Opomba. Podobno dobimo Cauchyjev pogoj pri delnih limitah in pri limiti $\pm\infty$.

Primer. $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ na $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$.

Vemo: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, $\lim\limits_{n\to-\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. Pokažemo: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Naj bo $x\in\mathbb{R}$, $[x]$ celi del x. Potem je $n\leq x< n+1$ in

$$(1+\frac{1}{n+1})^n < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = e \text{ in } \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) = e \Rightarrow \lim_{\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

IV. ODVOD

1. DEFINICIJA IN RAČUNANJE ODVODA

Definicija. Naj bo f definirana v okolici točke a. Če obstaja

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

jo imenujemo odvod funkcije f v točki a (derivacija) in pravimo, da je f odvedljiva v točki a.

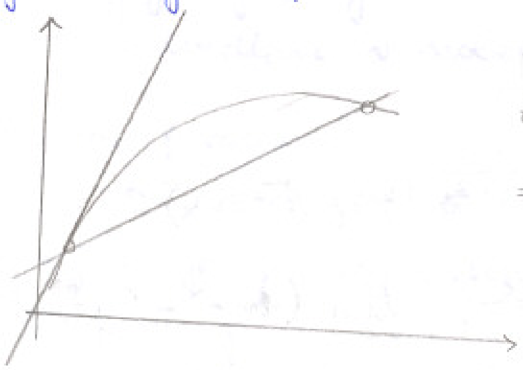
Oznaka: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Opomba. Izraz $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se imenuje diferenčni kvocient.

Opomba. Odvod lahko označimo tudi $\frac{df}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Primer. $f(x)=x^2$, $a=2$ $\quad \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$

Opomba. Geometrijski pomen odvoda



$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ... sm. koeficient sekante

$\Rightarrow$ Če $f'(a)$ obstaja, je to sm. koeficient tangente na $\Gamma(f)$ v $(a, f(a))$.

Torej je $f'(a)$ strmina krivulje $\Gamma(f)$ v $(a, f(a))$.

Primer. Problem trenutne hitrosti (fizika).

$v(t)$, $s(t)$ $\qquad \frac{s(a+h)-s(a)}{h}$ ... povprečna hitrost

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$ ... trenutna hitrost

Izrek. Če je f odvedljiva v a, je f zvezna v a.

DOKAZ. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] = f(a) + 0\cdot f'(a) = f(a)$. ∎

Definicija. Naj bo f definirana na $(a-r, a]$ za $r>0$. Če obstaja $\lim_{x\nearrow a}(f(x)-f(a))/(x-a)$, jo imenujemo levi odvod f v a.

Naj bo f definirana na $[a, a+r)$ za neki $r>0$. Če obstaja $\lim_{x\searrow a}(f(x)-f(a))/(x-a)$, jo imenujemo desni odvod f v a.

Primer. $f(x) = |x|$, $a = 0$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\nearrow 0}(f(x)-f(0))/(x-0) &= \frac{-x}{x} = -1\\ \lim_{x\searrow 0}(f(x)-f(0))/(x-0) &= \frac{x}{x} = 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ ni odvedljiva v } 0.$$

Opomba. Funkcija je odvedljiva, če obstajata oba enostranska odvoda in sta enaka.

Opomba. f je odvedljiva na (a,b), če je odvedljiva v vsaki točki tega intervala.

f je odvedljiva na $[a,b]$, če je odvedljiva v vsaki not. točki (t.j. na (a,b)) in v a obstaja desni v b pa levi odvod.

Opomba. $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ je zvezna na $\mathbb{R}$

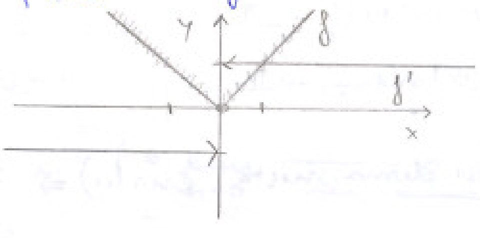
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0}\sin(\tfrac{1}{x}) \text{ ... ne obstaja}$$

Opomba. Obstajajo funkcije na $[a,b]$, ki so zvezne na $[a,b]$ a niso odvedljive v nobeni točki $[a,b]$.

17.12.2002

Definicija. Naj bo f definirana na D in f naj bo v kakšni točki D odvedljiva. Naj bo $D' = \{x\in D,\ f'(x) \text{ obstaja}\}$. $x\mapsto f'(x)$ je funkcija, definirana na D'. To funkcijo imenujemo f'.

Primer. $f(x) = |x| = \begin{cases} x; & x>0\\ -x; & x<0\\ 0; & x=0\end{cases}$ je odvedljiva povsod razen v 0. Potem je $f'(x) = \begin{cases} 1; & x>0\\ -1; & x<0\\ \nexists; & x=0\end{cases}$, torej $D' = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.



Primer 2. $f(x)=x^2$ $\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=\underline{2x}$$

Pokazali smo: $f(x)=x^2$ je odvedljiva v vsaki točki x, odvod $f'(x)=2x$, $D(f')=\mathbb{R}$.

Definicija. Naj bo f na $[a,b]$. Pravimo: f je ZVEZNO ODVEDLJIVA na $[a,b]$, če je f odvedljiva na $[a,b]$ (t.j. odvedljiva v notranjih točkah - obstajajo odvodi, v levem krajišču obstaja desni odvod, v desnem krajišču levi odvod) in je $x\mapsto f'(x)$ zvezna na $[a,b]$

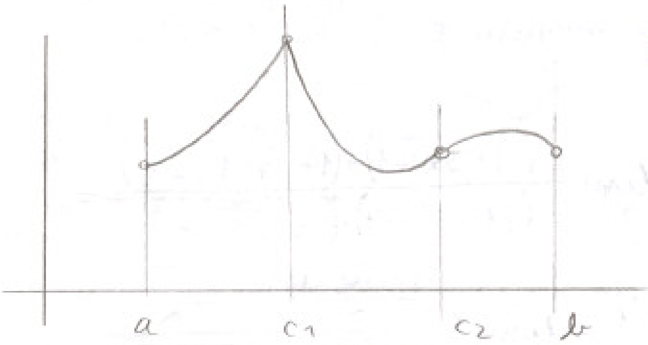
Opomba. Taka funkcija je seveda vedno zvezna na $[a,b]$ (t.j. že odvedljivost zadošča).

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ obstaja $\Rightarrow \lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a))=0 \Rightarrow$ zveznost

Definicija. Naj bo f definirana na $[a,b]$. Pravimo, da je ODSEKOMA ZVEZNO ODVEDLJIVA, če interval $[a,b]$ lahko zapišemo kot $[a,b]=[a_1,c_1]\cup\dots\cup[c_k,b]$ za končno mnogo $c_1,\dots,c_k$ in $a<c_1<\dots<c_k<b$ in je f odvedljiva na $[a,c_1],[c_1,c_2],\dots,[c_k,b]$ (v krajiščih vzamemo ustrezno levi ali desni odvod).

Opomba. Taka funkcija je vedno zvezna na $[a,b]$.

Primer.



Opomba. V vsaki točki (a,b) razen v $c_1,\dots,c_k$ obstaja odvod in je zvezen. V $c_1,\dots,c_k$ obstajata enostranska odvoda, ki pa nista enaka.

Opomba. Zvezno odvedljivi funkciji pravimo tudi GLADKA funkcija (graf je gladka krivulja). Analogno: odsekoma gladka funkcija.

PRAVILA ZA ODVAJANJE

Ker za limite funkcij veljajo ista pravila kot za limite zaporedij (vsota/razlika, produkt/kvocient), uporabimo to pri pravilih za odvajanje.

1. $f(x)=c$ $\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\underline{0}$

2. Če sta f in g odvedljivi v a so odvedljive v a tudi $f+g$, $f-g$, fg in

velja $(f-g)'(a) \ldots$

Če je dodatno še $g(a) \neq 0$, je tudi $\frac{f}{g}$ odvedljiva in je $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

<u>DOKAZ</u>. $\underline{(f+g)'(a)} = \lim\limits_{h\to 0}\big((f+g)(a+h) - (f+g)(a)\big)/h = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \underline{f'(a)+g'(a)}$$

Razliko in kvocient doma!

$$\underline{(fg)'(a)} = \lim_{h\to 0}\frac{fg(a+h)-fg(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} =$$

(12)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)\big(f(a+h)-f(a)\big)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(a)\big(g(a+h)-g(a)\big)}{h} = \underline{g(a)f'(a) + f(a)g'(a)}$$

<u>Posledica</u>. Če je f odvedljiva v a in λ konstanta, je λf odvedljiva v a in je $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

<u>Posledica</u>. Če so f_i odvedljive v a, je produkt $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$ odvedljiv v a in je $(f_1\cdots f_n)'(a) = f_1'(a)f_2(a)\cdots f_n(a) + f_2'(a)f_1(a)f_3(a)\cdots f_n(a) + \cdots +$
$+ f_1(a)f_2(a)\ldots f_{n-1}(a)f_n'(a)$.

Dokaz doma

3. Odvod kompozicije

<u>Izrek</u>. Naj bo f odvedljiva v a in g odvedljiva v $f(a)$. Tedaj je $g\circ f$ odvedljiva v a in je $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a)$

$o(h)$ … funkcija, definirana za majhne h, ki gre proti 0 hitreje kot h, t.j. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0$.

Kdaj je f odvedljiva v a? Ko $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ obstaja.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = 0 \iff \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h} = 0 \iff$$

$$o(h) = f(a+h) - f(a) - hf'(a) \iff f(a+h) - f(a) = hf'(a) + o(h).$$

Torej je f v a odvedljiva, kadar $\exists L$, da je $f(a+h) = f(a) + hL + o(h)$ $(L = f'(a))$.

Ker je f odvedljiva v a, je $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$, ker je g odvedljiva v $f(a)$, je $g(f(a)+k) = g(f(a)) + kg'(f(a)) + o(k)$. Sledi

$$g(f(a+h)) = g(f(a) + \underbrace{[f(a+h)-f(a)]}_{k}) = g(f(a)) + g'(f(a))\big(f(a+h)-f(a)\big) + o(k) =$$

$$= g(f(a)) + g'(f(a))\big(f'(a)h + o_1(h)\big) + o\big(f'(a)h + o_1(h)\big) = g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)h +$$

$$+ \underbrace{g'(f(a))o_1(h)}_{\tilde{o}(h)} + \underbrace{o\big(h(f'(a) + \underbrace{o_1(h)/h}_{\to 0})\big)}_{\substack{\to 0 \text{ hitreje kot } h \\ = \tilde{\tilde{o}}(h)}} \Rightarrow g(f(a+h)) = g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)h + \tilde{\tilde{o}}(h),$$

$\frac{g'(f(a))o_1(h)}{h} \to 0$

vsaj tako hitro kot $h \to 0$

torej je $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ ∎

Opomba. $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d(g\circ f)}{dx} = \frac{dg}{df}\cdot\frac{df}{dx}$ } simbolni zapis formule

19. 12. 2002

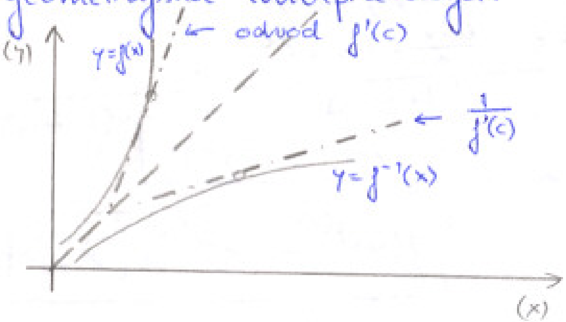
Trditev. $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ naj bo zvezna, strogo monotona funkcija, odvedljiva na (a,b) in velja $f'(c)\neq 0$ za nek $c\in(a,b)$. Tedaj je f^{-1} odvedljiva v točki $d=f(c)$ in velja
$f^{-1\,'}(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}$.

Dokaz. Recimo, da f strogo raste. Tedaj vemo, da je $f^{-1}:[f(a),f(b)]\to\mathbb{R}$ zvezna. Pišimo $x=f^{-1}(y)$. Velja: $\lim\limits_{y\to d} f^{-1}(y) = \lim\limits_{y\to d} x = \lim f^{-1}(d) = c$.

$$\lim_{y\to d}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(d)}{y-d} = \lim_{\substack{y\to d\\ x\to c}}\frac{x-c}{f(x)-f(c)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}} = \frac{1}{f'(c)}.\ \blacksquare$$

19. 12. 2002

Opomba. Geometrijska interpretacija.



Opomba. Če vemo, da je f^{-1} odvedljiva, formula za $(f^{-1})'(x)$ sledi iz pravila za posredno odvajanje.

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

2. ODVODI OSNOVNIH ELEMENTARNIH FUNKCIJ

(a) $f(x)\equiv c$

$f'(x)=0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = \underline{0}$$

(b) $f(x)=x^n$

$f'(x)=nx^{n-1}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)\left((x+h)^{n-1}+\dots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left((x+h)^{n-1}+\dots+x^{n-1}\right) = \underline{n x^{n-1}}$$

$$f(x)=x^0=1 \Rightarrow f'(x) = 0 = 0\cdot x^{-1}$$

$$f(x)=x^{-m} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -m x^{-m-1}$$

$$\Rightarrow \left(f(x) = x^k \Rightarrow f'(x) = kx^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \right)$$

(c) $f(x) = \sqrt[n]{x}$

$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$

$g(x) = x^n$ je strogo naraščajoča in odvedljiva na $(0,\infty)$ za sode in na $(-\infty,\infty)$ za lihe n

$g'(x) = n x^{n-1} \neq 0$ za $x \neq 0 \Rightarrow f$ je odvedljiva na $(0,\infty)$ oz. $(-\infty,\infty)\setminus\{0\}$, potem je

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \underline{\underline{\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}}}$$

$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m \Rightarrow f'(x) = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \underline{\underline{\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = x^q \Rightarrow f'(x) = q x^{q-1}, \ \forall q \in \mathbb{Q}}$$

(d) $f(x) = \log_a x$, $a > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \log_a \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{x} \log_a e}}$$

$a = e \Rightarrow f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$\boxed{f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

(e) $f(x) = e^x$ $\quad g(x) = \ln x$, $g: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ strogo naraščajoča, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (0,\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = f(x) = e^x$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

(f) $f(x) = a^x$ $\quad \ln(a^x) = x \ln a$, $a^x = e^{x \ln a}$

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = \underline{\underline{a^x \ln a}}$$

(g) $f(x) = \sin x$ $\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2} \sin\frac{h}{2}}{h} = \underline{\underline{\cos x}}$

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

(h) $f(x) = \arcsin x$ $\quad g(x) = \sin x$ je inverz na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\sin x$ je strogo naraščajoča $\Rightarrow$ f je odvedljiva na $(-1, 1)$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\quad g(x) = \operatorname{tg} x$ na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

(i) $f(x) = x^{\alpha}$, $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

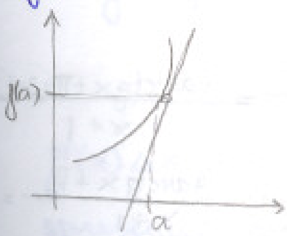
(j) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+a})$

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2}(x^2+a)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}}}$$

3. DIFERENCIAL

7. 1. 2003

Funkcijo $y = f(x)$ bi radi v okolici točke a aproksimirali z linearno funkcijo $l(x) = \alpha x + \beta$.



Najprej mora biti $l(a) = f(a)$, torej bo funkcija l oblike $l(x) = A(x-a) + f(a)$. Torej želimo, da bi bilo $f(x) \approx A(x-a) + f(a)$ in to tako, da bo aproksimacija kar najboljša.

$f(x) - f(a) \approx A(x-a)$, A izberemo tako, da gre razlika $f(x) - f(a) - A(x-a)$ proti 0 hitreje kot $x-a$. Torej mora biti

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{x-a} = 0 .$$

To pomeni: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - A = 0$ oz. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$. Če je A tako izbran, gre $f(x) - f(a) - A(x-a)$ hitreje proti 0 kot $(x-a)$.

<u>Definicija</u>. Naj bo f funkcija, definirana v okolici $a \in \mathbb{R}$. f je DIFERENCIABILNA v okolici a, če obstaja $A \in \mathbb{R}$, da je linearna funkcija $h \mapsto Ah$ dobra aproksimacija za $h \mapsto f(a+h) - f(a)$, t.j.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{h} = 0 .$$

Linearno funkcijo $h \mapsto Ah$ v tem primeru imenujemo DIFERENCIAL funkcije f v točki a in označimo z $(df)(a) = df(a)$.

Torej: $df(a)(h) = Ah$.

Opomba. Geometrično pričakujemo, da bo A enak naklonskemu koeficientu tangente na graf f v točki $(a, f(a))$.

Izrek. Funkcija f, definirana v okolici točke a je diferenciabilna v a natanko tedaj, ko je odvedljiva v a. Njen diferencial je $df(a)(h) = f'(a) \cdot h$.

DOKAZ. $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{h} = 0$, torej je f diferenciabilna v $a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A \Leftrightarrow A = f'(a). \ \blacksquare$$

Opomba. f je diferenciabilna v a $\Leftrightarrow$ f je odvedljiva v a.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{(x-a)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} = A = f'(a)$$

Opomba. Kako pridemo do diferenciala klasično (v fiziki, tehniki)? Naj bo f odvedljiva v x. Tedaj je $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f'(x) \to 0$ pri $\Delta x \to 0$, torej: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \eta(\Delta x)$ $\eta\Delta x \to 0$ pri $\Delta x \to 0$.

Torej: $$f(x+\Delta x) - f(x) = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\substack{\text{pri } \Delta x \to 0 \\ \text{gre} \to 0 \text{ tako hitro} \\ \text{kot } \Delta x}} + \underbrace{\eta(\Delta x)\Delta x}_{\substack{\text{pri } \Delta x \to 0 \text{ gre} \to 0 \text{ hitreje} \\ \text{kot } \Delta x, \text{ saj gre } \eta(\Delta x) \to 0}}$$

$f'(x)\Delta x$ je torej glavni del spremembe funkcije f, ko se x spremeni z x za Δx. Klasično ta glavni del spremembe imenujemo diferencial f v točki x ob spremembi Δx.

$$df = f'(x)\Delta x.$$

Če je $\varphi(x) = x$, je $\varphi'(x) \equiv 1$ in $df = 1 \cdot \Delta x$, torej: $dx = \Delta x$.

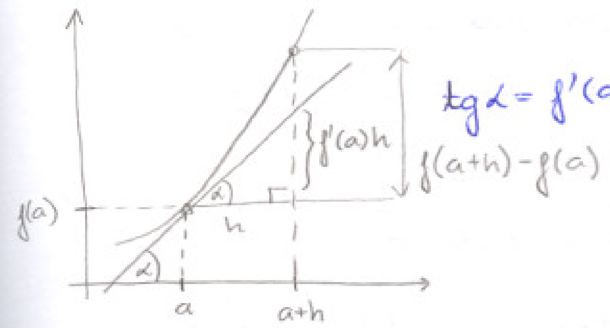
Sprememba neodvisne spremenljivke je kar enaka njegovemu diferencialu. (dx = sprememba neod. spremenljivke = diferencial neod. spr. $\Rightarrow$ na diferencial gledamo kot na količino; df = diferencial funkcije = glavni del spremembe $f(x+dx)-f(x)$).

Opomba. Če je f odvedljiva v točki a, je torej klasično $df(a) = f'(a)dx$, kjer je dx sprememba neodvisne spremenljivke.

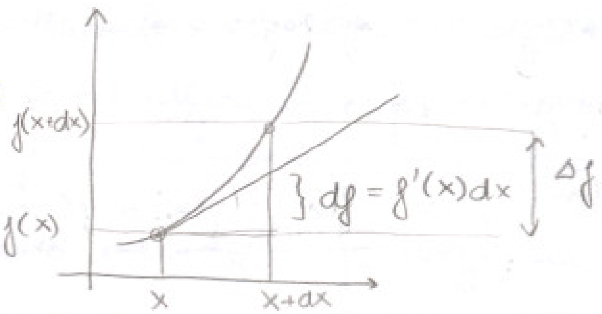
$$f(a+dx) - f(a) \approx f'(a)dx.$$

Sodobno: df je linearna preslikava $h \mapsto f'(a)h$, ki najbolje aproksimira $f(a+h)-f(a)$.

<u>Geometrijski pomen.</u>



$tg\,\alpha = f'(a)$



<u>Praktični pomen</u>: približno računanje vrednosti funkcije v bližnji točki: $f(a+h)-f(a) \approx f'(a)h$, oz. $f(a+h) = f(a)+f'(a)h$. $f(x+dx) \approx f(x)+f'(x)dx$. Diferencial funkcije je približno enak spremembi funkcije.

<u>Primer 1.</u> Z uporabo diferenciala brez množenja približno izračunaj $2{,}00001^2$.

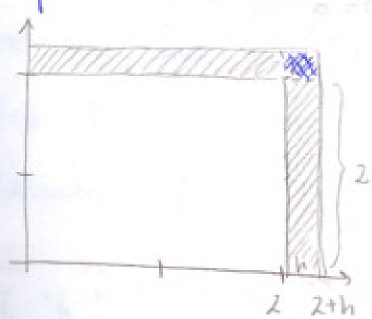
$2^2 = 4$, $2{,}00001^2 = (2+0{,}00001)^2$, $f(x)=x^2$, $a=2$, $h=0{,}00001$

$f(a+h) - f(a) \approx f'(a)h$, $f(a+h) \approx f(a)+f'(a)h$

$f'(x) = 2x$, $f'(a) = 4$

$\Rightarrow (2+0{,}00001)^2 = 4+4\cdot 0{,}00001 = 4+0{,}00004 = \underline{4{,}00004}$

<u>Opomba.</u> Napravimo lahko sliko:



$(2+h)^2 \approx 2^2+4\cdot h$

4. VIŠJI ODVODI

Naj bo f odvedljiva na I. Tedaj je f' funkcija, definirana na I. Če je f' spet odvedljiva, njen odvod imenujemo drugi odvod funkcije f na I in označimo $f'' = (f')'$. Višje odvode (če obstajajo) definiramo induktivno: $f^{(n)}$ je n-ti odvod, potem je $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$.

<u>Primer.</u> $f(x) = x^n$; $f'(x) = nx^{n-1}$; $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \ldots$

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x, \ldots$

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x, \ldots$

__Opomba.__ I naj bo odprt interval.

$C^0(I)$ ... zvezne funkcije na I

$C^1(I)$ ... zvezno odvedljive (=so odvedljive in odvod je zvezen)

$C^2(I)$ ... 2-krat zvezno odvedljive (= so 2-krat odvedljive in drugi odvod je zvezen – prvi je avtomatično)

$C^r(I)$ ... r-krat zvezno odvedljive funkcije na I

$C^\infty(I) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C^r(I)$ ... funkcije, ki imajo odvode vseh redov na I (neskončnokrat odvedljive)

Množice $C^r(I)$ so linearni prostori, saj je vsota odvedljivih funkcij odvedljiva in produkt odvedljive funkcije s številom spet odvedljiva.

$$f, g \in C^r(I) \Rightarrow f+g \in C^r(I) \text{ in } \lambda f \in C^r(I), \lambda \in \mathbb{R}$$

$D: f \mapsto f'$ je linearna preslikava

$$(f+g)' = f'+g' \text{ in } (\lambda f)' = \lambda f'$$
$$\Updownarrow$$
$$D(f+g) = Df + Dg \text{ in } D(\lambda f) = \lambda Df$$

Na $C^1(I)$ lahko definiramo D, na $C^2(I)$ $D \circ D = D^2$ (drugi odvod), na $C^k(I)$ D^k. Na $C^\infty(I)$ lahko definiramo D^n za $\forall n$. Vsi D^k so linearne preslikave.

Oznaka: $f^{(n)} = D^n f = \frac{d^n f}{dx^n} \left(= \left(\frac{d}{dx}\right)^n f\right)$.

5. ROLLE-ov IN LAGRANGE-ov IZREK

__Izrek.__ Naj bo f definirana v okolici točke a in odvedljiva v a. Če je $f'(a) > 0$, tedaj f v točki a narašča, t.j. obstaja $\sigma > 0$, da je $f(x) < f(a)$ za $a-\sigma < x < a$ in $f(x) > f(a)$ za $a < x < a+\sigma$. Če je $f'(a) < 0$, tedaj f v a pada, t.j. $\exists \sigma > 0$, da je $f(x) > f(a)$ za $a-\sigma < x < a$ in $f(x) < f(a)$ za $a < x < a+\sigma$.

__DOKAZ.__ Naj bo $f'(a) > 0$. Velja: $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ker je $f'(a) > 0$, obstaja $\varepsilon > 0$, da je $f'(a) - \varepsilon > 0$. Potem $\exists \sigma > 0$ (def. limite), da je $|(f(a+h)-f(a))/h - f'(a)| < \varepsilon$ za vsh, $-\sigma < h < \sigma$. Torej je $f'(a) - \varepsilon < \frac{f(a+h)-f(a)}{h} < f'(a) + \varepsilon$ za vse h med $-\sigma$ in σ.

Sledi: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$ če je $|h| < \sigma$ $(h \neq 0)$. Naprej je za $h > 0$

$f(a+h)-f(a)>0$, t.j. $f(a)<f(a+h)$. Če je $h<0$, je $f(a+h)-f(a)<0$, t.j. $f(a+h)<f(a)$. ■ Doma: $f'(a)<0 \Rightarrow f$ pada v a.

<u>Opomba</u>. $f'(a)>0$ še ne pomeni, da obstaja kakšna okolica od a v kateri f strogo narašča.

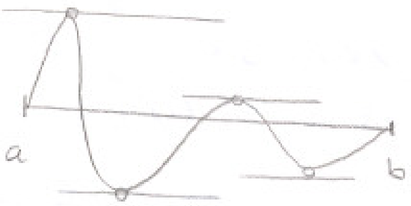
09.01.2003

<u>Lagrangeov izrek</u>. Naj bo f zvezna funkcija na $[a,b]$, ki je odvedljiva na (a,b). Tedaj obstaja ξ; $a<\xi<b$, da je $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$.

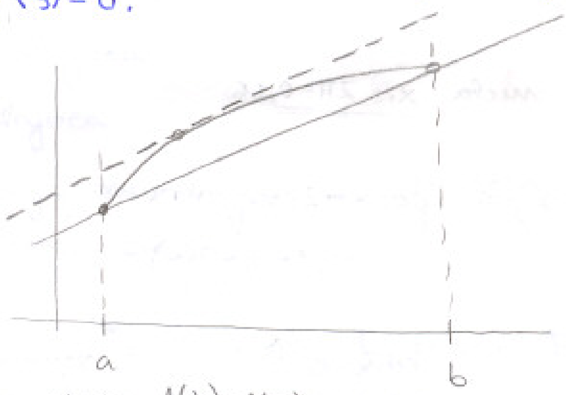
(J. L. LAGRANGE, 1736-1813)

<u>Rolleov izrek</u>. Naj bo f zvezna funkcija na $[a,b]$, ki je odvedljiva na (a,b) in naj velja: $f(a)=f(b)=0$. Tedaj obstaja ξ, $a<\xi<b$, da je $f'(\xi)=0$.

(M. ROLLE, 1652, 1719)



Geometrijsko: obstoj vodoravne tangente



$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ je smerni koeficient premice skozi $(a,f(a))$ in $(b,f(b))$

Geometrijsko: obstoj tangente, vzporedne s sekanto

<u>DOKAZ</u>. (Rolle-ov izrek)

Ker je f zvezna na $[a,b]$, doseže svoj minimum v neki točki $x_m \in [a,b]$ in svoj maksimum $x_M \in [a,b]$.

(i) Če je $f(x_m)=f(x_M)$, je funkcija konstantna in je ξ poljuben, saj je $f'(x)=0$ za $\forall x \in (a,b)$.

(ii) Če je $f(x_m)<f(x_M)$, potem je vsaj eden od teh različen od 0. BŠZS naj bo $f(x_M)\neq 0$. Tedaj postavimo $\xi = x_M$ in je $\xi \in (a,b)$. Po izreku mora biti $f'(\xi)=0$. ← Če je >0, so D vrednosti nednah, →, če je <0, so L vrednosti ned., ←

Podobno, če je $f(x_m)=0$. ■

DOKAZ. (Lagrangeov izrek)

Naj bo $F(x) = f(x) - f(a) + A(x-a)$. Ta je zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). $F(a) = 0$.

Določimo A, da je $F(b) = 0$. $F(b) = f(b) - f(a) + A(b-a)$.

$A = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Funkcija F zadošča pogojem Rollejevega izreka, torej obstaja ξ, da je $\xi \in (a,b)$ in $F'(\xi) = 0$.

Potem je

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 = F'(\xi)$$ ← odvajamo $F(\xi)$

$$\Rightarrow \quad f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a). \quad \blacksquare$$

Opomba. Pri pogojih izreka velja tudi $f(a) - f(b) = (a-b) f'(\xi)$.

Alternativno: $f(x+h) - f(x) = h f'(x + \Theta h)$, kjer je $\Theta \in (0,1)$.

Posledica. Naj bo f odvedljiva na I. Tedaj:

(1) $f'(x) \geq 0$ za $\forall x \Leftrightarrow f$ je naraščajoča

(2) $f'(x) \leq 0$ za $\forall x \Leftrightarrow f$ je padajoča

(3) $f'(x) > 0$ za $\forall x \Rightarrow f$ je strogo naraščajoča ← $\Leftarrow$ ne velja (npr. $f(x) = x^3$)

(4) $f'(x) < 0$ za $\forall x \Rightarrow f$ je strogo padajoča

DOKAZ. (1) $\Rightarrow$ Naj bo $f'(x) \geq 0$ za $\forall x \in I$ in $a, b \in I$, $a < b$. Po Lagrangeovem izreku je $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, $\xi \in (a,b)$.

Potem je $f(b) \geq f(a)$ za $b > a$. f je naraščajoča.

$\Leftarrow$ $\forall x \in I, h \ni: x+h \in I$ je $(f(x+h) - f(x))/h \geq 0$. Od tu $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \geq 0$.

Podobno dokažemo (2).

(3) Po Lagrangeu: $a, b \in I, a < b$ $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) > 0$,

$\Rightarrow f(b) - f(a) > 0$ za $b > a \Rightarrow$ je strogo naraščajoča.

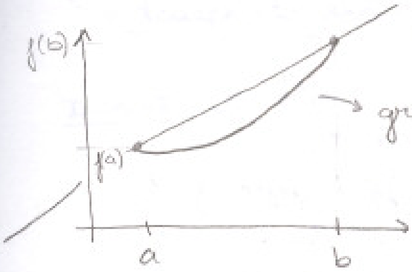
Podobno (4). $\blacksquare$

Posledica. Naj bo f odvedljiva na intervalu I in odvod $f'(x) = 0$. Tedaj je f konstantna.

DOKAZ. Sledi iz (1) in (2). $\blacksquare$

Definicija. Naj bo f funkcija, definirana na I. Pravimo, da je f (od spodaj) KONVEKSNA na I, če za vsaka $a, b \in I$, $a < b$ velja

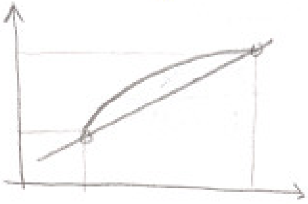
$$f(x) \le \underbrace{f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}_{\substack{\text{pr. skozi} \\ (a,\,f(a)) \text{ in } (b,\,f(b))}}, \quad \forall x \in [a,b].$$



→ graf f ne leži nikjer nad premico skozi $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$

KONVEKSNA FUNKCIJA

<u>Definicija</u>. Naj bo f funkcija, definirana na I. Pravimo, da je f (od spodaj) KONKAVNA na I, če za $\forall a, b \in I$, $a<b$ velja



$$f(x) \ge f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \quad \forall x \in [a,b]$$

KONKAVNA FUNKCIJA

<u>Opombe</u>. (1) Alternativno: $f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cancel{(x-b+b-a)} =$

$$= f(b) + \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-b). \quad \text{simetrično!}$$

(2) Pogoj za konveksnost lahko zapišemo kot

$$f((1-t)a + tb) \le (1-t)f(a) + tf(b).$$

<u>Izpeljava</u>. $f(x) \le f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

→ konveksna kombinacija

$x = (1-t)a + tb$ za $x \in [a,b]$

$t = \frac{x-a}{b-a} \qquad 1-t = \frac{b-a-x+a}{b-a} = \frac{b-x}{b-a}$

$$f((1-t)a+tb) \le f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{1}\cdot t =$$

$$= f(a) + tf(b) - tf(a) = (1-t)f(a) + tf(b).$$

(3) Pogoj za konkavnost:

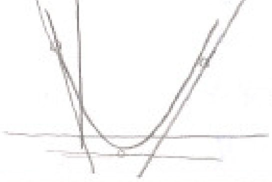
$$f((1-t)a+tb) \ge (1-t)f(a) + tf(b), \quad t \in [0,1].$$

<u>Izrek</u>. Če je f odvedljiva na intervalu I, je f konveksna na I natanko takrat, ko za vsaka a in x iz I velja

$$f(x) \ge f(a) + f'(a)(x-a) \text{ in}$$

je konkavna natanko takrat, ko za $\forall a, x \in I$ velja:

$$f(x) \le f(a) + f'(a)(x-a).$$



→ graf ne leži pod tangento

⇒ tu se vidi – pri odvod narašča ⇒ 2. je >0

Opomba. Prvi pogoj geometrično pomeni, da $\Gamma(f)$ in nikjer pod tangento na $\Gamma(f)$.

DOKAZ. (1) Naj bo f konveksna na I in $a, x \in I$. Če je $a = x$, je neenakost izpolnjena.

Naj bo $x \neq a$ in y točka med a in x.

$$f(y) \le f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(y-a).$$

Tedaj je $\frac{f(y)-f(a)}{y-a}(x-a) \le f(x)-f(a)$. y med x in a $\Rightarrow \frac{y-a}{x-a} > 0$

Torej je $y \to a$ in $(x-a)f'(a) + f(a) \le f(x)$.

Obrat. Naj bosta $a, b \in I$, x točka med a in b in je

$$\left.\begin{aligned} f(a) &\ge f(x) + f'(x)(a-x) \text{ in} \quad /\cdot(1-t) \\ f(b) &\ge f(x) + f'(x)(b-x). \quad /\cdot t \end{aligned}\right\} +$$

Pišimo $x = (1-t)a + tb$.

$$(1-t)f(a) \ge (1-t)f(x) + (1-t)f'(x)(a-x)$$

$$t f(b) \ge (t)f(x) + t f'(x)(b-x)$$

$$(1-t)f(a) + t f(b) \ge f(x) + f'(x)(t(a-b))(1-t) + f'(x)(1-t)t(a-b)$$

$$f(x) \le (1-t)f(a) + t f(b)$$

$$f((1-t)a + tb) \le (1-t)f(a) + t f(b). \blacksquare$$

Izrek. Če je f dvakrat odvedljiva na I, potem je f konveksna natanko takrat, ko je $f''(x) \ge 0$ za $\forall x \in I$ in konkavna natanko takrat, ko je $f''(x) \le 0$ za $\forall x \in I$.

14. 1. 2003

DOKAZ. (Za konveksnost)

(i) f naj bo konveksna na I. Izberemo $x \in I$ in $x+h \in I, h \neq 0$.

Po Lagrange-ovem izreku velja $\exists \xi \in (0,1)$: $f(x+h) - f(x) = f'(x+\xi h)h$.

Ker je f konveksna, je po prejšnjem izreku

$$h f'(x+\xi h) = f(x+h) - f(x) > h f'(x) \text{ in}$$

delimo z ξh^2:

$$\frac{f'(x+\xi h) - f'(x)}{\xi h} > 0.$$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(x+\xi h) - f'(x)}{\xi h} \ge 0$ in je enaka $f''(x)$, torej $f''(x) \ge 0$.

(ii) Naj bo $f''(x) \ge 0$. Izberemo $a, b \in I$, $t \in [0,1]$. Naj bo $x = (1-t)a + tb$. Naj bo $h = b - a$, potem je $a = x - th$, $b = x + (1-t)h$.

Po Lagrange-ovem izreku dobimo:

$$f(a) - f(x) = f(x-th) - f(x) = f'(x - \vartheta_1 th)(-th), \ \vartheta_1 \in (0,1)$$

$$f(b)-f(x)=f(x+(1-t)h)-f(x)=f(x+\vartheta_2(1-t)h)(1-th)\,,\quad \vartheta_2\in(0,1)$$

Pomnožimo enačbi zaporedoma z $(1-t)$ in t in seštejemo.

$$\underline{\underline{(1-t)f(a)+tf(b)-f((1-t)a+tb)}}=(1-t)t\left(hf'(x+\vartheta_2(1-t)h)-hf'(x-\vartheta_1 th)\right)=$$

$$=\underbrace{(1-t)t\cdot h}_{\geq 0}\left(f'(x+\vartheta_2(1-t)h)-f'(x+\vartheta\;th\right)=h(1-t)t * f''(\xi)(\vartheta_2(1-t)h+\vartheta_1 th)=$$

$$=\underbrace{h^2(1-t)t}_{\geq 0}\underbrace{f''(\xi)}_{\geq 0\text{ (po predp.)}}(\vartheta_2\underbrace{(1-t)+\vartheta_1 th}_{\geq 0})\ \underline{\underline{\geq 0}}$$

Potem je f konveksna. ∎

<u>Definicija</u>. Naj bo f definirana na I. Pravimo, da ima graf Γf <u>prevoj</u> v točki $(a,f(a))$, če $\exists\, r>0$, da je f konveksna na $(a-r,a)$ in konkavna na $(a,a+r)$ ali pa obratno.

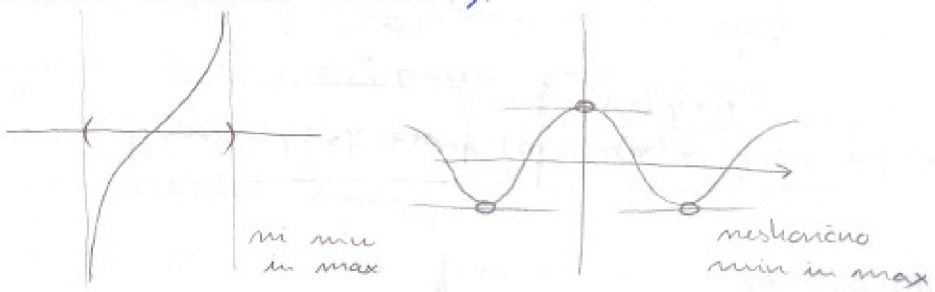
<u>Posledica</u>. Če je funkcija f dvakrat odvedljiva na I in ima graf funkcije f prevoj v točki $(a,f(a))$, potem je $f''(a)=0$. Obratno: če je $f''(a)=0$ in f'' pri prehodu skozi a spremeni predznak, potem je v a prevoj.

6. EKSTREMI FUNKCIJ

Ekstrem je skupno ime za maksimum in minimum.

<u>Definicija</u>. Naj bo f definirana na D. Potem ima f v $a\in D$ maksimum (globalni ~), če je $f(x)\leq f(a)$ za vsak $x\in D$. f ima v $b\in D$ minimum (globalni ~), če je $f(x)\geq f(b)$ za vsak $x\in D$.

<u>Opomba</u>. Ni nujno, da ima funkcija maksimum in minimum in če obstaja, to ni nujno v eni sami točki (lahko ga doseže v večih točkah).



<u>Definicija</u>. Funkcija $f: D\to\mathbb{R}$ ima v točki $a\in D$ lokalni maksimum, če obstaja okolica U a v D, da ima zožitev $f|_U$ maksimum v a. Drugače: $\exists\,\delta>0$ da je $f(x)\leq f(a)$ za vse $x\in D$, $|x-a|<\delta$. Podobno definiramo še lokalni minimum.