Zakaj? $\sum |a_n|$ konvergira $|a_n \underbrace{\sin nx}_{\leq 1}| \leq |a_n||\sin nx| \leq a_n$ za vse $x \in \mathbb{R}$ in ker $\sum a_n$ konvergira, iz izreka sledi enak. konvergenca $\sum a_n \sin nx$ na $\mathbb{R}$. Podobno za drugo.

15. 04. 2003

8. INTEGRIRANJE IN ODVAJANJE FUNKCIJSKIH VRST

Izrek. Naj bodo u_n zvezne funkcije na $[a, b]$ in naj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergira enakomerno na $[a, b]$ k funkciji f. Tedaj je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b u_n(x)\,dx \right].$$

Pravimo, da je tedaj vrsto mogoče členoma integrirati.

DOKAZ. Naj bodo $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$. Zaradi enakomerne konvergence za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, da je $|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$ in vse $x \in [a, b]$. Torej je

zvezna, ker so u_n zvezne

$$\left| \int_a^b s_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (s_n(x) - f(x))\,dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |s_n(x) - f(x)|\,dx \overset{n \geq n_0}{\leq} \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a).$$ Potem zaporedje števil $\int_a^b s_n(x)\,dx$ konvergira k $\int_a^b f(x)\,dx$.

$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, torej $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx =$

$= \sum_{=1}^{n} \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_i(x)\,dx.$

To pomeni, da $\int_a^b a_1(x)\,dx + \dots$ konvergira in njena vsota je $\int_a^{b'} f(x)\,dx$. ∎

Izrek 2. Naj bodo funkcije u_n zvezno odvedljive na $[a, b]$. Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergira na $[a, b]$ k funkciji $f(x)$ in če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ enakomerno konvergira na $[a, b]$, tedaj je f odvedljiva funkcija in je $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ $(a \leq x \leq b)$. Temu pravimo člensko odvajanje.

DOKAZ. Naj bo $f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$. Ker so u_n' vse zvezne in vrsta konvergira enakomerno, je f^* zvezna funkcija na $[a,b]$. Naj bo $x \in [a,b]$, fiksirajmo x in členoma integriramo na $[a,x]$ (prejšnji izrek).

$$\int_a^x f^*(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n(x) - u_n(a)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a).$$ Torej je

$$\int_a^x f^*(t)\,dt = f(x) - f(a) \quad \text{za vse } x,\ a \le x \le b.$$

f^* je zvezna, zato je $\frac{d}{dx}\int_a^x f^*(t)\,dt = f^*(x)$, torej je

$$f'(x) = f^*(x) \quad \text{za vse } x,\ a \le x \le b.$$

Potem je $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, za vse x, $a \le x \le b$. ■

Oba izreka lahko formuliramo tudi za zaporedja.

Izrek. Naj bodo f_n zvezne na $[a,b]$ in naj zaporedje f_n konvergira k f enakomerno na $[a,b]$. Tedaj je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Izrek. Naj bodo f_n zvezno odvedljive na $[a,b]$ in naj f_n konvergira k f na $[a,b]$ in naj f_n' konvergira enakomerno na $[a,b]$. Tedaj je f odvedljiva na $[a,b]$ in je $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ $(a \le x \le b)$.

Dokaz doma.

9. POTENČNE VRSTE

Potenčna vrsta je vrsta oblike

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots, \qquad (*)$$

kjer so $a_0, \dots, a_n, \dots$ števila in x_0 število.

Primer. $1 + x + x^2 + \dots$

$1 + (x-2) + (x-2)^2 + \dots$

Poseben primer. $x_0 = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 x + \dots$

Študij (*) se prevede na poseben primer, če $x - x_0$ nadomestimo z x. Zato obravnavamo le vrste oblike

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (**).$$

<u>Primer.</u>
- $1 + x + x^2 + \dots$ konvergira, če je $|x| < 1$ in divergira za $|x| \geq 1$.
- Vrsta $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ konvergira za vse $x \in \mathbb{R}$.
- Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ konvergira samo za $x = 0$. Če je namreč $x \neq 0$, je $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) x = +\infty$, torej $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ divergira.

<u>Izrek.</u> Naj bo dana potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Obstaja $R \in [0, \infty]$ z lastnostjo:

(a) Vrsta konvergira absolutno za $\forall x, |x| < R$.

(b) Vrsta divergira za $\forall x, |x| > R$.

(c) Če je $0 < r < R$, tedaj vrsta konvergira enakomerno na $[-r, r]$.

<u>Opomba.</u> Izrek pove, da je konvergenčno območje potenčne vrste interval. Na vsakem zaprtem intervalu, ki leži v notranjosti konv. intervala, vrsta konvergira enakomerno.

<u>DOKAZ.</u> Naj vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (*) konvergira pri $x = x_0 \neq 0$. Naj bo $0 < r < |x_0|$. Pokažemo, da (*) konvergira absolutno in enakomerno na $[-r, r]$.

Ker vrsta konvergira pri x_0, je $\lim_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0$ (t.j. potrebni pogoj za konvergenco). Gotovo obstaja $M < \infty$, da je $|a_n x_0^n| < M$ za vse n, torej $|a_n| |x_0|^n < M$.

Če je $x \in [-r, r]$, je $|x| \le r$ in zato $|a_n x^n| \le |a_n| r^n =$
$$= |a_n| \frac{r^n}{|x_0|^n} \cdot |x_0|^n = |a_n||x_0|^n \cdot \underbrace{\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n}_{= q < 1} \le M q^n \quad \text{za } \forall n.$$

Torej je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ za vse $x, -r \le x \le r$ majorizirana s številsko vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} M q^n$, ki pa konvergira, saj je $q < 1$.

Torej vrsta $(*)$ absolutno konvergira za vse $x, -r \le x \le r$ in po Weierstrassovem M-testu vrsta $(*)$ enakomerno konvergira na $[-r, r]$.

Ker je r, $r < |x_0|$ poljuben, kar pomeni, da če vrsta konvergira pri x_0, konvergira absolutno za $x, -|x_0| < x < |x_0|$.

Naj bo $R = \sup\{|x_0|;$ vrsta konv. pri $x = x_0\}$. Tedaj ima R vse zahtevane lastnosti. ■

Posledica. Vsota konvergentne potenčne vrste s konvergenčnim radijem $R > 0$, je zvezna funkcija na $(-R, R)$.

enakom. konverg. ⇒ je zvezna

r poljubno blizu R ⇒ tudi zvezna na $(-R, R)$

Izrek. Za konvergenčni radij R potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ velja:

(a) $R = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, če ta limita obstaja

(b) $R = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|a_n|}}$, če ta limita obstaja.

DOKAZ. Naj bo $\rho = \lim_{n = \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Po kvocient. kriteriju:
$$\left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| \to \frac{1}{\rho} \cdot |x|.$$

Vemo: če je $\frac{1}{\rho}|x| < 1$, vrsta konvergira, če je $\frac{1}{\rho}(x) > 1$, divergira. T.j., če je $|x| < \rho$ konvergira, $x > \rho$ divergira. Podobno s korenskim kriterijem za (b). Doma!

Izrek. (Formula za izračun konvergenčnega polmera - Cauchy-Hadamard (1865-1935)) Za konvergenčni radij R potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ velja:
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

DOKAZ. Naj bo $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. $L=0, L=\infty$ premisli doma

- Naj bo $0 < L < \infty$. Naj bo $|x| < \frac{1}{L}$.

Ker je $\frac{1}{|x|} > L$, je $\frac{1}{|x|} > L+\varepsilon$ za nek $\varepsilon > 0$.

Ker je L največje stekališče, je le končno mnogo števil $\sqrt[n]{|a_n|}$ večjih od $L+\varepsilon$. Torej za vse člene $\sqrt[n]{|a_n|}$ od nekega naprej velja:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq L+\varepsilon.$$

Torej uporabimo korenski kriterij za vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|\cdot|x|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x| \leq \underbrace{(L+\varepsilon)|x|}_{<1} < 1$

za vse $n \geq n_0$. Torej $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira.

- Naj bo $|x| > \frac{1}{L}$. Tedaj je $\frac{1}{|x|} < L$, torej $\frac{1}{|x|} < L-\varepsilon$, za nek $\varepsilon > 0$. Ker je L stekališče, za neskončno mnogo n-jev velja

$$\sqrt[n]{|a_n|} > L-\varepsilon,$$

torej $|a_n x^n| > (L-\varepsilon)^n |x|^n \overset{*}{>} 1$ za neskončno n,

zato ne more biti

$$\lim_{n\to\infty} a_n x^n = 0,$$

kar je potreben pogoj za konvergenco. Vrsta torej divergira. ∎

17.4.2003

__Izrek.__ Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tedaj na $(-R,R)$ vrsto lahko členoma integriramo. V posebnem primeru je

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

in vrsto lahko členoma odvajamo, t.j.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

DOKAZ. Za integriranje sledi trditev iz dejstva, da za $\forall r$, $0 < r < R$ vrsta enakomerno konvergira na $[-r, r]$. Oglejmo si vrsto iz odvodov $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Naj bo

$|x| < r < R$.

Ker vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira na $(-r, r)$, že vemo, da konvergira absolutno, zato $|a_n r^n| = |a_n| r^n \to 0$, pri $n \to \infty$ (potrebni pogoj za konvergenco).

Zato je $|a_n| r^n < M$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

Potem je $n |a_n| |x|^{n-1} = n |a_n| r^n \left(\frac{|x|}{r}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{r} \leq \frac{M}{r} n \left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}$.

Uporabimo kvocientni kriterij, da pokažemo konvergenco $\sum n \left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}$: $\frac{n+1}{n} \underbrace{\frac{x}{r}}_{<1} \xrightarrow{n \to \infty} \left|\frac{x}{r}\right| < 1$.

Ker $\sum n \left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}$ konvergira, konvergira tudi $\sum \frac{M}{r} n \left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}$, ki pa je majoranta za $\sum n |a_n| x^{n-1}$, torej vrsta iz odvodov $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ konvergira.

Sklep: za $\forall x, -R < x < R$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, torej je konvergenčni radij vrste iz odvodov vsaj R. Večji od R ne more biti, saj bi tedaj prišli s člensko integracijo do protislovja (prvotna vrsta bi morala konvergirati na večjem intervalu).

Ker $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ konvergira na $(-R, R)$, enakomerno konvergira na $[-r, r]$ za $\forall r, 0 < r < R$. Torej lahko po izreku $\sum a_n x^n$ členoma odvajamo. ⊛

Opomba. Videli smo, da je konvergenčni polmer $\sum n a_n x^{n-1}$ enak R od $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$.

Posledica. Če je $f(x)$ na $(-r, r)$ vsota konvergentne potenčne vrste $\sum a_n x^n$, je f na $(-R, R)$ mogoče poljubno mnogokrat odvajati. Torej je $f \in \mathcal{C}^{\infty}$.

Primer: Izračunaj vsoto $x + x^2/2 + x^3/3 + \dots$. Za katere x konvergira?

$$\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = x \frac{n}{n+1} \to x \Rightarrow \text{za } |x| < 1 \text{ konvergira}, |x| > 1 \Rightarrow \text{diverg.}$$

$f(x) = x + x^2/2 + x^3/3 + \cdots$, $f'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

$$f(x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) + c$$

Zač. pog.: $x=0$ $f(0)=0 \Rightarrow -\ln(1)+c=0 \Rightarrow \underline{c=0}$

$$\underline{f(x) = -\ln(1-x)}$$

VII. TAYLOR-jeva FORMULA, TAYLOR-jeva VRSTA

(B. Taylor 1685 – 1731)

1. TAYLOR-jeva FORMULA

Naj bo $P(x)$ polinom $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$.

Kako bi vrednost $P(a+h)$ izrazili s potencami h in z vrednostmi $p(a), p'(a), \dots$?

$$P(a+h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \dots + A_n h^n.$$

$$\boxed{A_0 = P(A)} \quad (h=0)$$

$$P'(a+h) = A_1 + 2A_2 h + \dots + nA_n h^{n-1}, \text{ spet } h=0$$

$$\boxed{A_1 = P'(A)}$$

$$P''(a+h) = 2A_2 + 3\cdot 2\cdot A_3 h + \dots + n(n-1)A_n h^{n-2}, \quad h=0$$

$$\boxed{A_2 = \frac{P''(a)}{2}}$$

$$\boxed{A_3 = \frac{P'''(a)}{3!}} \quad \dots \quad \boxed{A_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}}$$

$$\boxed{P(a+h) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}h + \frac{P''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}h^n}$$

za vsak h in polinom st. n.

__Definicija.__ Naj bo f n-krat odvedljiva v okolici točke a. Polinom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

imenujemo n-ti Taylorjev polinom (n-krat odvedljive) funkcije f pri a.

__Ideja.__ Za približni izračun funkcije v bližnjih točkah.

Zanima nas $f(x) - T_n(x) = R_n(x)$.

Taylorjev izrek. Naj bo f $(n+1)$-krat odvedljiva na I, ki vsebuje a (I odprt interval).
Tedaj za vsak $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\forall x \in I$ in $\forall p \in \mathbb{N}$ obstaja ξ med a in x, da je

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)/pn! \cdot (x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1},$$

oz. (če je $h = x-a$ $\frac{\xi - a}{h} = \vartheta \in (0,1)$)

$$R_n(a+h) = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{pn!} h^{n+1} (1-\vartheta)^{n-p+1}.$$

Posebej. $p = 1$ $R_n(a+h) = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{n!} h^{n+1} (1-\vartheta)^n$

$p = n+1$ $R_n(a+h) = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1}$.

Posledica. (Taylorjeva formula) Če je f $(n+1)$-krat odvedljiva na I, ki vsebuje a, za $\forall x \in I$ $\exists \xi$ med a in x, da je

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

oz. če je $x = a+h$, ξ med $a, a+h$, $\xi = a + \vartheta h$, $0 < \vartheta < 1$

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.}$$

Opomba. Če je $n = 0$, je $f(x) = f(a) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-a)$, t.j. $(f(x) - f(a))/(x-a) = f'(\xi)$.

... od zgoraj

$T_n(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$. Radi bi videli $f(b) - T_n(b) = R_n(b)$.

DOKAZ. Fiksiramo $b \in I$, $n \in \{0, 1, \ldots\}$, $p \in \mathbb{N}$

$$F(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p R_n(b).$$

$F(a) = T_n(b) + R_n(b) = f(b)$.

$F(b) = f(b)$

Jasno je F odvedljiva na I (saj je f $(n+1)$-krat odvedljiva).

Po Lagrangeovem izreku obstaja ξ med a in b, da je $F'(\xi) = 0$.

Izračunajmo: $F'(x) = f'(x) - f'(x) + \frac{b-x}{1!} f''(x) - \frac{b-x}{1!} f''(x) + \dots +$

$$+ \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) - p(b-x)^{p-1} \frac{R_n(b)}{(b-a)^p} =$$

$\Rightarrow F'(\xi) = 0$ pomeni:

$$\frac{R_n(b)}{(b-a)^p} p(b-a)^{p-1} = \frac{(b-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Izrazimo $R_n(b)$ in dobimo formulo, ki jo želimo. ■

<u>Opomba</u>. Taylor-jeva formula je uporabna za računanje vrednosti funkcije v bližnji točki.

<u>Primer</u>. e na tri decimalke

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$f(x) = e^x$, $a = 0$, $x = 1$

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} \cdot e^{\xi}, \quad \xi \in (0,1)$$

$$\frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} \leq 10^{-4} \text{ za } \forall \xi \in (0,1) \rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \cdot 3 \leq 10^{-4}$$

$$e^{\xi} < e < 3 \longrightarrow$$

npr. <u>$n=8$</u>

22.04.2003

<u>Opomba</u>. Na enak način kot za izračun $e^x = e^1$ je mogoče pokazati za poljuben x, da je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (pri $f(x) = e^x$ okoli $x = 0$). $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$, kjer je $\lim_{x\to\infty} R_n(x) = 0$, torej $\lim_{n\to\infty}\left[e^x - (1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!})\right] = 0$, zato je $e^x = \lim_{x\to\infty}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right]$, t.j. za $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n! + \dots$$

<u>V splošnem</u>: $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x,a)$.

Če je $\lim_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0$, to pomeni

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

<u>Definicija</u>. Naj bo f neskončnokrat odvedljiva v okolici točke a. Vrsto $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ imenujemo Taylorjeva

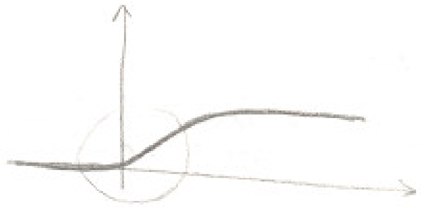
vrsta za funkcijo f pri $x=a$.

Vemo: če je $\lim_{n\to\infty} R_n(x,a)=0$, tedaj je $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)/n!\cdot(x-a)^n$.

$$R_n(x,a)=f(x)-\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(a)/j!\,(x-a)^j.$$

Taylorjevo vrsto lahko zapišemo za vsako neskončnokrat odvedljivo funkcijo. Ni pa nujno da konvergira. Če konvergira, ni nujno njena vsota $f(x)$.

Primer. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$, $x>0$;
$f(x)=0$, $x\leq 0$;



- f je neskončnokrat odvedljiva in $f^{(n)}(0)=0$ za vse n
- Taylorjeva vrsta: $0+\frac{0}{1!}x+\ldots\equiv 0$
- f v nobeni okolici točke 0 ni $\equiv 0$

Taylorjeva vrsta za f pri $x=0$ konvergira za vsak x, njena vsota pa ni v nobeni okolici 0 $\equiv f(x)$

Definicija. Vsoto konvergentne potenčne vrste na njenem (odprtem) intervalu konvergence imenujemo analitična funkcija.

Diskusija. Naj bo $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ na konv. int. $(a-R,a+R)$.

$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2\ldots \Rightarrow c_0=f(a),\ c_1=f'(a)/1!,\ldots$

Potenčno vrsto na $(a-R,a+R)$ lahko členoma odvajamo poljubno mnogokrat.

Koeficienti c_k so s funkcijo enolično določeni. To pomeni: če je na $(a-R,a+R)$ mogoče f razviti v konvergentno potenčno vrsto, t.j. $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$, je to mogoče narediti na en sam način: $c_k=f^{(k)}(a)/k!$
Torej je $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, t.j. $f(x)$ je enaka vsoti svoje Taylorjeve vrste pri a.

Opomba. Analitična funkcija na odprtem intervalu I je torej taka funkcija, da bo za $\forall a \in I$ obstajal nek interval s središčem v a, na katerem bo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Primer. Razvij funkcijo $f(x) = \frac{1}{x}$ v okolici 1.

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots$$

Ne vemo, če bo konvergirala v okolici 1 in če bo vsota enaka $\frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x-1+1} = \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{1-[-(x-1)]}$$

če je $|x-1|<1$, je to vsota geom. vrste s kvocientom

$q = -(x-1)$: $\quad \frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots \quad (|q|<1)$

$$\frac{1}{x} = 1 + [-(x-1)] + [-(x-1)]^2 + \dots = 1-(x-1)+(x-1)^2 - \dots$$

$\Rightarrow$ je Taylorjeva (razvijemo lahko na en sam način)

2. TAYLORJEVE VRSTE NEKATERIH EL. FUNKCIJ

(a) eksponentna funkcija $f(x)=e^x$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \ \xi \text{ med } 0 \text{ in } x$$

$$f(0) = f'(0) = \dots = 1, \quad R_n(x,0) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\vartheta x}, \quad 0<\vartheta<1 \ (\xi = \vartheta x)$$

- če je $x<0$, je $e^{\vartheta x} < e^0 = 1$, $|R_n(x,0)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$
- če je $x \ge 0$, je $e^{\vartheta x} < e^x$, $|R_n(x,0)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^x$

$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|}{(1)} \cdot \frac{|x|}{(2)} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{(n+1)}$, obstaja n_0, da je $\frac{|x|}{n_0+1} < \frac{1}{2}$

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|}{1} \cdots \frac{|x|}{n_0} \cdots \frac{|x|}{n+1} < \frac{|x|^{n_0}}{n_0!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow R_n(x,0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ za $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}[T_n(x)] = T(x)$$

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad \text{za } \forall x \in \mathbb{R}}$$

(b) sin x, cos x (pri $x=0$)

$$f(x)=\sin x,\ f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f^{IV}(x)=\sin x \dots$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{IV}(0)=0,\dots$$

Ocena ostanka: $\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq$ $\to$ ($|\sin\xi|$ ali $|\cos\xi|$) ≤ 1

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n\to\infty) \text{ za } \forall x$$

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,0)=0$ za $\forall x$, potem je

$$\boxed{\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots}$$

$$\boxed{\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots}$$

(c) $\ln(1+x)$, $-1<x<1$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+\dots \quad (-1<x<1 \to g)$$

členoma integriramo

$$\boxed{\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots} \quad -1<x<1$$

Drugi način: ocenimo $R_n(x,0)$

(d) Binomska vrsta

Spomnimo se $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\dots+\binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha$ za $\alpha\in\mathbb{N}$.

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}$$

Izrek. Za $\forall\alpha\in\mathbb{N}$ je

(a) $\binom{\alpha}{\alpha-k}=\binom{\alpha}{k}$ $k=0,1,\dots,\alpha$

(b) $\binom{\alpha}{k}+\binom{\alpha}{k+1}=\binom{\alpha+1}{k+1}$ $k=0,1,\dots,\alpha-1$

(c) $\sum\limits_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}+\dots+\binom{\alpha}{\alpha}=2^\alpha$ $(1+1)^\alpha$

24. 4. 2003

$f(x)=(1+x)^\alpha \qquad T(x) = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \dots$ (pri $x=0$)

Za poljuben $\alpha\in\mathbb{R}$ in $k\in\mathbb{N}$ definiramo $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

$$T(x) = 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\dots$$

Pri $|x|<1$ uporabimo Taylorjevo formulo in ocenimo ostanek

$$R_n(x,0) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(1+\vartheta x), \quad 0<\vartheta<1$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1}(1+\vartheta x)^{\alpha-n-1} =$$

$$= \binom{\alpha}{n+1}(1+\vartheta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

- $0<x<1$

$$R_n(x,0) = (1+\vartheta x)^\alpha \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{1\cdot 2\cdots(n+1)}\cdot\overbrace{\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^{n+1}}^{<x^{n+1}}$$

$$1<1+\vartheta x<2 \Rightarrow \frac{x}{1+\vartheta x} < x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_n(x,0) \le \max\{1,2^\alpha\}\left|\frac{\alpha}{1}x\right|\left|\frac{\alpha-1}{2}x\right|\cdots\left|\frac{\alpha-n}{n+1}x\right|$$

Naj bo $x<q<1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1$, zato je $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}x\right| = x$.

Potem obstaja m_0, da je $\left|\frac{\alpha-k}{k+1}x\right|<q$ za vse $k\ge m_0$.

Če je tedaj

$$M = \max\{1,2^\alpha\}\left(\frac{\alpha}{1}x\right)\cdots\left(\frac{\alpha-m_0}{m_0+1}x\right),$$

potem je $|R_n(x,0)|\le Mq^{n-m_0}$. Ker je $0<q<1$, gre $Mq^{n-m_0}\to 0$,

in je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,0)=0$ pri $0<x<1$.

- $-1<x<0$

Uporabimo: $R_n(x,0) = \frac{x^{n+1}}{n!}(1-\vartheta)^n f^{(n+1)}(1+\vartheta x) =$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}(1-\vartheta)^n(1+\vartheta x)^{\alpha-n-1} =$$

$$= \alpha\cdot\frac{\alpha-1}{1}\cdot\frac{\alpha-2}{2}\cdots\frac{\alpha-n}{n}\left[\frac{(1-\vartheta)x}{1+\vartheta x}\right]^n(1+\vartheta x)^{\alpha-1}x$$

$$\left|\frac{(1-\vartheta x)}{1+\vartheta x}\right| = \frac{(1-\vartheta)|x|}{1-\vartheta|x|} \leq \frac{(1-\vartheta)|x|}{1-\vartheta} = |x|$$

$1-|x| < |1+\vartheta x| < 1$

$$|R_n(x,0)| \leq \alpha|x| \max\{1, (1-|x|)^{\alpha-1}\} \left|\frac{\alpha-1}{1}x\right|\left|\frac{\alpha-2}{2}x\right| \cdots \left|\frac{\alpha-n}{n}x\right|$$

$\ldots \lim_{\to\infty} R_n(x,0) = 0$

<u>Sklep</u>: $(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots \quad (-1<x<1), \alpha \in \mathbb{R}$

<u>Opomba</u>. Če je $\alpha \in \mathbb{N}$ je v zg. vrsti le končno mnogo členov (običajna potenca binoma $(1+x)$), formula velja za $\forall x$.

<u>Primer</u>. $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 =$

$-1<x<1$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \ldots$$