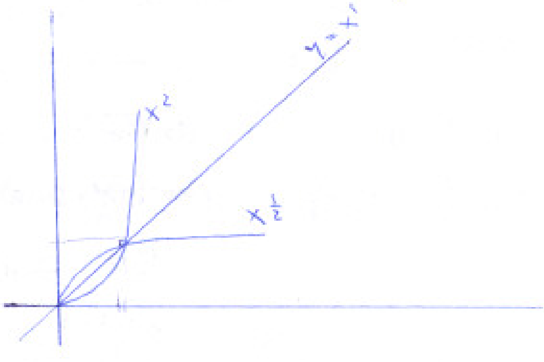
$\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}$ $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$

$$\begin{matrix} a^{\alpha_n} & \cdot & a^{\beta_n} & = & a^{\alpha_n+\beta_n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a^{\alpha} & & a^{\beta} & & a^{\alpha+\beta} \end{matrix}$$

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{\alpha_n} \cdot a^{\beta_n}) = \lim_{n\to\infty} (a^{\alpha_n+\beta_n}) =$$

$$:= a^{\alpha+\beta}$$

Opomba. Če je $r>0$ in $0<a<b$, je $a^r < b^r$. Če je $a>1$ in $r_1 < r_2$, je $a^{r_1} < a^{r_2}$.



8. POSEBNA ZAPOREDJA

a) Če je $|x|<1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

DOKAZ. $\lim\limits_{n\to\infty}|x|^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} -|x|^n = 0$

Za $\forall\, |x|<1$, je $-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$.

Sledi, da je $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

b) Če je $x>0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

c) Če je $\alpha>0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

DOKAZ. $\left|\frac{1}{n^\alpha}\right| < \varepsilon \rightsquigarrow \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon \rightsquigarrow \frac{1}{\varepsilon} < n^\alpha \longrightarrow \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha} < n$.

Če je torej $n_0 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$, tedaj za $\forall n > n_0$ velja $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha} < n$, torej $\left|\frac{1}{n^\alpha}\right| < \varepsilon$. ■

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

DOKAZ. $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Tedaj je $x_n \geq 0$ za vse n in $n = (1+x_n)^n \geq$
$\geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$

$x_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$ in $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0 \Rightarrow x_n \to 0$. ■

e) $\alpha \in \mathbb{R}$, $q>1$ 12.11.2002

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$$

f) $(e^x)' = e^x$ (posebej pomembna!)

Izrek. Zaporedje $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je konvergentno. Njegovo limito označimo z e.

DOKAZ. $a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

$a_2 = \frac{9}{4}$

$a_3 = \frac{64}{27}$

$\vdots$

a) Pokažemo, da je $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ naraščajoče, t.j. $a_n \leq a_{n+1}$ za vsak n.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}1 + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Pogledamo istoležne člene, pri a_{n+1} so večji kot pri a_n, poleg tega imamo še en dodatni člen >0. Potem je $a_{n+1} > a_n$ za vsak n.

b) Pokažemo, da obstaja zgornja meja.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\dots+\binom{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{n(n-1)\cdots1}{1\cdot2\cdots n}\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!}+\dots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}+\dots+\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{n!} =$$

$$\leq 1+1+1/2!+1/3!+\dots+1/n! = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} =$$

$$= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dots+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdots n} \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1+1+\frac{2^{n-2}+2^{n-3}+\dots+2+1}{2^{n-1}} = 1+1+\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = \underline{3}$$

Torej velja $a_n \leq 3$ za vsak n. Potem je 3 zgornja meja.

Po znanem izreku je $\{a_n\}$ konvergentno (je naraščajoče in navzgor omejeno).

$$\left(e = 1+1+\frac{1}{2!}+\dots\frac{1}{n!}+\dots = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\right)$$

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Opomba. $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-n)}\right)^{-n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \lim\frac{n}{n-1}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = 1\cdot e = \underline{e}$$

9. ZAPOREDJA KOMPLEKSNIH ŠTEVIL

$a_1+ib_1,\ a_2+ib_2,\ \dots,\ a_n+ib_n$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ($a_i = Re(z_i)$, $b_i = Im(z_i)$)

Definicija. Naj bo $z\in\mathbb{C}$ in $\varepsilon>0$. ε-okolica števila z v $\mathbb{C}$ je množica $\{(x,y)=w\in\mathbb{C};\ |w-z|<\varepsilon\}$.

Opomba. $|w-z|$ je razdalja med z in w v $\mathbb{C}$.

$(x-Re(z))^2+(y-Im(z))^2<\varepsilon^2 \to$ krog brez roba s središčem v z in polmerom ε

Definicija. Zaporedje $\{z_n\}$ konvergira k z, če za $\forall\varepsilon>0$ obstaja n_0, da je $|z-z_n|<\varepsilon$ za vse $n\geq n_0$, t.j. da v vsaki okolici števila z ležijo vsi členi $\{z_n\}$ od nekega naprej.

Izrek. Zaporedje $z_n=a_n+ib_n$ konvergira k $z=a+ib$ natanko tedaj, ko $a_n\to a$ in $b_n\to b$.

DOKAZ. a) Naj bo $z_n\to a+bi=z$, $\varepsilon>0$. Potem je $(a_n-a)^2+(b_n-b)^2<\varepsilon^2$ za vse $n\geq n_0$. Sledi: $\sqrt{(a_n-a)^2}<\varepsilon$ in $\sqrt{(b_n-b)^2}<\varepsilon$ oz. $|a_n-a|<\varepsilon$ in $|b_n-b|<\varepsilon$. Potem $b_n\to b$ in $a_n\to a$.

b) Naj bo $b_n\to b$ in $a_n\to a$. Potem obstaja n_0, (da je za $\frac{\varepsilon}{\sqrt2}>0$) da je $|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{\sqrt2}$ in $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{\sqrt2}$ za vsak $n\geq n_0$. $(b_n-b)^2<\frac{\varepsilon^2}{2}$, $(a_n-a)^2<\frac{\varepsilon^2}{2} \Rightarrow |z_n|^2<\varepsilon^2$.

Opomba. Od tu sledijo pravila:

$\sim \lim\limits_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} w_n$

$\sim \lim\limits_{n\to\infty}(z_n w_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} w_n\right)$

$\sim$ če je $w_n \neq 0$ za $\forall n$ in $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \neq 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}$$

10. POJEM NESKONČNE VRSTE (1)

Definicija. Formalno vsoto oblike $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, $a_i \in \mathbb{R}$ (2) imenujemo (neskončna) vrsta.

Primeri. $1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$ (3) $\quad 2+4+6+8+\cdots$

$0 + 0 + 0 + 0 + \cdots \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

Definicija. Naj bo dana vrsta $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. Zaporedje s_n, kjer je $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$, $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ imenujemo zaporedje delnih vsot vrste $s = a_1 + \cdots$.

Definicija. Če zaporedje delnih vsot $\{s_n\}$ konvergira, pravimo, da vrsta $s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ → se da seštet

Limito s zaporedja s_n imenujemo VSOTA VRSTE s.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Če zaporedje s_n divergira, pravimo, da vrsta $a_1 + \cdots$ divergira.

Opomba. Vrsta konvergira $\Leftrightarrow$ vrsta se da sešteti (intuitivno).
Vrsta divergira $\Leftrightarrow$ se ne da sešteti.

Primer. $1 + q + q^2 + \cdots$, $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$. $\qquad$ 14. 11. 2002

$1 - q^n = (1-q)(1 + q + \cdots + q^{n-1}) \Rightarrow s_{n+1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

GEOMETRIJSKA VRSTA

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

Za $0 < q < 1$ torej vrsta $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q^{i-1}$ konvergira k $\frac{1}{1-q}$.

Za $q = 0$ je vsota 1, za q 1 divergira.

Za $-1 < q < 0$ je $1 + q + \cdots = \frac{1}{1-q}$.

Naj bo dana vsota $a_1+a_2+\cdots$ Pogledamo $s_m - s_n$ za $m>n$.

$s_n = a_1+\cdots+a_n$, $s_m = a_1+\cdots+a_m$

$s_m - s_n = a_{n+1}+\cdots+a_m$, potem je

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1}+\cdots+a_m|.$$

Naj bo $m>n$, $m=n+p$: $|s_m-s_n| = |a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|$.

Zaporedje bo konvergentno, ko za $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0$: $m,n \geq n_0$, $p\geq 1$

$$|s_m-s_n|<\varepsilon.$$

Izrek. Vrsta $a_1+\cdots$ konvergira natanko tedaj, ko za $\forall\varepsilon>0$ obstaja n_0, da za $\forall n\geq n_0$, $p\geq 1$ velja

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

Posledica. $p=1$. Če vrsta konvergira je za $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0 \ni: \forall n\geq n_0$

$$|a_{n+1}|<\varepsilon,$$

torej je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Če $\sum a_i$ konvergira, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Opomba. Vrsta $1+\frac{1}{2}+\cdots$ ne konvergira. Pravimo ji HARMONIČNA VRSTA.

Definicija. Naj bo $a_1+a_2+\cdots$ konvergentna vrsta. Za $\forall n$ je tedaj konvergentna tudi vrsta $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$

Njeno vsoto označimo z R_n in imenujemo n-ti ostanek vrste $a_1+\cdots$.

Opomba. Če je $a_1+a_2+\cdots=s$, je $s_n+R_n=s$, torej $R_n = s-s_n$. Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Opomba. Dano je zaporedje $u_1, u_2, \ldots$ Poišči tako vrsto, da bo $\{u_n\}$ zaporedje delnih vsot.

$a_1 = u_1$, $a_1+a_2 = u_2, \ldots$

$a_1 = u_1$, $a_2 = u_2-u_1$, $a_3 = u_3-u_2, \ldots, a_n = u_n - u_{n-1}, \ldots$

Taki vrsti pravimo TELESKOPSKA VRSTA zaporedja u_n.

Dejstvo. Taka vrsta konvergira natanko tedaj, ko konvergira zaporedje u_n.

III. FUNKCIJE REALNE SPREMENLJIVKE

1. DEFINICIJA, GRAF FUNKCIJE

Klasična definicija. Proučujemo odvisnost ene količine od druge, npr. dolžine l železne palice od temperature T. Če T izberemo, je $l(T)$ natanko določena. T je neodvisna spremenljivka, l odvisna.

Definicijsko območje: a - absolutna ničla, b - tališče: $\mathcal{D} = (a,b)$ - območje, od koder lahko izbiramo T.