$$f(b)-f(x)=f(x+(1-t)h)-f(x)=f(x+\vartheta_2(1-t)h)(1-th)\ ,\ \vartheta_2\in(0,1)$$

Pomnožimo enačbi zaporedoma z $(1-t)$ in t in seštejemo.

$$\underline{(1-t)f(a)+tf(b)-f((1-t)a+tb)}=(1-t)t\left(hf'(x+\vartheta_2(1-t)h)-hf'(x-\vartheta_1 th)\right)=$$

$$=\underbrace{(1-t)t\cdot h}_{\geq 0}\left(f'(x+\vartheta_2(1-t)h)-f'(x+\vartheta\ \ th\right)=h(1-t)t\ast f''(\xi)(\vartheta_2(1-t)h+\vartheta_1 th)=$$

$$=\underbrace{h^2(1-t)t}_{\geq 0}\underbrace{f''(\xi)}_{\geq 0\text{ (po predp.)}}\underbrace{(\vartheta_2(1-t)+\vartheta_1 th)}_{\geq 0}\ \underline{\geq 0}$$

Potem je f konveksna. ■

<u>Definicija</u>. Naj bo f definirana na I. Pravimo, da ima graf Γ_f <u>prevoj</u> v točki $(a,f(a))$, če $\exists\ r>0$, da je f konveksna na $(a-r,a)$ in konkavna na $(a,a+r)$ ali pa obratno.

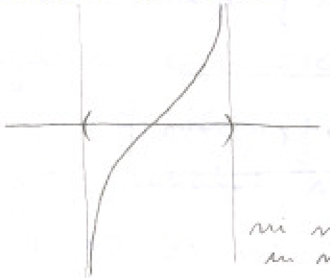
<u>Posledica</u>. Če je funkcija f dvakrat odvedljiva na I in ima graf funkcije f prevoj v točki $(a,f(a))$, potem je $f''(a)=0$.
Obratno: če je $f''(a)=0$ in f'' pri prehodu skozi a spremeni predznak, potem je v a prevoj.

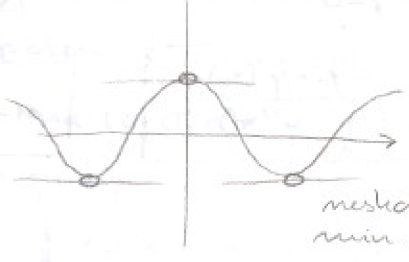
6. EKSTREMI FUNKCIJ

Ekstrem je skupno ime za maksimum in minimum.

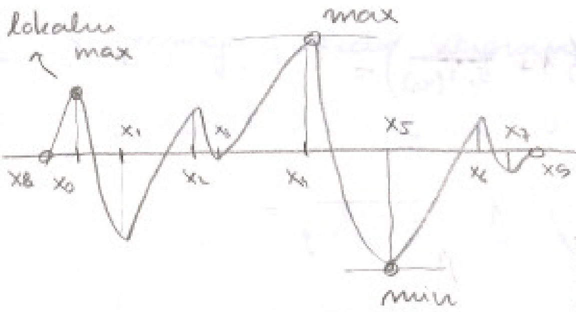
<u>Definicija</u>. Naj bo f definirana na D. Potem ima f v $a\in D$ maksimum (globalni ~), če je $f(x)\leq f(a)$ za vsak $x\in D$.
f ima v $b\in D$ minimum (globalni ~), če je $f(x)\geq f(b)$ za vsak $x\in D$.

<u>Opomba</u>. Ni nujno, da ima funkcija maksimum in minimum in če obstaja, to ni nujno v eni sami točki (lahko ga doseže v večih točkah).





<u>Definicija</u>. Funkcija $f:D\to\mathbb{R}$ ima v točki $a\in D$ lokalni maksimum, če obstaja okolica U a v D, da ima zožitev $f|U$ maksimum v a. Drugače: $\exists\ \delta>0$ da je $f(x)\leq f(a)$ za vse $x\in D$, $|x-a|<\delta$.
Podobno definiramo še lokalni minimum.



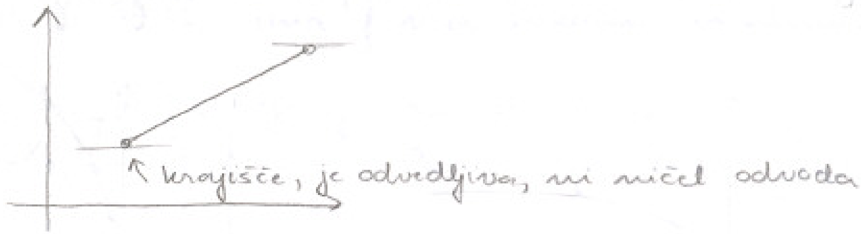
x_4 je maksimum
x_5 je minimum

lokalni max: x_0, x_2, x_4, x_6, x_9

lokalni min: x_1, x_3, x_5, x_8, x_7

<u>Izrek</u>. Naj bo f definirana na I. Če ima f lokalni ekstrem v $a \in I$ in a ni krajišče intervala I in je f v a odvedljiva, tedaj je $f'(a) = 0$.

<u>DOKAZ</u>. Glej poglavje o Lagrangeu. ⊠

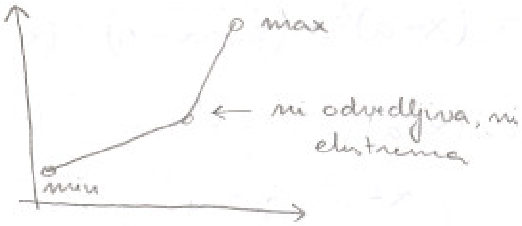


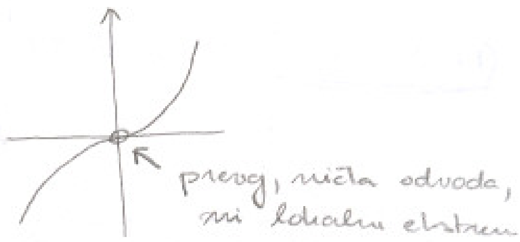
<u>Povzetek</u>. Če hočemo najti lokalne ekstreme razmeroma lepe funkcije, si ogledamo:

~ točke, kjer odvod ni obstaja

~ točke, kjer je odvod nič, krajišča intervala

(točk, kjer odvod ni obstaja, ne sme biti preveč). Ni rečeno, da so v takih točkah res lokalni ekstremi.





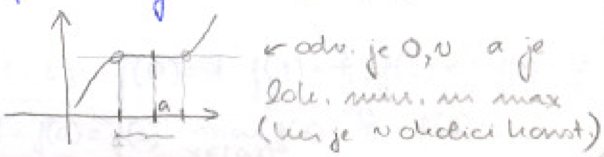
<u>Izrek</u>. Naj bo f odvedljiva v neki okolici točke a in naj bo $f'(a) = 0$.

(i) če $\exists \delta > 0$, da je f' nenegativen na $(a-\delta, a)$ in je odvod f' (≤ 0) negativen za $(a, a+\delta)$, potem je v a lokalni maksimum.

(ii) če $\exists \delta > 0$, da je $f' \leq 0$ na $(a-\delta, a)$ in $f' \geq 0$ za $(a, a+\delta)$, potem je v a lokalni minimum.

(iii) če $\exists \delta > 0$, da je bodisi $f' > 0$ za x na $(a-\delta, a+\delta)$ razen v a, bodisi $f' < 0$ na $(a-\delta, a+\delta)$ razen v a, potem f v a nima lokalnega ekstrema.

<u>Opomba</u>. V (iii) je nujno strogi neenačaj.



DOKAZ. (s pomočjo posledic Lagrange-a) ▪

Izrek. Naj bo f dvakrat odvedljiva v okolici točke a in naj bo $f'(a)=0$,

(i) če je $f''(x) \leq 0$ za vx $x \in (a-\delta, a+\delta)$, tedaj ima f v a lokalni maksimum.

(ii) če je $f''(x) \geq 0$ za $x \in (a-\delta, a+\delta)$, tedaj ima f v a lokalni minimum

DOKAZ. graf je pod/nad tangento ▪

Posledica. Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva v okolici a in $f'(a)=0$.

(i) če je $f''(a) < 0$, ima f v a lokalni maksimum

(ii) če je $f''(a) > 0$, ima f v a lokalni minimum

DOKAZ. Ker je $f''(a) > 0$, je zaradi zveznosti $f''(x) > 0$ za x iz neke okolice a. Potem uporabimo prejšnji izrek. ▪

Izrek. Naj bo f definirana na $[a, b]$ in odvedljiva v krajiščih.

(i) Če je $f'(a) > 0$, ima f v a lokalni minimum.

(ii) Če je $f'(a) < 0$, ima f v a lokalni maksimum.

Podobno velja za b (obratno). (iii), (iv)

DOKAZ. Lagrange

Primer. $f(x) = x^5/5 - x^4/4 - x^3/3 + x^2/2 + 1$

$f'(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x = x^3(x-1) - x(x-1) = (x-1)x(x^2-1) = \underline{x(x-1)^2(x+1)}$

ničle $0, 1, -1$

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
f	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗	ni lok. (pri ekst.)	↗

Strategija. za iskanje največje/najmanjše vrednosti odvedljive funkcije na $[a,b] = I$.

~ poiščemo stacionarne točke (ničle odvoda), $x_1, \dots, x_k$

~ izračunamo $f(x_i), f(a), f(b)$

~ izberemo največjo in najmanjšo

Primer. $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 1$ na $[0,3]$

$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-2)(x-1) \rightarrow 0, 1, 2;$ $f(0)=1, f(1)=\frac{5}{4}, f(2)=1, f(3)=\frac{13}{4}$

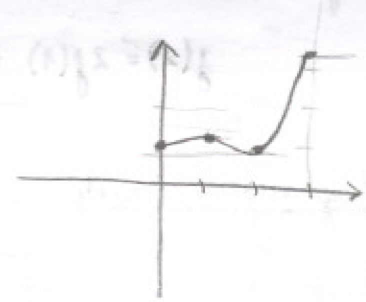
$f(3)$ največja, $f(1)$ najm. $\min\limits_{x\in[0,3]} f(x) = 1 = f(0) = f(2)$ $\max\limits_{x\in[0,3]} f(x) = \frac{13}{4} = f(3)$

VI. VRSTE

Če želimo izračunati še kon. ...

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

f':	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	lok. min.		lok. maks.		lok. min.		lok. maks.



16. 1. 2003

7. L'HOSPITALOVI IZREKI

Je metoda za računanje limit oblike $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, pri čemer je $f(a)=0$, $g(a)=0$ ali pa gresta f in g proti $\pm\infty$ za $x\to a$.

Primer. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ $\quad x=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}\sin 0 = 0\\ x=0\end{matrix}\right\} \cancel{\frac{0}{0}} ?$

Lema. (Cauchy – posplošeni Lagrangeov izrek)
Naj bosta f in g zvezni na $[a,b]$ in odvedljivi na (a,b) in naj bo $g'(x)\neq 0$ v vseh $x\in(a,b)$.
Potem obstaja $c\in(a,b)$, da je

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Poseben primer. $g(x)=x$, $g'(x)\equiv 1$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (\text{Lagrangeov izrek})$$

DOKAZ. Najprej dokažemo, da je $g(b)-g(a)\neq 0$ (da lahko delimo). To je res, ker po Lagrangeu $\exists\, \xi\in(a,b)$, da je $g(b)-g(a) = g'(\xi)(b-a)\neq 0$ (po predpostavki).
Definiramo $k := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \in \mathbb{R}$ in $F(x) = f(x)-f(a)-$ $-k\cdot(g(x)-g(a))$ na $x\in[a,b]$. F je zvezna na $[a,b]$ in F je odvedljiva na (a,b).
Uporabimo Lagrangeov izrek in Rolle-ov izrek.
$F(a)=0$, $F(b)=0$, torej F zadošča pogojem Rolle-jevega izreka. Torej obstaja $c\in(a,b)$, da je $F'(c)=0$. Izračunamo odvod F iz definicije F:

$$F'(x) = f'(x) - kg'(x) \text{ in } F'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0 \text{ oz.}$$

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \;\blacksquare$$

VI. VRSTE

(a,b) in naj velja

(i) $g(x) \neq 0,\ g'(x) \neq 0$ za $\forall x \in (a,b)$

(ii) $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \downarrow a} g(x) = 0$

Če obstaja limita $B := \lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potem obstaja tudi limita $A = \lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in je $A = B$ (obe limiti sta enaki).

Opomba. Vloga b ni pomembna – važno je le, da f in g zadoščata navedenim lastnostim za x dovolj blizu a. (t.j. izrek je lokalen).

Opomba. Analogen izrek velja za leve limite in za dvostranske limite.

Primer. $\frac{\sin x}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = ? = A$

$a = 0,\ f(x) = \sin x,\ g(x) = x$, predpostavke so izpolnjene

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{če obstaja}}}{A = B} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1 \quad (\cos \text{ je zvezen})$$

DOKAZ. Iz (ii) sledi, da lahko f in g zvezno razširimo na $[a,b)$, da definiramo $f(a) = g(a) = 0$.

(i) Oglejmo si najprej poseben primer, ko sta f in g odvedljivi tudi pri $x = a$ (desni odvod) in naj bo $g'(a) \neq 0$. Tedaj velja: $f(x) = \overset{0}{f(a)} + \underbrace{f'(a)\cdot(x-a)}_{\text{diferencial}} +$ ostanek $+ o(x-a)$ in $\lim\limits_{x \to a} \frac{o(x-a)}{x-a} = 0$. Enako $g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a)$.

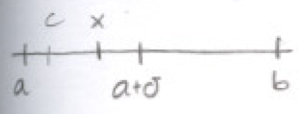
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)(x-a) + o(x-a)}{g'(a)(x-a) + o(x-a)} = \frac{f'(a) + \frac{o(x-a)}{(x-a)} \to 0}{g'(a) + \frac{o(x-a)}{x-a} \to 0}$$

$A = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = B$ (če sta f' in g' zvezni pri $x = a$).

(ii) V splošnem nimamo nujno odvodov $f'(a), g'(a)$. Vemo, da sta f in g zvezni v a, če je $f(a) = g(a) = 0$. Naj bo

$x \in (a,b)$. Po lemi $\exists c, \in (a,x)$, da je $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. c je odvisen od x. Ko gre $x \to a$, gre $c \to a$.

Denimo sedaj, da obstaja $B = \lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. To pomeni, da za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ da je za $\forall x \in (a, a+\delta)$



$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - B \right| < \varepsilon$. (Po def. desne limite). Izberemo poljuben $x \in (a, a+\delta)$. Potem imamo c med a in x, da je $f(x)/g(x) = f'(c)/g'(c)$. Ker je $c \in (a, a+\delta)$ velja $\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - B \right| < \varepsilon$, torej $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - B \right| < \varepsilon$ za $\forall x \in (a, a+\delta)$ za $\forall \varepsilon$.

Potem je $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = B$. S tem je izrek dokazan. ■

<u>Primer</u>. $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = x^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{ali} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

<u>Primer</u>. $f(x) = \ln x$, $g(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})} \qquad \pm \frac{\infty}{\infty} \quad ?$$

<u>Izrek</u>. (L'Hospital) Naj bosta f, g odvedljivi na (a, b) in

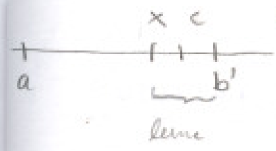
(i) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ za $\forall x \in (a, b)$

(ii) $\lim\limits_{x \downarrow a} g(x) = \pm\infty$

Če obstaja $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B$, potem obstaja $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ in je $A = B$.

<u>Opomba</u>. Če je f omejena v okolici a, je $A = 0$, t.j. izrek uporabimo v primeru, ko je $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = \pm\infty$.

<u>DOKAZ</u>. Denimo, da $\exists B = \lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Izberemo $\varepsilon > 0$, potem $\exists b'$ da je za $\forall x \in (a, b')$ $\quad B - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < B + \varepsilon$ *, $b' \in (a, b)$.



Izberemo $x \in (a, b')$. Po lemi $\exists c \in (x, b')$, da je

$$\frac{f(x) - f(b')}{g(x) - g(b')} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Potem je po $*$ v c: $B - \varepsilon < \frac{f(x) - f(b')}{g(x) - g(b')} < B + \varepsilon$. Pomnožimo z $\frac{g(x) - g(b')}{g(x)} = 1 - \frac{g(b')}{g(x)}$. Za x je blizu a: $\lim\limits_{x \downarrow a} g(x) = +\infty$, ali $-$ torej za $\forall M > 0$: $g(x) > M$ za x dovolj blizu a. Če izberemo za M $g(b')$, t.j. $g(x) > g(b')$ in $g(x) > 0$ za x dovolj blizu a.

Potem je $1 - \frac{g(b')}{g(x)} > 0$. Pri množenju se neenakosti ohranijo.

$$(B-\varepsilon)\left(1-\frac{g(b')}{g(x)}\right) < \underbrace{\frac{f(x)-f(b')}{g(x)}}_{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(b')}{g(x)}} < (B+\varepsilon)\left(1-\frac{g(b')}{g(x)}\right)$$

$0 \qquad 0 \qquad \downarrow 0$

Sedaj $x \to a$.

če $\exists$, ima pa zg. in sp. limito

$$B-\varepsilon \le \lim \frac{f(x)}{g(x)} \underset{?}{\le} B+\varepsilon$$

Od tu:

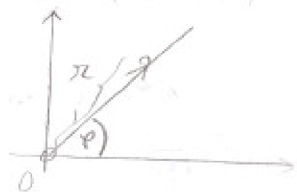
$$B-\varepsilon \le \underbrace{\liminf_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}}_{\exists} \le \underbrace{\limsup_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}}_{\exists} \le B+\underset{\text{polj majhen}}{\varepsilon}$$

Ker je ε poljubno majhen, je lim sup = lim inf in sta enaki B. ■

18.02.2003

8. UPORABA ODVODA V GEOMETRIJI V RAVNINI

POLARNE IN KARTEZIČNE KOORDINATE

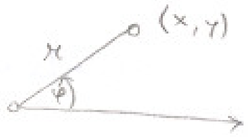


(x,y) – kartezične

Izberemo O (pol) in poltrak z začetkom v O. Izberemo še smer vrtenja (običajno ↺). Če je T točka v ravnini, ji priredimo r in φ: oddaljenost T od O in kot, ki ga OT oklepa s polarno osjo. Če je $r>0$, je $0 \le \varphi < 2\pi$ natanko določen. Za točko O φ ni določen.

$(r,\varphi) \leftrightarrow T$

Zveza med kartezičnimi in polarnimi koordinatami:



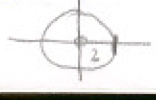
$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

PODAJANJE KRIVULJ V RAVNINI

(a) V KARTEZIČNIH KOORDINATAH

(i) eksplicitno (kot graf) $y=f(x)$, $x=g(y)$ npr. $y=x^2$ parabola

(ii) implicitno (krivuljo podamo z enačbo $f(x,y)=0$) $x^2+y^2-4=0$ krožnica



VI. VRSTE

(iii) parametrično podana krivulja

$$x = p(t),\ y = q(t),\ \alpha \le t \le \beta$$

– gledamo množico vseh točk $\{(x(t), y(t);\ \alpha \le t \le \beta\}$

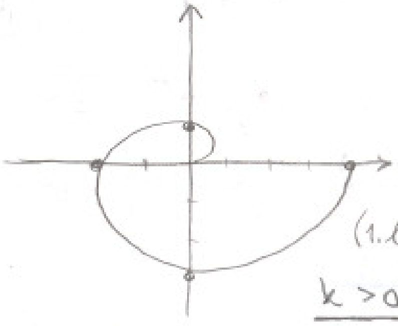
npr. $\left.\begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{array}\right\} 0 \le t \le 2\pi$

(b) V POLARNEM KOORDINATNEM SISTEMU

(i) implicitno $F(r, \varphi) = 0$

(ii) eksplicitno $r = p(\varphi)$, p funkcija, $\alpha \le \varphi \le \beta$
$\varphi = q(r)$, q funkcija, $r_1 \le r \le r_2$

Primer 1. $r = 2\varphi \quad 0 \le \varphi < 2\pi$



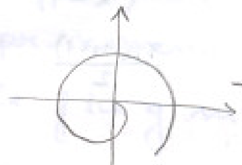
$(2\varphi, \varphi)$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad r = \pi$

$\varphi = \pi \quad r = 2\pi$

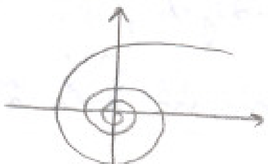
(1. del Arhimedove spirale) – $r = k\varphi$

$k > 0$

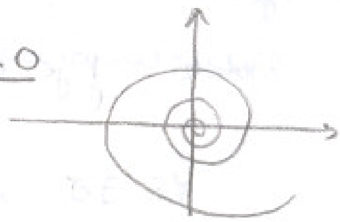


$k < 0$

Primer 2. $r = \frac{k}{\varphi}$ $k > 0$



$k < 0$

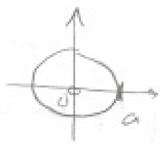


(iii) parametrično $\left.\begin{array}{l} r = p(t) \\ \varphi = q(t) \end{array}\right. \alpha \le t \le \beta$, p i q funkciji, p nenegativna

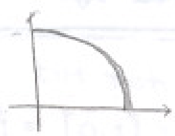
PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE
(v kartezičnem koordinatnem sistemu)

$\left.\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \quad \alpha \le t \le \beta \right\}$ predstavljamo si, da se $(f(t), g(t))$ s časom t giblje v ravnini

Primer 1. $x = a\cos t$
$y = a\sin t$
$0 \le t < 2\pi$



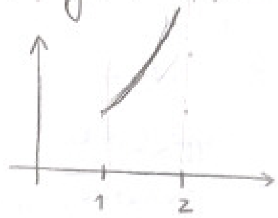
Primer 2.
$x = a\cos t$
$y = a\sin t$
$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$



Opomba. Matematično je gibanje v ravnini opisano s preslikavo $F: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, da je lega točke v trenutku t enaka $F(t) \in \mathbb{R}^2$, $F(t) = (f(t), g(t))$.

Definicija. Pot v ravnini $\mathbb{R}^2$ je preslikava $F: I \to \mathbb{R}^2$, kjer je I časovni interval, podana s parom zveznih funkcij $f, g: I \to \mathbb{R}$ oz. z enačbama $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in I$.
$(F(t) = (f(t), g(t)))$
Tir (sled) te poti je $F(I) = \{(f(t), g(t));\ t \in I\}$.

Primer. $f(t) = t$, $g(t) = t^2$, $I = [1,2]$



Tir: $\{(t, t^2),\ 1 \le t \le 2\}$

Opomba. I se imenuje parametrski interval, po katerem teče parameter t.

Opomba. Pri lepih funkcijah f in g (npr. zvezno odvedljivih), je tir poti F res krivulja. Če f in g nista dovolj lepi (sta samo zvezni), tir poti F ni nujno krivulja.
V tem primeru imenujemo $x = f(t)$, $y = g(t)$ parametrični enačbi krivulje.
Krivulja bo tir naše poti, t je parameter.

Opomba. Če je L tir neke poti, lahko isti L zapišemo kot tir kakšne druge poti. Pravimo, da L parametriziramo na drug način.

Primer.
$x = \cos t^2$, $y = \sin t^2$, $0 \le t \le \sqrt{2\pi}$ $\qquad$ $x = \cos u$, $y = \sin u$, $0 \le u \le 2\pi$

Tir je krožnica $K(0,1)$.

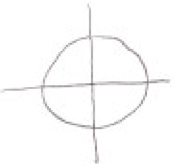
Opomba. Če sta f in g samo zvezni, ni nujno tir krivulja.

Primer. Obstajata zvezni f, g na $[0,1]$, da je tir poti $t \mapsto (f(t), g(t))$ kvadrat v ravnini, t.j. $\{(f(t), g(t));\ 0 \le t \le 1\} = [0,1] \times [0,1]$. (t.i. Peanova krivulja).

PRIMERI KRIVULJ

(i) KROŽNICA $\quad x^2+y^2=a^2 \quad a>0$ $\quad$ implicitno

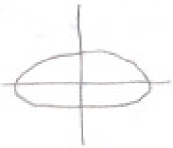
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ t \in [0, 2\pi) \end{cases} \quad \text{parametrično}$$



Eksplicitno krožnice ne moremo zapisati kot graf funkcije (lahko pa kot unijo grafov dveh funkcij). $\{(x, \sqrt{a^2-x^2}), -a \le x \le a\} \cup \{(x, -\sqrt{a^2-x^2}); -a \le x \le a\}$

zgornja polkrožnica $\qquad$ spodnja polkrožnica

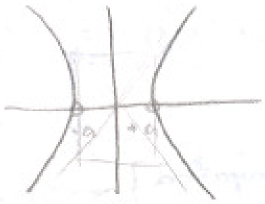
(ii) ELIPSA $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\quad$ implicitno $\quad a, b>0$



$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases} \quad \text{parametrično}$$

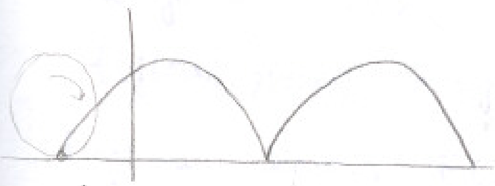
Doma "eksplicitno"!

(iii) HIPERBOLA $\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} x = a\,\mathrm{ch}\,t \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t \end{array}\right\} \text{desna veja} \\ \left.\begin{array}{l} x = -a\,\mathrm{ch}\,t \\ y = +b\,\mathrm{sh}\,t \end{array}\right\} \text{leva veja} \end{cases}$$

(iv) CIKLOIDA



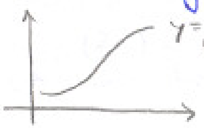
$$x = at - a\sin t = a(t-\sin t)$$
$$y = a - a\cos t = a(1-\cos t)$$

Premisli doma!

Cikloida je tir, ki ga pri kotaljenju opiše točka na obodu kroga.

Opomba. Nismo še povedali, kaj krivulja sploh je. Definirali bomo gladke krivulje.

Primer. (a)



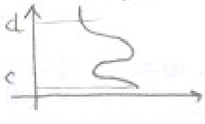
$y=f(x), a\le x<b$ $\quad$ graf zvezno odvedljive funkcije na $[a,b]$

$\{(x, f(x));\ x\in[a,b], f \text{ zv. odv.}\}$

Parametrični zapis: $x=t,\ y=f(t)$ $\quad (a\le t<b)$ (ali $x=x, y=f(x), a\le x<b$)

parameter je kar x

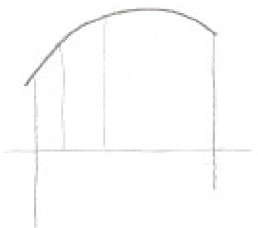
(b) $x=g(y),\ c\le y\le d$



$\{(g(y), y);\ c\le y\le d,\ g \text{ zv. odv.}\}$

Parametrično: $x=g(t), y=t$ (ali $x=g(y), y=y$)

Opomba. Gladke krivulje bodo take, ki so lokalno oblike (a) ali (b) (gl. primer).



x ves čas narašča $\Rightarrow y = f(x)$

$y \Rightarrow x = g(y)$

Naj bo I odprt interval in $F=(f,g): I \to \mathbb{R}^2$ taka pot, da sta f in g zvezno odvedljivi. Naj bo $\alpha \in I$ tak, da je $f'(\alpha) \neq 0$. Zaradi zveznosti odvoda f' obstaja interval $I' \in I$ s središčem v α, da je ali $f'(t) > 0$ za vse $t \in I'$ ali pa $f'(t) < 0$ za vse $t \in I'$. V obeh primerih je f strogo monotona (z odvodom $f' \neq 0$) na I', zato f preslika I' na J', ki vsebuje $f(\alpha)$. Inverzna funkcija $\varphi = (f|_{I'})^{-1}$ slika $J' \mapsto I'$ je tudi odvedljiva in odvod $\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))}$ je tudi zvezen (t.j. je zvezno odvedljiva).

Ker je $I' = \varphi(J')$, je $F(I') = F(\varphi(J')) = F \circ \varphi(J') =$
inverz
$\{(f(\varphi(x)), g(\varphi(x))); x \in J'\} = \{(x, g(\varphi(x))); x \in J'\}$.

Tako smo košček $F(I')$ naše krivulje (tira) zapisali kot graf gladke funkcije $g \circ \varphi: J' \to \mathbb{R}$.

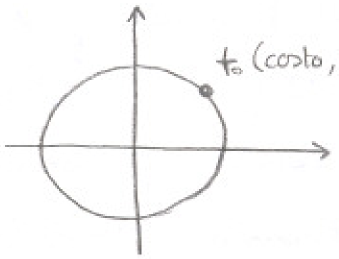
To pomeni, da košček $F(I) = \{(f(t), g(t); t \in I'\}$ zapišemo kot graf $y = h(x)$, $y \in J'$ (t.j. $\{(x, h(x)), x \in J'\}$).

Podobno naredimo, če je $g'(\alpha) \neq 0$, obstaja I' s središčem v α, da košček $F(I')$ lahko zapišemo kot graf $x = z(y)$, $y \in J''$, t.j. $F(I') = \{(z(y), y); y \in J''\}$ in je z spet zvezno odvedljiva funkcija.

Sklep. Vsaj v točkah t, kjer nista hkrati $f'(t)$ in $g'(t)$ enaka 0, lahko lokalni študij naše krivulje (tira) $F(I)$ prevedemo na študij grafov zvezno odvedljivih funkcij ($y = h(x)$ ali $x = z(y)$).

Primer. Krožnica: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t < 2\pi$

$x^2 + y^2 = 1$



$0 < t_0 < \frac{\pi}{2}$

$\dot{x}(t_0) = -\sin t$

$\dot{y}(t_0) = \cos t$

Ker je $0 < t_0 < \frac{\pi}{2}$, je $-\sin t_0 \neq 0$, torej je v okolici t_0 mogoče košček krožnice izraziti eksplicitno, torej $y = h(x)$.

$y = +\sqrt{1-x^2}$

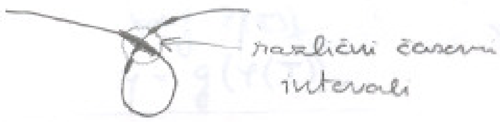
Ker je $0 < t_0 < \frac{\pi}{2}$, je $\cos t_0 \neq 0$, torej $x = p(x)$

$x = \sqrt{1-y^2}$.

Poseben primer. $t_0 = 0$ $\dot{x}(t_0) = -\sin 0 = 0$, $\dot{y}(t_0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{1-y^2} = p(y)$

Opomba. Z enačbo $y = h(x)$ ali $x = p(y)$ nismo v diskusiji zgoraj zajeli vse krivulje, le tisti del tira, ki ga točka preteče v majhnem časovnem intervalu okoli t_0.

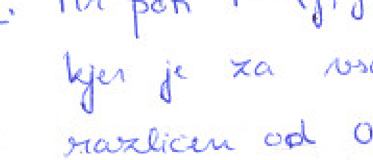


Opomba. Tir poti $F = (f, g) : I \to \mathbb{R}^2$, kjer sta odvoda zvezna in kjer je za vsak $t \in I$ vsaj eden od odvodov različen od 0, bomo imenovali GLADKA KRIVULJA.

TANGENTA IN NORMALA

Naj bo $F = (f, g) : I \to \mathbb{R}^2$ gladka pot. Naj bo $t \in I$ in vsaj eden od odvodov $f'(t), g'(t)$ različen od 0 (f, g sta zvezno odvedljivi).

Recimo, da je $f'(t) \neq 0$. Torej na $(t-\delta, t+\delta)$ f strogo narašča ali pada, torej: $f(t+h) \neq f(t)$, $|h| < \delta$.



Enačba sekante (premice) skozi $F(t)$ in $F(t+h)$ je: $y - g(t) = \frac{g(t+h) - g(t)}{f(t+h) - f(t)} (x - f(t))$

$$y - g(t) = \frac{\frac{g(t+h) - g(t)}{h}}{\frac{f(t+h) - f(t)}{h}} (x - f(t)) \xrightarrow{h \to 0} y - g(t) = \frac{g'(t)}{f'(t)} (x - f(t))$$

Enačba tangente v $(f(t), g(t)) = F(t)$: $\boxed{(y - g(t)) f'(t) = g'(t)(x - f(t))}$

če je $g'(t) \neq 0$: $\boxed{(x-f(t))g'(t) = (y-g(t))f'(t)}$ (enako kot prej).

<u>Definicija</u>. Naj bosta f in g odvedljivi in t tak, da je vsaj eden od $f'(t)$, $g'(t)$ različen od 0.
Tedaj je TANGENTA na tir poti $F=(f,g)$ v $F(t)$ premica z enačbo $(x-f(t))g'(t) = (y-g(t))f'(t)$, NORMALA pa premica $(x-f(t))f'(t) + (y-g(t))g'(t) = 0$.
(t.j. premica skozi $F(t)$, pravokotna na tangento).

<u>Opomba</u>. Vektor $(f'(t), g'(t))$ kaže v smeri tangente in je vektor hitrosti pri gibanju.
Tangenta je torej premica skozi $(f(t), g(t))$ in smernim vektorjem $(f'(t), g'(t))$.

<u>Opomba</u>. Tangenta je odvisna le od tira in točke, ni pa od parametrizacije (t.j. kako hitro se giblje).

P1: $x = f(t)$, $y = g(t)$ P2: $x = f(\varphi(\tau))$, $y = g(\varphi(\tau))$

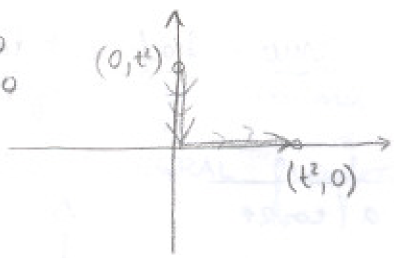
tang. je enaka, ker je smer sm. vektorja enaka

<u>Opomba</u>. Kjer sta oba odvoda hkrati enaka nič, lahko tir tangente sploh nima.

<u>Primer</u>: $f(t) = \begin{cases} 0 ; & t \leq 0 \\ t^2 ; & t > 0 \end{cases}$ $g(t) = \begin{cases} t^2 ; & t \leq 0 \\ 0 ; & t \geq 0 \end{cases}$

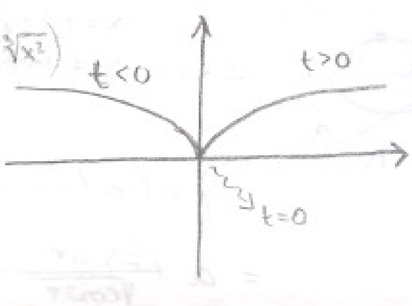
$f'(t) = \begin{cases} 0 ; & t \leq 0 \\ 2t ; & t \geq 0 \end{cases}$ $g'(t) = \begin{cases} 2t ; & t \leq 0 \\ 0 ; & t > 0 \end{cases}$

$(f(t), g(t)) = \begin{cases} (0, t^2) ; & t \leq 0 \\ (t^2, 0) ; & t \geq 0 \end{cases}$



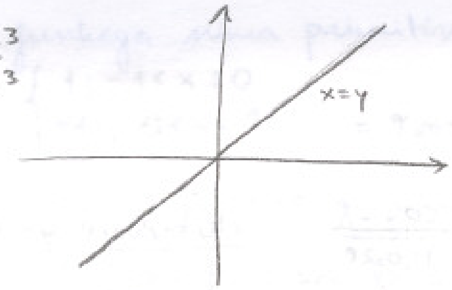
v $(0,0) = (f(0), g(0))$ tangente ni

<u>Primer 2</u>. $\left.\begin{array}{l} x = t^3 \\ y = t^2 \end{array}\right\}$ $(y = \sqrt[3]{x^2})$



v $(0,0)$ spet tangente ni

Primer 3. $x = t^3$
$y = t^3$



$f'(0) = g'(0) = 0$

v (0,0) tin tangento ima! (kljub temu, da sta obe odvoda enaka 0)

Opomba. Odvode po parametru dostikrat označimo s ˙.

$$x = \cos t \qquad \dot{x}(t) = \dot{x} = -\sin t$$
$$y = \sin t \qquad \dot{y} = \cos t$$

Opomba. Če je krivulja dana v polarnih koordinatah $r = f(\varphi)$, vzamemo φ za parameter in jo zapišemo v kartezičnem sistemu: $x = x(\varphi) = f(\varphi)\cdot\cos\varphi$

$$y = y(\varphi) = f(\varphi)\sin\varphi.$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\cdot\sin\varphi \\ \dot{y} &= f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi\end{aligned}\right\}$$ kartezični komponenti sm. vektorja tangente na $r = f(\varphi)$ v $(f(\varphi), \varphi)$

V. INTEGRAL

1. NEDOLOČENI INTEGRAL ALI PRIMITIVNA FUNKCIJA

Naj bo f odvedljiva na intervalu I. f' je spet funkcija na I. Recimo, da poznamo f'. Kako poiščemo f?

Naj bo g poljubna funkcija na I. Ali obstaja f, da je $f'(x) = g(x)$ za vsx $x \in I$.

Definicija. Funkcijo F, definirano na I, imenujemo primitivna funkcija funkcije f ali NEDOLOČENI INTEGRAL funkcije f, če je $f = F'$ na I.

Primer. (a) $f(x) = \cos x \Rightarrow \left.\begin{aligned} F(x) &= \sin x \\ F(x) &= \sin x + 3 \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$ prim. f. funkcije f

(b) $f(x) = x \Rightarrow \left.\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2}{2} \\ F(x) &= \frac{x^2}{2} + 2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$