Naj bo dana vsota $a_1+a_2+\cdots$ Pogledamo $s_m - s_n$ za $m>n$.

$s_n = a_1+\cdots+a_n$, $s_m = a_1+\cdots+a_m$

$s_m - s_n = a_{n+1}+\cdots+a_m$, potem je

$$|s_m-s_n| = |a_{n+1}+\cdots+a_m|.$$

Naj bo $m>n$, $m=n+p$: $|s_m-s_n| = |a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|$.

Zaporedje bo konvergentno, ko za $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0$: $m,n\geq n_0$, $p\geq 1$

$$|s_m-s_n|<\varepsilon.$$

<u>Izrek</u>. Vrsta $a_1+\cdots$ konvergira natanko tedaj, ko za $\forall\varepsilon>0$ obstaja n_0, da za $\forall n\geq n_0$, $p\geq 1$ velja

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

<u>Posledica</u>. $p=1$. Če vrsta konvergira je za $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0 \ni: \forall n\geq n_0$

$$|a_{n+1}|<\varepsilon,$$

torej je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Če $\sum a_i$ konvergira, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Opomba</u>. Vrsta $1+\frac{1}{2}+\cdots$ ne konvergira. Pravimo ji HARMONIČNA VRSTA.

<u>Definicija</u>. Naj bo $a_1+a_2+\cdots$ konvergentna vrsta. Za $\forall n$ je tedaj konvergentna tudi vrsta $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$

Njeno vsoto označimo z R_n in imenujemo n-ti ostanek vrste $a_1+\cdots$.

<u>Opomba</u>. Če je $a_1+a_2+\cdots = s$, je $s_n+R_n = s$, torej $R_n = s-s_n$. Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

<u>Opomba</u>. Dano je zaporedje $u_1, u_2, \ldots$ Poišči tako vrsto, da bo $\{u_n\}$ zaporedje delnih vsot.

$a_1 = u_1$, $a_1+a_2 = u_2, \ldots$

$a_1 = u_1$, $a_2 = u_2-u_1$, $a_3 = u_3-u_2, \ldots, a_n = u_n - u_{n-1}, \ldots$

Taki vrsti pravimo TELESKOPSKA VRSTA zaporedja u_n.

<u>Dejstvo</u>. Taka vrsta konvergira natanko tedaj, ko konvergira zaporedje u_n.

III. FUNKCIJE REALNE SPREMENLJIVKE

1. DEFINICIJA, GRAF FUNKCIJE

<u>Klasična definicija</u>. Proučujemo odvisnost ene količine od druge, npr. dolžine l železne palice od temperature T. Če T izberemo, je $l(T)$ natančno določena. T je neodvisna spremenljivka, l odvisna.

Definicijsko območje: a - absolutna ničla, b - tališče: $\mathcal{D} = (a,b)$ - območje, od koder lahko izbiramo T.

Strogo gledano je funkcija preslikava iz D v $\mathbb{R}$.

Definicija. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$. (Realna) funkcija na D je preslikava iz D na $\mathbb{R}$. D imenujemo DOMENA ali DEFINICIJSKO OBMOČJE funkcije.

Oznaka. Običajno s črkami $f, g, \ldots$ Pozor: v funkciji sta vedno dva podatka: D in predpis, ki številu x iz D priredi $f(x)$ (vrednost).

Opomba. Dve funkciji f in g imenujemo enaki, če je $D(f) = D(g)$ in $f(x) = g(x)$ za $\forall x \in D(f) = D(g)$.

Primer. Naj bo f definirana na $[0, \infty)$ in g na $\mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = |x|$. Tedaj $f \neq g$, saj $D(f) \neq D(g)$. Vendar je $D(f) \subset D(g)$ in na $D(f)$ je $g(x) = f(x)$. Tedaj je f ZOŽITEV funkcije g na $D(f)$ ali pa je g RAZŠIRITEV f na $D(g)$.

Dogovor. Pri funkcijah, kjer je $f(x)$ eksplicitno podana in ne povemo definicijskega območja, privzamemo, da je $D(f)$ največja množica, da ima $f(x)$ smisel.

Primer. a) $f(x) = \sqrt{x}$, $D(f) = [0, \infty)$ b) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$, $D(f) = [0, 1]$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ d) $f(x) = \log(x^2 - 1)$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

e) $f(x) = \log(x-1) + \log(x+1)$, $D(f) = (1, \infty)$.

Opomba. Zaporedje je poseben primer funkcije, ko je $D(f) = \mathbb{N}$.

Opomba. Ker $\mathbb{R}$ ponavadi predstavimo s točkami na številski osi, ponavadi $f(x)$ imenujemo vrednost f v točki x. Funkcijski predpis včasih označimo s $\mapsto$: $x \mapsto x^2$, $f(x) = x$.

Definicija. Graf funkcije f je množica točk v ravnini
$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} ;\ x \in D(f)\}$$

Opomba. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je množica urejenih parov (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$. V splošnem z $A \times B$ označimo množico urejenih parov (a, b), $a \in A$, $b \in B$. $A \times B$ imenujemo KARTEZIČNI PRODUKT množice A z množico B. (Cartesius – Rene Descartes 1594–1658)

19. 11. 2002

Opomba. Funkcija je s svojim grafom natanko podana.

Opomba. Ni vsaka podmnožica v $\mathbb{R}^2$ graf neke funkcije. Γ je graf, če za vsak $(x_0, y_0) \in \Gamma$ ni več nobenega $(x_0, y_1) \in \Gamma$ za $y_1 \neq y_0$ (oz. vsaka premica, vzporedna y-osi seka graf kvečjemu enkrat). Funkcijo bi torej lahko definirali z njenim grafom.

2. OSNOVNE OPERACIJE S FUNKCIJAMI

Ker so funkcije posebni primeri preslikav, so zanje definirani vsi pojmi, ki so definirani za preslikave.

a) Naj bosta f, g dve funkciji, za kateri je $\mathcal{Z}(f) \subset \mathcal{D}(g)$. Potem je na $\mathcal{D}(f)$ definirana kompozicija $g \circ f$, t.j. $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Primer. $f(x) = x+1$, $\mathcal{D}(f) = \{x; x > 0\}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $\mathcal{D}(g) = [0, \infty)$, $\mathcal{R}(f) = [1, \infty) \subset [0, 1) = \mathcal{D}(g)$
$g \circ f = g(x+1) = \sqrt{x+1}$.

Primer 2. $f(x) = -1 - x^2$, $g(x) = \ln x$, $g \circ f$ ni obstaja, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{R}(f) = (-\infty, -1]$
$\mathcal{R}(f) \not\subset \mathcal{D}(g)$.

b) Naj bo $F: A \to B$ injektivna preslikava, t.j. $F(a) \neq F(b)$, če je $a \neq b$. Potem F določa inverzno preslikavo $F^{-1}: F(A) \to A$ tako, da je $F^{-1}(b) = a \Leftrightarrow F(a) = b$.

Poseben primer. Definicija za funkcije: naj bo f injektivna. Potem je f^{-1} taka funkcija, da je $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$, $f^{-1}: f(A) \to A$ je INVERZNA FUNKCIJA, a , $b \in f(A)$.
Potem je $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$, $\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$.

Opomba. Zveza med grafoma injektivnih funkcij f in f^{-1}: sta zrcalna glede na simetralo prvega kvadranta.

Primer. $f(x) = x+2$, $f^{-1}(x) = x-2$
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} = \mathcal{R}(f) = \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f^{-1})$

Ker funkcije slikajo v realna števila, imamo naslednje lastnosti:

Definicija. Funkcija f je navzgor omejena, če obstaja $m < \infty$, da je $f(x) \leq m$ za $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ (t.j., če je zaloga vrednosti navzgor omejena). Podobno definiramo navzdol omejene funkcije.
Funkcija je omejena, če je omejena navzgor in navzdol, t.j. če obstajata $M < \infty$, $m > -\infty$, da je $m < f(x) < M$ za vse $x \in \mathcal{D}(f)$, tj. če obstaja N, da je $|f(x)| < N$ $(N < \infty)$, za $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.

Primer. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$, navzdol je omejena, navzgor ne.

Definicija. Naj bo f navzgor omejena. Natančna zgornja meja funkcije f je natančna zgornja meja njene zaloge vrednosti, označimo jo z $\sup f$. Podobno definiramo natančno spodnjo mejo ($\inf f$) za navzdol omejene funkcije.

Definicija. Število x imenujemo ničla funkcije f, če je $f(x) = 0$.

V $\mathbb{R}$ lahko seštevamo, odštevamo, ... To prenesemo na funkcije.

Definicija. Naj bo $D(f)=D(g)=D$. Potem lahko na D definiramo funkcije $f+g$, $f\cdot g$, $f-g$:

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x) \text{ in } (fg)(x)=f(x)g(x).$$

Če je $g\neq 0$ za vse $x\in D$, je

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

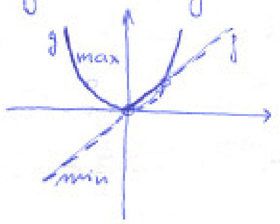
Definicija. Naj bosta f,g dve funkciji, $D(f)=D(g)=D$.

$\max\{f,g\}$ je funkcija na D, definirana kot:

$$[\max\{f,g\}](x)=\max\{f(x),g(x)\} \text{ za } \forall x\in D.$$

Podobno definiramo $\min\{f,g\}$.

Primer. $f(x)=x$, $g(x)=x^2$

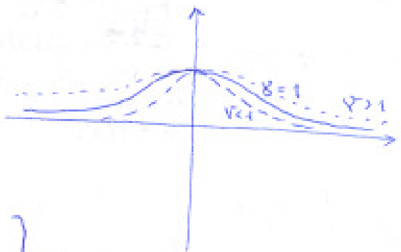


Definicija. Naj bo $f_\gamma: \gamma\in\Gamma$ neskončna družina funkcij, vseh definiranih na D. Tedaj je $\sup f_\gamma, \gamma\in\Gamma$ funkcija definirana kot

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma = \sup\{f_\gamma(x);\gamma\in\Gamma\}.$$ – v vsaki točki vzamemo sup.

Podobno za $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$.

Primer. $f_\gamma(x)=\frac{1}{1+\gamma x^2}$, $0<\gamma<\infty$.



$x\neq 0$ $\quad \frac{1}{1+\gamma x^2}$ $\quad \gamma\to\infty$ gre $\frac{1}{1+\gamma x^2}\to 0$

$\Rightarrow$ $\quad \inf\left\{\frac{1}{1+\gamma x^2};0<\gamma<\infty\right\}=0$

$\quad \sup\left\{\frac{1}{1+\gamma x^2};0<\gamma<\infty\right\}=1$

$x=0$ $\quad \frac{1}{1+\gamma x^2}=1$ za vse f_γ.

$$\left.\right\} \begin{array}{l}[\sup\{f_\gamma\}](x)=1 \text{ za vse } \gamma \\ [\inf\{f_\gamma\}](x)=\begin{cases}0; & \text{za } x\neq 1\\ 1; & \text{za } x=1\end{cases}\end{array}$$

3. ZVEZNOST FUNKCIJE

21.11.2002

Naj bo f funkcija, definirana na D. Pravimo, da je f zvezna v $a\in D$, če velja: za $x\in D$ blizu a je tudi $f(x)$ blizu $f(a)$, t.j. $f(x)$ je poljubno blizu $f(a)$, če je x dovolj blizu a.

Definicija. Funkcija $f:D\to\mathbb{R}$ je zvezna v točki $a\in D$, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$, da je $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ za $|x-a|<\delta$, $x\in D$.

Definicija. Naj bo $D\subset\mathbb{R}$ neka množica. Če je $a\in D$ in $\delta>0$, tedaj množico $\{x\in D: |x-a|<0\}$ imenujemo δ-okolica točke A v D.

Zveznost funkcije f v $a\in D$ lahko definiramo z okolicami:

$f:D\to\mathbb{R}$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \ni:$ f δ-okolico $a\in D$ preslika v ε-okolico $f(a)\in\mathbb{R}$.

Drugače: Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ je zvezna v $a \in D$, če za vsako okolico W točke $f(a)$, obstaja okolica U točke a, da je $f(U) \subset W$.

Opomba. Taka definicija je primerna za posplošitve, npr. v topologiji.

Izrek. (Karakterizacija zveznosti z zaporedji) Naj bo f definirana na D in zvezna v $a \in D$. Naj bo $\{x_n\}$ iz D zaporedje, ki konvergira k a. Pokažemo, da zaporedje $\{f(x_n)\}$ konvergira k $f(a)$.

DOKAZ. $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, da je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ za $|x-a| < \delta$ in $x \in D$.
Ker zaporedje x_n konvergira k a, $\exists n_0$, da je $|x_n - a| < \delta$ za $\forall n \geq n_0$. Potem je $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ za $\forall n \geq n_0$. Potem $f(x_n) \to f(a)$. ∎

Izrek. Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$. Tedaj je f zvezna v $a \in D$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $\{x_n\} \in D$, ki konvergira k a, zaporedje $\{f(x_n)\}$ konvergira k $f(a)$.

DOKAZ. (Obrata) Denimo, da za vsako zaporedje $x_n \to a$ zaporedje $f(x_n) \longrightarrow f(a)$. Dokazujemo s protislovjem: f ni zvezna v a. Potem $\exists \varepsilon > 0$, da za noben $\delta > 0$ ni $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ in $|x_n - a| < \delta$, t.j. $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$.
Za $\forall n: x_n \in D$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, da je $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Torej $f(x_n)$ ne konvergira k $f(a)$, x_n pa konvergira k a. Protislovje.

Opomba. Proučevali bomo v glavnem funkcije, definirane na odprtih intervalih (a,b) ali na zaprtih intervalih $[a,b]$.
Ker za $\forall x \in (a,b)$ (a,b) vsebuje $(x-t, x+t)$ za nek $t > 0$, je f zvezna v $x_0 \in (a,b) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ko je $|x - x_0| < \delta$.
Na $[a,b]$: za krajišči: f je zvezna v a. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ $\forall x$, $|x-a| < \delta$ in $x \in [a,b]$, t.j. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ za $\forall\ a \leq x < a + \delta$.

Opomba. Definicija: f na D je zvezna v $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, da je $|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon$ ko je $|h| < \delta$ in $a+h \in D$.

26.11.2002

Izrek. Naj bosta f in g dve zvezni funkciji v $a \in D$. Tedaj je:
i) $f \pm g$ zvezna v a
ii) fg zvezna v a
iii) če je $g(a) \neq 0$ je $\frac{f}{g}$ zvezna v a.

DOKAZ. i) $x_n \in D \to a$. Ker je f zvezna v a, je $f(x_n) \to f(a)$, enako $g(x_n) \to g(a)$. Potem gre $f(x_n) + g(x_n) \to f(a) + g(a)$ in je $f+g$ zvezna v a. ($\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$) ∎

Opomba. Zgornji dokaz uporabi karakterizacijo zveznosti z zaporedji. Dokažemo pa izrek lahko tudi direktno:

i) $|(f+g)(x)-(f+g)(a)|$ je poljubno majhno, če je $|x-a|$ dovolj majhno

$|f(x)+g(x)-f(a)+g(a)| = |f(x)-f(a)+g(x)-g(a)|$. Naj bo $\varepsilon>0$.

Ker je f zvezna v a, obstaja $\delta_1>0$, da je $|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$ za $\forall x\in D$, $|x-a|<\delta_1$. Ker je g zvezna v a, $\exists\,\delta_2>0$, da je $|g(x)-g(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$ za $\forall\, x\in D$, $|x-a|<\delta_2$.

Naj bo $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Če je $|x-a|<\delta$, je $|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|<$
$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, $\varepsilon>|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)| \geq |f(x)-f(a)+g(x)-g(a)| =$
$= |f(x)+g(x)-f(a)-g(a)| = |(f+g)(x)-(f+g)(a)|$. ■

Izrek. Naj bosta f in g dve funkciji in $R(f)\subset D(g)$, da lahko definiramo $g\circ f$. Naj bo f zvezna v točki $a\in D(f)$ in g zvezna v $f(a)\in D(g)$. Tedaj je $g\circ f$ zvezna v a.

DOKAZ. Z zaporedji. Naj bo $\{x_n\}\subset D(f)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Ker je f zvezna v a, je $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$. Torej je $\{f(x_n)\}\subset D(g)$ in $f(x_n)\to f(a)$.

Potem zaradi zveznosti g $g(f(x_n))\to g(f(a))$. Potem $g\circ f(x_n)\to$
$\to g\circ f(a)$.

Torej $x_n\to a \Rightarrow g\circ f(x_n)\to g\circ f(a)$. Potem je $g\circ f$ zvezna v a. ■

Primeri. 1) $f(x)=c$ (zvezne funkcije v $\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ za $\forall a$)

2) $f(x)=a_0x^n+\dots+a_n$

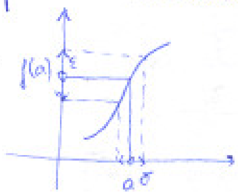
Polinomi so zvezne funkcije na vsem $\mathbb{R}$ (sledi iz pravil o vsoti/razliki/produktu)

3) $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ je zvezen povsod, kjer je $q(x)\neq 0$, p,q sta polinoma.

Za $q\not\equiv 0$ je takih točk, kjer je r nezvezna, le končno mnogo.

4. ENAKOMERNA ZVEZNOST

Kaj pomeni zveznost na sliki?



Za vsak $\varepsilon>0$ lahko najdemo $\delta>0$, da f δ-okolico točke a preslika v ε-okolico točke $f(a)$.

Naj bo f funkcija na D. Naj bo f zvezna na D, t.j. zvezna v vsaki točki a iz D. Torej za $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta_a>0$, da je $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ čim je $|x-a|<\delta_a$, $x\in D$.

Ali lahko po predpisu $\varepsilon>0$ izberemo δ_a tako, da ne bo odvisen od a, t.j. ali lahko $\forall\varepsilon>0$ najdemo $\delta>0$, da bo $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ čim bo $|x-a|<\delta$ in $x\in D$ za vse a iz D?

Odgovor je v splošnem ne. Primer: $D=(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{x}$ (V tem primeru je dober celo vsak ε. $\varepsilon > 0$, ni $\delta > 0$, da bi $|f(x)-f(a)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \varepsilon$, čim je $|x-a| < \delta$. Dokaz s protislovjem. Recimo, da δ obstaja, vzamemo lahko $\delta < \frac{1}{2}$. Naj bo $0 < a < \delta$ in $x = 2a$. Potem je $x \in D$, ker je $x > 0$ in $x = 2a < 1$. $|\frac{1}{2a} - \frac{1}{a}| = |\frac{1-2}{2a}| = \frac{1}{2}|\frac{1}{a}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a}$. To pa je pri dovolj majhnem a iz D poljubno veliko, torej ni za poljubna a, x $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. Protislovje.)

<u>Primer</u>. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$ Tudi tu obstaja $\varepsilon > 0$, za katerega ni nobenega $\delta > 0$, da je $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ takoj ko je $|x-a| < \delta$ za vsak a.

<u>Definicija</u>. Funkcija f na D je enakomerno zvezna na D, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ za vse $x_1, x_2 \in D$ za katere je $|x_1 - x_2| < \delta$.

<u>Opomba</u>. Za vsak $\varepsilon > 0$ lahko izberemo (od a neodvisen) $\delta > 0$, da je $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ čim je $|x-a| < \delta$, $x, a \in D$.

<u>Opomba</u>. Važno je torej, da je po predpisu $\varepsilon > 0$ možno najti $\delta > 0$, ki ni odvisen od a.

<u>Izrek</u>. Naj bo funkcija f definirana na zaprtem intervalu $[a,b]$ in zvezna v vsaki točki $D = [a,b]$. Tedaj je f enakomerno zvezna na D.

<u>Opomba</u>. Dokaz ni najkrajši možen, bomo pa pomožne izreke kasneje uporabljali.

DOKAZ. * 28.11.2002

<u>Lema</u>. Naj bo $I = [a,b]$ in za vsak $x \in I$ naj bo dan $\delta > 0$. Za $\forall x \in I$ naj bo O_x $\delta(x)$-okolica x v $\mathbb{R}$, t.j. $O_x = (x - \delta(x), x + \delta(x))$. Tedaj v družini okolic $\{O_x ; x \in I\}$ obstaja končno mnogo takih, ki skupaj pokrijejo I (t.j. $\exists m \in \mathbb{N}$ in $x_1, \dots, x_m \in I$, da je $I \subset O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \dots \cup O_{x_m}$.

DOKAZ.

Okolica $O_a = (a - \delta(a), a + \delta(a))$ pokrije vsak interval od a do c, kjer je $c < a + \delta(a)$. Naj bo S množica tistih $c \in [a,b]$, za katere velja, da je mogoče interval $[a,c]$ pokriti s končno mnogo okolicami iz družine $\{O_x, x \in I\}$. S ni prazna ($\forall c$, $a \le c < a + \delta(a)$, $[a,c] \subset O_a$). Ker je $S \subset [a,b]$, je S navzgor omejena. Potem ima natančno zg. mejo $M = \sup S$. Jasno je $a < M \le b$. Pokažemo, da je tudi $M \in S$. $M - \delta(M) < M$ in $M = \sup S$, $\exists c \in S$, da je $c > M - \delta(M)$. To pomeni, da je $[a,c]$ mogoče pokriti s končno mnogo okolicami. Če k tem okolicam dodamo še O_M, smo še vedno s končno okolicami pokrili $[a,M]$. Torej je $M \in S$. Zdaj pokažemo $M = b$. Recimo, da je $M < b$. Okolice $O_{x_1}, \dots, O_{x_n}$ naj pokrijejo $[a,M]$.

Okolice $Ox_1, \dots, Ox_n$ pa pokrijejo še vsak interval (a, c), kjer je $c < M + \delta(M)$. To pomeni, da obstajajo c-ji, ki so večji od M in so v S. To je v protislovju z $M = \sup S$. Potem je $M = b$. ∎

<u>Opomba</u>. V splošnem končnih pokritij ni (odprti intervali). Primer: za $\forall x \in \mathbb{R}$ $Ox = (x-1, x+1)$. Tedaj cela družina pokrije $\mathbb{R}$, končno okolic pa ne.
Primer 2: (a, b), $\forall x$ $|x-a|, |x-b|$, naj bo $\delta(x) = \frac{1}{2}\min\{|x-a|, |x-b|\}$. Za $\forall x$: $Ox = (x-\delta(x), x+\delta(x))$. Množica vseh Ox jasno pokrije interval, končno mnogo pa ne ($\forall x_k$ okolica Ox_k se ne seka z $(a, a+\delta(x))$ in $(b-\delta(x), b)$, unija spusti $(a, a+\min\delta(x_k))$, $(b-\min\delta(x_k), b)$). 4

<u>DOKAZ</u>. * Naj bo f zvezna v vsaki točki $D = [a, b]$ in $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna, za $\forall x \in D$ $\exists \delta x > 0$, da je $|f(x') - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ čim je $|x' - x| < 2\delta x$, $x' \in D$. Za $\forall x \in D$ je $Ox = (x - \delta(x), x + \delta(x))$. Po lemi obstaja končno pokritje $(x_1, \dots, x_n$ za nek $n \in \mathbb{N})$. Naj bo $\delta = \min\{\delta(x_1), \dots, \delta(x_n)\}$. Naj bosta $x, x' \in D$, $|x' - x| < \delta$. Potem je x vsebovan vsaj v eni od okolic, recimo v Ox_i. Torej je $x \in (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i))$, sledi $x \in (x_i - \delta, x_i + \delta)$, $|x - x_i| < \delta(x_i)$ in $|x - x_i| < \delta$. Ker je $|x' - x| < \delta$, je $|x' - x_i| \leq |x' - x| + |x - x_i| < 2\delta(x_i)$. Zato je $|f(x') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sledi: $|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x')| < \varepsilon$.

Sledi enakomerna zveznost. ∎

5. OSNOVNE LASTNOSTI ZVEZNIH FUNKCIJ

<u>Izrek</u>. Naj bo f zvezna v vsaki točki $[a, b]$ in naj ima v krajiščih nasprotno predznačeni vrednosti. Tedaj obstaja vsaj ena točka ξ, $a < \xi < b$, da je $f(\xi) = 0$, t.j. med a in b je vsaj ena ničla f. 5

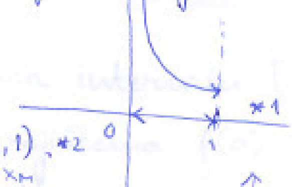
<u>DOKAZ</u>. Naj bo f zvezna na $[a, b]$ in $\operatorname{sgn}(f(a)) = -\operatorname{sgn}(f(b))$. BŠZS predpostavimo $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Interval razpolovimo, $c = \frac{a+b}{2}$, ogledamo si (a, c), (c, b). Če je $f(c) = 0$, je dokaz končal. 6 Drugače ima na enem podintervalov (a, c), (c, b) nasprotno predznačeni vrednosti. Označimo krajišči z (a_1, b_1). $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, ipd. Če po končno korakih dobimo v nekem c_i vrednost 0, smo končali. Drugače dobimo neskončno zaporedji $a_1, a_2, \dots$ in $b_1, b_2, \dots$ in zaporedje $[a_k, b_k]$, da je $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$, $f(a_k) < 0$, $f(b_k) > 0$. Dolžine intervalov gredo proti 0. Tedaj obstaja natanko ena točka ξ, ki je vsebovana v vseh intervalih. Krajišča konvergirajo k tej točki: $a_k \to \xi$ in $b_k \to \xi$. Zaradi zveznosti: $f(a_k) \to f(\xi)$ in $f(b_k) \to f(\xi)$. Ampak $f(a_k) < 0 < f(b_k)$ za $\forall k$: $\lim f(a_k) = f(\xi) \leq 0$ in enako $f(\xi) \geq 0$, torej $f(\xi) = 0$. ∎

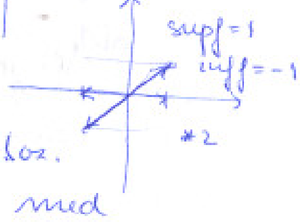
<u>Opomba</u>. Za nezvezne funkcije to v splošnem ni res.

<u>Izrek</u>. Naj bo f zvezna na $[a,b]=D$. Tedaj je f omejena na D. Naj bo $m=\inf f$ in $M=\sup f$. Tedaj obstajata taki točki x_m in x_M iz D, da je $f(x_m)=m$ in $f(x_M)=M$, t.j. f je omejena in doseže svoj maksimum in minimum.

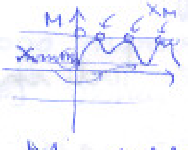
<u>DOKAZ</u>. Naj bo f zvezna na $[a,b]$. Recimo, da ni navzgor omejena. Potem preseže vsako (še tako veliko) pozitivno število. Za $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists x_n\in D$, da je $f(x_n)>n$. Zaporedje x_n je zaporedje števil, ki so vsa v D in ima torej $\{x_n\}$ vsaj eno stekališče x_0, ki je očitno v D. Potem lahko iz $\{x_n\}$ izberemo podzaporedje $\{x_{n_k}\}$, ki konvergira k x_0. Velja $f(x_{n_k})\geq n_k$ za vse k. Po drugi strani $\{x_{n_k}\}$ konvergira k x_0. Ker je f zvezna, tudi $\{f(x_{n_k})\}$ konvergira k $f(x_0)$, $k\to\infty$, t.j. $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0)$. Ker $\{f(x_{n_k})\}$ konvergira k $f(x_0)$, je nujno $\{f(x_{n_k})\}$ omejeno, kar je v protislovju z $f(x_{n_k})\geq n_k$, ker naj bi šlo podzaporedje proti ∞. Sledi, da je funkcija navzgor omejena, podobno pokažemo, da je navzdol omejena.
Naj bo $M=\sup f$ (obstaja, ker je f navzgor omejena) $=\sup\{f(x);\ x\in[a,b]\}$. Pokažemo, da $\exists x_M\in[a,b]$, da je $f(x_M)=M$. Jasno je $f(x)\leq M$ za vse $x\in[a,b]$. Predpostavimo: $f(x)<M$ za $\forall x\in[a,b]$, t.j. $M-f(x)>0$ za vse $x\in[a,b]$. Funkcija $x\mapsto M-f(x)$ je zvezna in pozitivna, zato je $x\mapsto \frac{1}{M-f(x)}$ definirana in zvezna. Ampak je navzgor omejena, t.j. $\exists A<\infty$, da je $\underbrace{\frac{1}{M-f(x)}}^{>0}\leq A$ za vse $x\in[a,b]$. Sledi: $M-f(x)\geq\frac{1}{A}$, t.j. $f(x)\leq M-\frac{1}{A}$ za vse x. Potem M ni več supremum. Protislovje. Potem $\exists x_M\in[a,b]$, $f(x_M)=M$. Podobno $\exists x_m\in[a,b]$, da je $f(x_m)=m$. ⊠ (Pokaži doma)

<u>Opomba</u>. Če je f zvezna na odprtem intervalu, ni nujno omejena.
Protiprimer: $f(x)=\frac{1}{x}$ na $(0,1)$. *1
Tudi če slučajno je omejena, ne zavzame nujno $\sup f$ in $\inf f$. Protiprimer: $f(x)=x$ na $(-1,1)$. *2





<u>Opomba</u>. x_m (in x_M) ni nujno en sam. Primer:



<u>Posledica</u>. Naj bo f zvezna na $[a,b]$ in $\sup f=M$, $\inf f=m$ (oz. $\max f=M$, $\min f=m$). Potem zavzame f vse vrednosti med m in M, t.j. $\forall A\in[m,M]$ $\exists x_A \ni: f(x_A)=A$ in $x_A\in[a,b]$.

DOKAZ. Če je f konstantna, ni kaj dokazovati. Naj bo torej f nekonstantna. $\exists\, x_m, x_M \ni: f(x_m)=m, f(x_M)=M$ in $m \neq M$ in $x_M \neq x_m$. Oglejmo si $g(x) = f(x) - A$, kjer je $m < A < M$, na intervalu $[x_m, x_M] = J$. (za $A = m$ ali $A = M$ že vemo).

utrnem zapis. ?

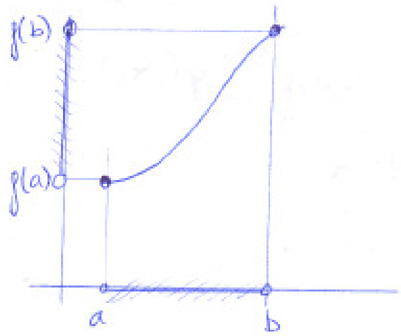
Funkcija g je zvezna na J. Ker je $g(x_m) = f(x_m) - A = m - A$ in $g(x_M) = M - A$, $g(x_m) < 0$, $g(x_M) > 0$. Potem ima g na J vsaj eno ničlo. Potem je $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = A$. ▫

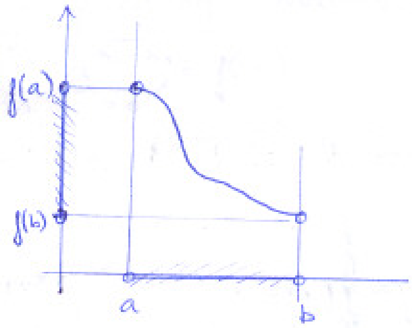
6. MONOTONE FUNKCIJE

Definicija. Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ nek interval. Funkcija f na I je naraščajoča (padajoča), če iz $x_1, x_2 \in I$ in $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$). Pravimo, da je strogo naraščajoča, če velja $<$ ($>$).

Naraščajoče in padajoče funkcije imenujemo MONOTONE.

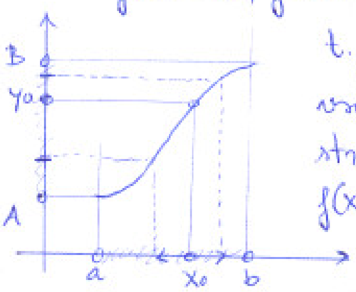
- Naj bo $I = [a,b]$ zaprt interval in f monotona funkcija na I. Naj bo f zvezna. Tedaj vemo, da zavzame f vse vrednosti med $f(a)$ in $f(b)$, oz. $Z_f = [f(a), f(b)]$ (ali $[f(b), f(a)]$).
- Naj bo f strogo monotona na I, je $f(x_1) \neq f(x_2)$ za $x_1 \neq x_2$, torej je f injektivna na $[a,b]$.
- Naj bo f strogo monotona in zvezna na I. Potem f interval $[a,b]$ injektivno preslika na $J = [f(a), f(b)]$ or $J = [f(b), f(a)]$. Potem obstaja f^{-1} na J in $Z_{f^{-1}} = [a,b]$.





Izrek. Naj bo f strogo monotona zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$. Tedaj je f^{-1} zvezna na zaprtem intervalu s krajiščema $f(a)$ in $f(b)$.

DOKAZ. Predpostavimo lahko, da je f strogo naraščajoča. Naj bo $f(a) = A$, $f(b) = B$. Naj bo $y_0 \in [A, B]$. Označimo $x_0 = f^{-1}(y_0)$, t.j. $y_0 = f(x_0)$. Naj bo $\varepsilon > 0$. BŠZS je $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ vsebovan v $[a,b]$. Oglejmo si $f(x_0 - \varepsilon)$ in $f(x_0 + \varepsilon)$. Zaradi stroge monotonosti je $f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$. Če je y med $f(x_0 - \varepsilon)$ in $f(x_0 + \varepsilon)$, je $f^{-1}(y)$ med $x_0 - \varepsilon$ in $x_0 + \varepsilon$. Naj bo σ manjše od števil $f(x_0 + \varepsilon) - y_0$ in $y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$. Če je



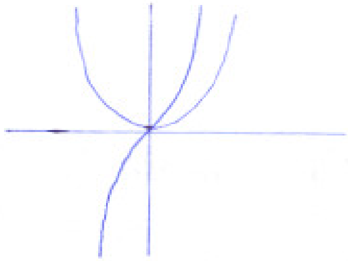
y med $y_0-\delta$ in $y_0+\delta$, je gotovo y med $f(x_0-\varepsilon)$ in $f(x_0+\varepsilon)$ in zato $x_0-\varepsilon < f^{-1}(y) < x_0+\varepsilon$.

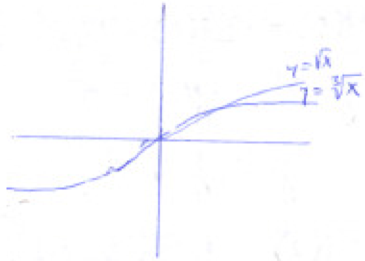
Torej: y_0 med A in B. $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, da je za $y_0-\delta < y < y_0+\delta \Rightarrow x_0-\varepsilon < f^{-1}(y) < x_0+\varepsilon$. Potem je f^{-1} zvezna na (A,B). ▪

$(\,|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$ čim je $|y-y_0| < \delta\,)$ Doma zveznost v krajiščih.

5.12.2002

Opomba. $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$ je strogo naraščajoča na $[0,\infty)$,
- če je n liho, tedaj je $f(x)=x^n$ strogo naraščajoča na $\mathbb{R}$. Potem je $f(x)=\sqrt[n]{x}$ za sode n definirana in zvezna na $[0,\infty)$, za lihe pa je definirana in zvezna na $(-\infty,\infty)$.





Posledica. $f(x)=x^r$ je zvezna na $[0,\infty)$ za vsak racionalen r.
$r=\frac{m}{n}$, $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$, $f=h\circ g$, $g: x\to x^m$, $h: x\mapsto\sqrt[n]{x}$, g in h sta zvezni, torej je f zvezna.

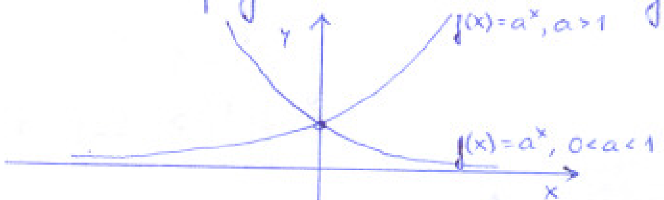
7. POSEBNE FUNKCIJE

(a) Naj bo $a>0$. Če je $x=\lim\limits_{n\to\infty} r_n$, $r_n\in\mathbb{Q}$, je $a^x=\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$. Sledi:
$a^{x+y}=a^x a^y \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$.

$$\left(a^{x+y}=\lim_{n\to\infty} a^{x_n+y_n} = \lim_{n\to\infty}(a^{x_n}\cdot a^{y_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}\cdot\lim_{n\to\infty} a^{y_n} = a^x\cdot a^y\right)$$

$$\boxed{a^{x+y}=a^x\cdot a^y}$$ (adicijski izrek za eksp. funkcijo).

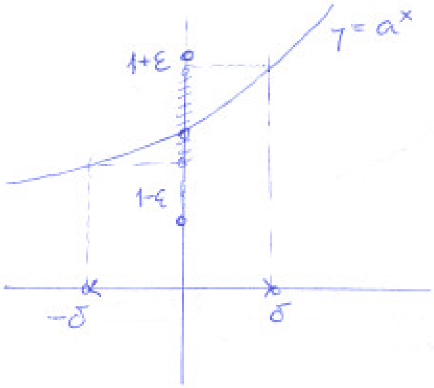
- Naj bo $a>1$. $f(x)=a^x$. Tedaj je f strogo naraščajoča.
  DOKAZ. $x_1<x_2$, $f(x_2)=a^{x_2}=\underbrace{a^{x_1}}_{>0}\cdot\underbrace{a^{\overbrace{x_2-x_1}^{>0}}}_{>1}=f(x_1)\cdot a^{x_2-x_1}>f(x_1)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=+\infty$, potem vrednosti funkcije $f(x)=a^x$ postanejo poljubno velike, če je $x>0$ dovolj velik.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-n}=0$, vrednosti so poljubno blizu 0 za dovolj majhne neg. x $(x\to-\infty)$



- Podobno: če je $0<a<1$, je $f(x)=a^x$ strogo padajoča.
- Če je $a=1$, je $f(x)=1 \quad \forall x$.

Izrek. Funkcija $f(x)=a^x$ $(a>0)$ je zvezna za $\forall x\in\mathbb{R}$.
DOKAZ. $a=1$ ✓

Naj bo $a > 1$. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \ni: |a^h - 1| < \varepsilon$, čim je $|h| < \delta$, $h \in \mathbb{Q}$, t.j. $1+\varepsilon > a^h > 1-\varepsilon$ za vsak $h \in \mathbb{Q}$, $|h| < \delta$. Hkrati je f naraščajoča. Potem je to res tudi za vse realne h med $-\delta$ in δ. Premisli doma.



$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, da je $|f(x) - 1| < \varepsilon$ za $\forall h : |h| < \delta$. (tudi za $h \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

To pomeni: za $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, da je $|f(h) - 1| < \varepsilon$ za $\forall |h| < \delta$, t.j. $f(x) = a^x$ zvezna v $x = 0$ ($f(0) = 1$).

Naj bo x poljuben. $\varepsilon > 0$. Obstaja $\delta > 0$, da je $|a^h - 1| < \frac{\varepsilon}{a^x}$ za $\forall h$, $|h| < \delta$. Če je tedaj $|x' - x| < \delta$, je

$$|f(x') - f(x)| = |a^{x'} - a^x| = |a^x(a^{x'-x} - 1)| = a^x |a^{x'-x} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^x} \cdot a^x = \varepsilon.$$

Opomba. Velja tudi $(a^x)^y = a^{xy}$. Dokaz doma (uporabi zveznost.)

(b) Funkcija $f(x) = a^x$ je definirana na $\mathbb{R}$. Če je $a = 1$, je $\mathcal{R}(f) = \{1\}$, drugače je $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}^+$ za $a > 0, a \neq 1$ $(= \{y; y > 0\})$.

Vemo, da je f strogo monotona na $\mathbb{R}$ za $a \neq 1$. Potem lahko definiramo inverz.

$\mathcal{D}(f^{-1}) = \{x; x > 0\}$, $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$.

Definicija. $0 < a < \infty$, $a \neq 1$. Inverzno funkcijo funkcije $f(x) = a^x$ imenujemo logaritemska funkcija in pišemo $f^{-1}(x) = \log_a x$.

$$\boxed{y = \log_a x \iff a^y = x}$$

Naj bo $g(x) = \log_a x$. Tedaj je $\mathcal{D}(g) = \{x; x > 0\}$, $\mathcal{R}(g) = \mathbb{R}$.

Opomba. Sledi, da $g(x) = \log_a x$ spet zvezna in strogo monotona.

Opomba. $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$. $\quad A > 0, B > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

$\log_a A^\alpha = \alpha \log_a A$

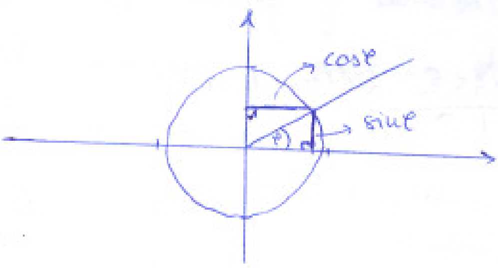
Dokaz doma. Uporabi lastnosti eksp. funkcije.

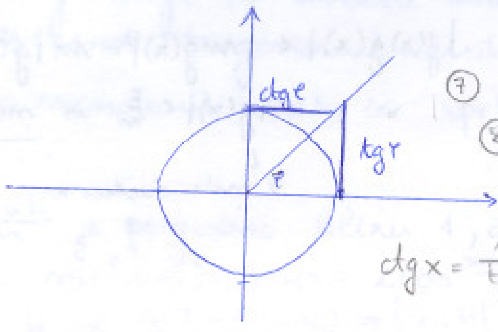
Opomba. $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$\log_e x = \log x = \ln x$.

(c) Trigonometrične funkcije. Ponovi doma.

$\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

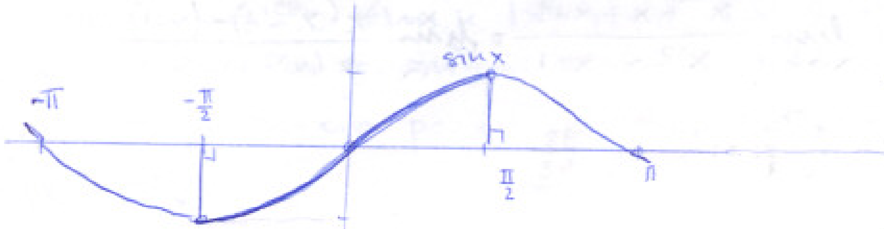




$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

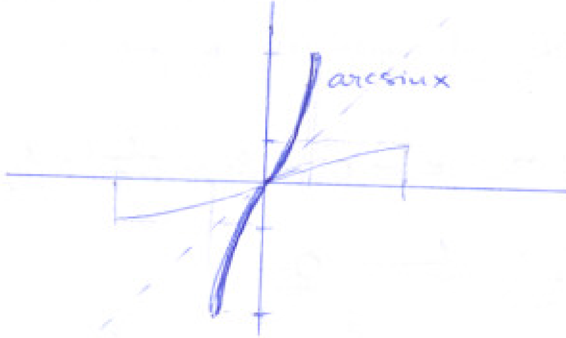
(d) Ciklometrične funkcije (inverzne trigonometričnim)

$f(x) = \sin x$



Inverza v splošnem ni.
$f(x) = \sin x$ na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
$D(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (11)
Taka ima inverz (ker je injektivna).

(10)

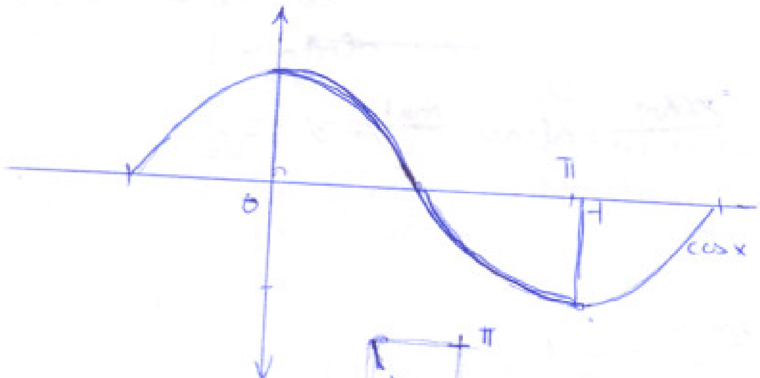


$f^{-1} = \arcsin$

∘ $-1 \leq x \leq 1$, $\arcsin x$ je edini kot y med $-\frac{\pi}{2}$ in $\frac{\pi}{2}$, za katerega je $\sin y = x$

$D(f^{-1}) = [-1, 1]$

$R(f^{-1}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



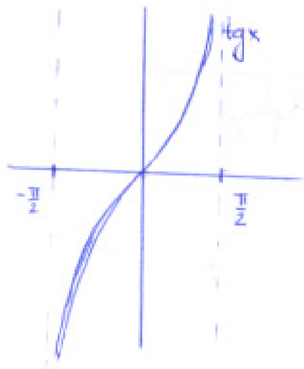
cos zožimo na $[0, \pi]$

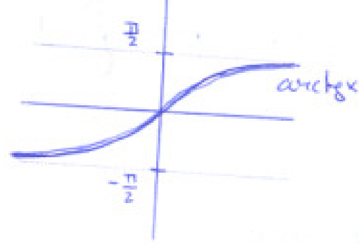
$D(f^{-1}) = [-1, 1]$

$R(f^{-1}) = [0, \pi]$

10.12.2002

∘ arccos je edini kot med 0 in π, katerega kosinus je x.





∘ $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arctg} x$ je edini kot med $-\frac{\pi}{2}$ in $\frac{\pi}{2}$, katerega tg je x

Trigonometrične in ciklometrične funkcije so zvezne tam kjer so definirane. Dovolj je dokazati zveznost trigonometričnih funkcij, ciklometrične so inverzi strogo monotonih, zato so spet zvezne.

Sin x je zvezna.

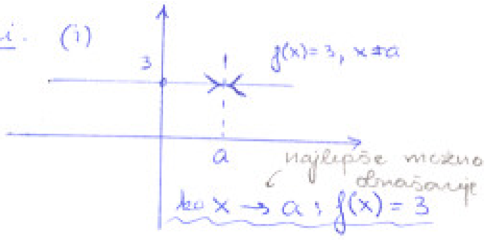
DOKAZ. Najprej geometrijsko: $\frac{\sin h}{h}$ je poljubno blizu 1, če je $h \neq 0$ dovolj majhen. To uporabimo: $\sin(x+h) - \sin x = 2\cos\frac{x+h+x}{2} \cdot \sin\frac{x+h-x}{2} =$
$= 2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}$. Potem je iz $\frac{\sin h}{h} \to 1$ $(h \to 0)$ $\Rightarrow |\sin h|$ je majhen, če je $|h|$

dovolj majhen. $|\sin(x+h)-\sin x| = |2\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}| = |2\cos\frac{2x+h}{2}||\sin\frac{h}{2}| \le$ $\le 2\cdot|\sin\frac{h}{2}|$. Naj bo $\varepsilon>0$, $x\in\mathbb{R}$. Izberemo $\delta>0$ tako majhen, da je $|\sin\frac{h}{2}|<\frac{\varepsilon}{2}$ za $|h|<\delta$. Sledi: $|\sin(x+h)-\sin x|<\varepsilon$ za $|h|<\delta$. Potem je $|\sin x'-\sin x|<\varepsilon$, čim je $|x'-x|<\delta$ $(x'-x=h)$. Potem je sin zvezna v x. Enako: cos je zvezna na vsem $\mathbb{R}$ ($\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ – kompozicija). $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ je zvezna povsod, kjer $\cos x=0$ (t.j. $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},-\frac{3\pi}{2},\dots\}$), podobno $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$.

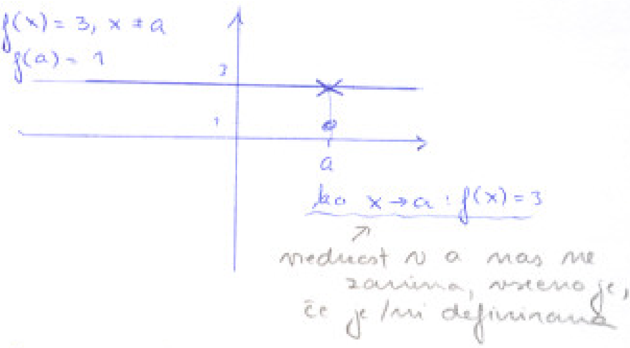
8. LIMITA FUNKCIJE

Zanima nas vedenje funkcije, definirane v okolici točke a, vendar ne nujno v a.

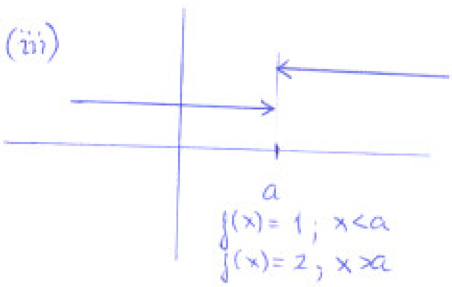
Primeri. (i)



(ii) $f(x)=3,\ x\neq a$
$f(a)=1$



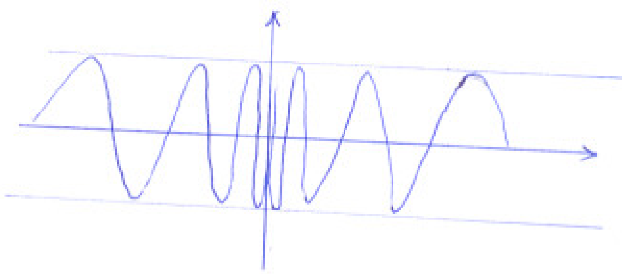
(iii)



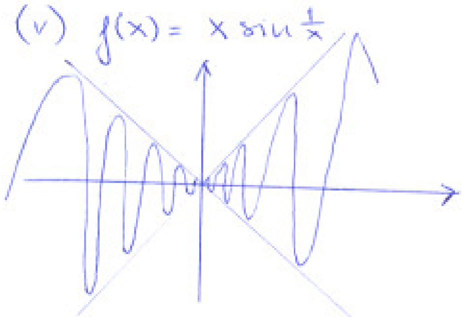
Ali se bližamo kakšnemu A, če je $x\neq a$ dovolj blizu a? (V (i) in (ii) je $A=3$)
Ne, takega A ni.

(iv) $f(x)=\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0$

$A=$? Ne obstaja.
Kje pa!



(v) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$



$A=0$

Funkcija v $x=0$ ni definirana.

Definicija. Naj bo funkcija f definirana v neki okolici točke a $(a-r,a+r)$, $r>0$, razen morda v točki a. Število A je limita funkcije f ko gre x proti a, $x\neq a$, če za vsak $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$, da je $|f(x)-A|<\varepsilon$ brž ko je $|x-a|<\delta$ in $x\neq a$. Potem pišemo

$$A=\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) \text{ ali } A=\lim_{x\to a} f(x).$$

Opomba. Vseeno je ali je f sploh definirana v a (in če je, kakšno vrednost ima).

Opomba. $A=\lim_{x\to a} f(x)$ pomeni, da je $f(x)$ poljubno blizu A, če je $x\neq a$ dovolj blizu a.

Opomba. $|x-a|<\delta$ in $x\neq a$ lahko pišemo $0<|x-a|<\delta$. Torej je $A=\lim_{x\to a} f(x)$, če za $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, da je $|f(x)-A|<\varepsilon$ čim je $0<|x-a|<\delta$.

Opomba. Naj bo f definirana v okolici a, f je zvezna v a natanko tedaj, ko je:

(i) f ima limito v a

(ii) ta limita je enaka $f(a)$.

Primer. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $x\neq 0$, $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

Izrek. Funkcija f, definirana v okolici U točke a (razen morda v a) ima limito $\lim_{x\to a} f(x)$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $x_n\in U$, $x_n\neq a$, $x_n\to a$ zaporedje $f(x_n)$ konvergira.

DOKAZ. Če je to res, za vsako tako zaporedje velja $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{x\to a} f(x)$.

Definicija. Naj bo f definirana na $(a-r,a)$ za nek $r>0$. Pravimo, da je A leva limita funkcije f v točki a, če za $\forall\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$, da je $|f(x)-A|<\varepsilon$ čim je $a-\delta<x<a$. Tedaj pišemo $A=f(a-)=f(a-0)=\lim_{x\nearrow a} f(x)$.

Opomba. To pomeni, da je $f(x)$ poljubno blizu A za vse x, ki so levo od a in dovolj blizu a.

Definicija. Naj bo f definirana na $(a,a+r)$, $a>0$. A je desna limita f v točki a, če za $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, da je $|f(x)-A|<\varepsilon$, če je $a<x<a+\delta$. Pišemo $A=f(a+)=f(a+0)=\lim_{x\searrow a} f(x)$.

Opomba. $f(x)$ je dovolj blizu A za vse x, ki so desno od a in dovolj blizu a.

Primer. $f(x)=\begin{cases}1 ; & x<3\\ x^2 ; & x>3\end{cases}$ $\quad\lim_{x\nearrow 3} f(x)=1$, $\lim_{x\searrow 3} f(x)=9$

Opomba. Funkcija, definirana v okolici a (razen morda v a) ima v točki a limito natanko tedaj, ko ima v a levo in desno limito in sta ti limiti enaki. Tedaj je $\lim_{x\nearrow a} f(x)=\lim_{x\searrow a} f(x)=\lim_{x\to a} f(x)$.

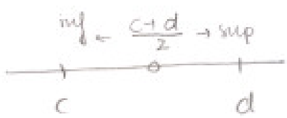
Izrek. Naj bo f monotona na $[a,b]$. Tedaj za $\forall c, a<c<b$ obstajata $f(c-0)$ in $f(c+0)$. Funkcija f je nezvezna v c natanko tedaj, ko $f(c-0)\neq f(c+0)$. Če je naraščajoča, je $f(c-0)\leq f(c)\leq f(c+0)$. (Podobno za padajoče.)

DOKAZ. Naj bo f naraščajoča in naj bo $a < c < b$. Tedaj je $f(x) \leq f(c)$ za $\forall x \leq c$. $A = \sup\{f(x);\ x < c\}$ (obstaja!). Jasno je, da je $f(x) \leq A$ za $\forall x < c$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Število $A - \varepsilon$ ni več zgornja meja: $\exists x_0 \ni: a \leq x_0 < c$ in $A - \varepsilon < f(x_0)$.
Zaradi monotonosti velja: $A - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq A$ za $\forall x: x_0 < x < c$.
Postavimo $x_0 = c - \delta$, tedaj je $A - \varepsilon < f(x) \leq A$ za $\forall x: c - \delta < x < c$.
Torej $f(c^-) = A$ (in obstaja). Podobno za $f(c^+)$.
Ker je $f(x) \leq f(c)$ za $\forall a \leq x < c$, je $f(c^-) \leq f(c)$. Podobno $f(c) \leq f(c^+)$. ∎

Opomba. Če monotona funkcija f ni zvezna v točki c, je $f(c^+) - f(c^-)$ skok funkcije f v točki c.

Izrek. Monotona funkcija na $[a, b]$ ima kvečjemu števno mnogo točk nezveznosti.

DOKAZ. Naj bo f naraščajoča. Naj bo c točka nezveznosti, $a < c < b$. Tedaj obstaja racionalno število r_c: $f(c^-) < r_c < f(c^+)$. Naj bo $d \neq c$, recimo $d > c$ še ena točka nezveznosti. Jasno je: $f(c^+) \leq f\left(\frac{c+d}{2}\right) \leq f(d^-)$ in $f(c^+) > r_c$ in $f(d^-) < r_d$. Potem je $r_c \neq r_d$.



Potem imamo injektivno preslikavo iz množice N vseh točk nezveznosti v $[a, b]$ v neko podmnožico množice racionalnih števil. Torej ima N manjšo ali enako moč kot $\mathbb{Q}$ – torej je kvečjemu števna. ∎

Definicija. Naj bo f definirana na (a, ∞). Število A je limita funkcije f ko gre $x \to \infty$, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B < \infty$, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$ za vse $x > B$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Naj bo f definirana na $(-\infty, a)$. Število A je limita funkcije f ko gre $x \to -\infty$, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B > -\infty$, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$ za vse $x < B$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

Opombe. Tudi pri limitah funkcij ima smisel Cauchyjev pogoj:
Funkcija f, definirana v okolici a, zadošča Cauchyjevemu pogoju, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, da je $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ za vse x in x', da je $0 < |x - a| < \delta$ in $0 < |x' - a| < \delta$.

Velja: f ima v a limito $\Leftrightarrow$ zadošča Cauchyjevemu pogoju.

Opomba. Podobno dobimo Cauchyjev pogoj pri delnih limitah in pri limiti $\pm\infty$.

Primer. $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ na $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$.

Vemo: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Pokažemo:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Naj bo $x\in\mathbb{R}$, $[x]$ celi del x. Potem je $n\le x< n+1$ in

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = e \text{ in } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \Rightarrow \lim_{\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

IV. ODVOD

1. DEFINICIJA IN RAČUNANJE ODVODA

Definicija. Naj bo f definirana v okolici točke a. Če obstaja

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

jo imenujemo odvod funkcije f v točki a (derivacija) in pravimo, da je f odvedljiva v točki a.

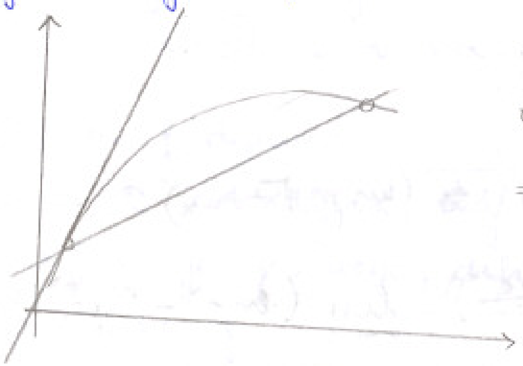
Oznaka: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Opomba. Izraz $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se imenuje diferenčni kvocient.

Opomba. Odvod lahko označimo tudi $\frac{df}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Primer. $f(x)=x^2$, $a=2$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$

Opomba. Geometrijski pomen odvoda



$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ... sm. koeficient sekante

$\Rightarrow$ Če $f'(a)$ obstaja, je to sm. koeficient tangente na $\Gamma(f)$ v $(a, f(a))$.

Torej je $f'(a)$ strmina krivulje $\Gamma(f)$ v $(a, f(a))$.

Primer. Problem trenutne hitrosti (fizika).

$v(t)$, $s(t)$ $\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$ ... povprečna hitrost

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$ ... trenutna hitrost