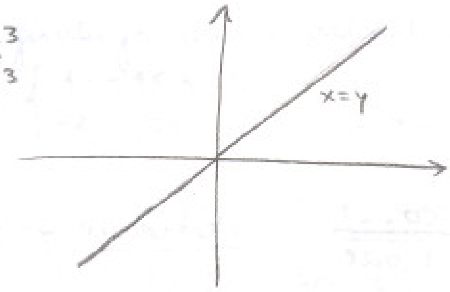
Primer 3. $x = t^3$
$y = t^3$




$f'(0) = g'(0) = 0$

v (0,0) tin tangento ima! (kljub temu, da sta oba odvoda enaka 0)

Opomba. Odvode po parametru dostikrat označimo s ·.

$x = \cos t \qquad \dot{x}(t) = \dot{x} = -\sin t$

$y = \sin t \qquad \dot{y} = \cos t$

Opomba. Če je krivulja dana v polarnih koordinatah $r = f(\varphi)$, vzamemo $\varphi$ za parameter in jo zapišemo v kartezičnem sistemu: $x = x(\varphi) = f(\varphi)\cdot\cos\varphi$

$y = y(\varphi) = f(\varphi)\sin\varphi.$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\cdot\sin\varphi\\ \dot{y} &= f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi\end{aligned}\right\}$$ kartezični komponenti sm. vektorja tangente na $r = f(\varphi)$ v $(f(\varphi), \varphi)$

# V. INTEGRAL

## 1. NEDOLOČENI INTEGRAL ALI PRIMITIVNA FUNKCIJA

Naj bo $f$ odvedljiva na intervalu $I$. $f'$ je spet funkcija na $I$. Recimo, da poznamo $f'$. Kako poiščemo $f$?

Naj bo $g$ poljubna funkcija na $I$. Ali obstaja $f$, da je $f'(x) = g(x)$ za vse $x \in I$.

Definicija. Funkcijo $F$, definirano na $I$, imenujemo primitivna funkcija funkcije $f$ ali NEDOLOČENI INTEGRAL funkcije $f$, če je $f = F'$ na $I$.

Primer. (a) $f(x) = \cos x \Rightarrow$ $\left.\begin{aligned}F(x) &= \sin x\\ F(x) &= \sin x + 3\\ &\vdots\end{aligned}\right\}$ prim. f. funkcije $f$

(b) $f(x) = x \Rightarrow$ $\left.\begin{aligned}F(x) &= \frac{x^2}{2}\\ F(x) &= \frac{x^2}{2} + 2\\ &\vdots\end{aligned}\right\}$

Primer: (vsaka funkcija nima primitivne funkcije)

$$f(x) = \begin{cases} 1; & -1 < x \leq 0 \\ -1; & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Recimo: $F$ je primitivna funkcija funkcije $f$, torej

$$F'(x) = f(x) \text{ za } \forall x \in (-1,1)$$

Ker je $F$ odvedljiva, je zvezna na $(-1,1)$ na $[-a,a]$ za vsak $a$: $0 < a < 1$. Fiksirajmo $a$.

Na $[-a,a]$ doseže $F$ svoj maksimum in minimum.

Naj bo $-a \leq c \leq a$, $c$ maksimum.

$$\left.\begin{array}{l} f(-a) = F'(-a) = 1 \Rightarrow F \overset{v\,-a}{\text{narašča}} \Rightarrow -a \neq c \\ f(a) = F'(a) = -1 \Rightarrow F \overset{v\,a}{\text{pada}} \Rightarrow a \neq c \end{array}\right\} \Rightarrow c \in (-a,a)$$

Ker je $F$ odvedljiva in v $c \in (-a,a)$ doseže maksimum, je $F'(c) = 0 = f(c)$. Protislovje. $\Rightarrow$ $F$ ne obstaja.

Opomba. Funkcija $f$ v primeru ni bila zvezna. Kasneje bomo videli, da ima vsaka zvezna funkcija primitivno funkcijo.

25.02.2003

Izrek. Naj bo $F$ primitivna funkcija funkcije $f$ na intervalu $I$. Potem je za vsako konstanto $C$ tudi $G(x) = F(x) + C$ primitivna funkcija funkcije $f$.

Vsaka primitivna funkcija $H$ je oblike $H(x) = F(x) + C$.

DOKAZ. $F' = f \Rightarrow G' = F' + C' = F' = f$.

Naj bo $H$ primitivna funkcija za $f$: $H' = f \Rightarrow (H-F)' = H' - F' = 0$. Po Lagrangeovem izreku sledi, da je $H - F = C \Rightarrow H = F + C$ (konst.). ∎

Označa. Diferencial $F$ je enak $dF = F'(x)dx = f(x)dx$. Zato pravimo, da je NEDOLOČENI INTEGRAL funkcije $f$ funkcija, katere diferencial je enak $f(x)dx$. Od tu:

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Tabela osnovnih integralov

(1) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$ , $m \neq -1$

odv. pos. fje

(2) $\int x^{-1} dx = \ln|x| + c$ $\begin{cases} \text{za } x>0 \text{ je } (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ \text{za } x<0 \text{ je } (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \end{cases}$

(3) $\int e^x dx = e^x + c$

(4) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$ (5) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

(6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$ (7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

(8) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$ (9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a}) + c$

(9) $$\left(\ln(x+\sqrt{x^2+a})\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a}}\cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$ ■

PRAVILA ZA INTEGRIRANJE

(1) $\boxed{\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx}$

DOKAZ. $F(x) = \int f(x)dx$ , $G(x) = \int g(x)dx$

$(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$

$\Rightarrow [F(x)+G(x)]$ je primitivna funkcija za $[f(x)+g(x)]$. ■

(2) $\boxed{\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)dx \text{ , } \lambda = \text{konst.}}$

DOKAZ. $F(x) = \int f(x)dx$

$(\lambda F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x) \Rightarrow \lambda F$ je primitivna funkcija za $\lambda f$. ■

Posledica. $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx \Rightarrow \int [f(x)-g(x)]\,dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

(3) Vemo: $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int (uv)' = \int u'v + \int uv'$

$\Rightarrow uv = \int u'v + \int uv'$ Integracija po delih

$\boxed{\int u(x)v'(x)\,dx = uv - \int u'(x)v(x)\,dx}$ Per partes

Krajši zapis: $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.}$

(4) Uvedba nove spremenljivke.

Naj bo $F(x)$ primitivna funkcija za $f$ in naj bo $x = \varphi(t)$, kjer je $\varphi$ odvedljiva funkcija z vrednostmi v $\mathcal{D}(f)$ in $\mathcal{D}(F)$.

Tvorimo lahko $\underset{\text{v po } t}{F\circ\varphi}$. Velja:

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t), \text{ torej } [F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),$$

zato velja $\boxed{\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c}$

Uporaba. Recimo, da računamo $\int g(t)\,dt$. Vpeljemo $x = \varphi(t)$. Potem je $dx = \varphi'(t)\,dt$. Dobimo:

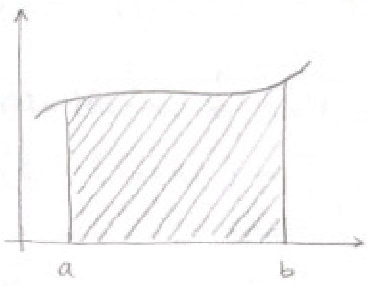
$$\int g(t)\,dt = \int \underbrace{f(\varphi(t))\,\varphi'(t)}_{g}\,dt.$$

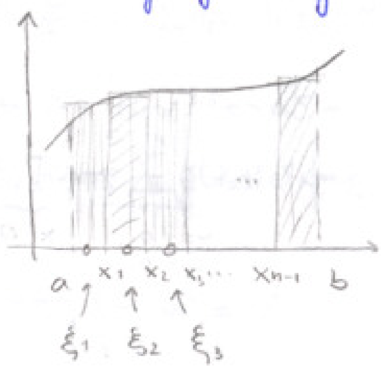
Če poznamo primitivno funkcijo $F$ za $f$, je

$$\int g(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c.$$

## 2. DOLOČENI INTEGRAL

Geometrijska interpretacija. (Motiv) Naj bo $f$ pozitivna funkcija na $[a,b]$. Zanima nas ploščina med grafom $\Gamma_f$ in abscisno osjo.




$\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ je delitev intervala $[a,b]$, če je $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Na intervalu $(x_{i-1}, x_i)$ izberemo $\xi_i$. Približek za ploščino je $\sum_{i=1}^{n} \overset{\text{višina}}{f(\xi_i)}\overset{\text{osnovnica}}{(x_i - x_{i-1})}$. (Riemannova vsota) 1826-1866.

Označimo $\delta_i = (x_i - x_{i-1})$. Ploščino dobimo, če pogledamo limito Riemannovih vsot, pri čemer gredo dolžine $\delta_i$ proti 0.

Definicija. Naj bo $f$ dana funkcija na $[a,b]$. Pravimo, da Riemannove vsote konvergirajo proti $I$, $\delta_i \to 0$, če za $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da

$$\forall i: \delta_i < \delta \Rightarrow \left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i \right| < \varepsilon$$

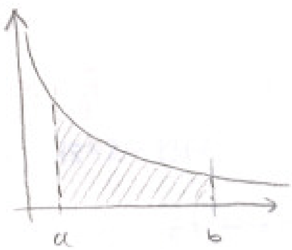
(ne glede na delitev (izbiro) $\xi_i$).

**Definicija.** Če za funkcijo $f$, definirano na $[a,b]$ obstaja $I$ (gl. zg.), pravimo, da je $f$ Riemannovo integrabilna in označimo

$$\int_a^b f(x)\,dx = I.$$

$I$ je DOLOČENI INTEGRAL $f$ na intervalu $[a,b]$.

**Primer.** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na $[a,b]$, $0 < a < b$.



Naj bo $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ delitev in $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i} \in (x_{i-1}, x_i)$. Dobimo:

$$f(\xi_i) = \frac{1}{x_{i-1}x_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i-1}x_i}(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} := I.$$

Dokažemo, da Riemannove vsote konvergirajo proti $I$:

Naj bo $\varepsilon > 0$. Na $[a,b]$ je $f$ zvezna, zato je tudi enakomerno zvezna. Potem obstaja $\delta$, da je $|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, kakor hitro je $|x'-x| < \delta$. Izberimo delitev $D$, da je $\delta_i < \delta$ za $\forall i$. Označimo $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$, $\xi_i' \in (x_{i-1}, x_i)$ poljubni. Potem je $|\xi_i - \xi_i'| \le |x_i - x_{i-1}| = \delta_i < \delta$.
Potem je $|f(\xi_i) - f(\xi_i')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\delta_i} - I \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\delta_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left| f(\xi_i') - f(\xi_i) \right| \le$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \delta_i \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\delta_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

**Izrek.** Če je $f$ Riemannovo integrabilna na intervalu $[a,b]$, je omejena na $[a,b]$.

DOKAZ. S protislovjem: Naj bo $f$ Riemannovo integrabilna in neomejena na $[a,b]$, recimo, da je navzgor neomejena. Naj bo $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Izberemo $\varepsilon > 0$,

obstaja $\sigma$, da je $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i - I\right| < \varepsilon$, če so $\sigma_i < \sigma$.
Ker je $f$ navzgor neomejena na $[a,b]$, je navzgor neomejena na nekem intervalu $[x_{k-1}, x_k]$. To pomeni, da lahko izberemo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, da je $f(\xi_k)$ poljubno velike. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma_i$ je poljubno velika. $\rightarrow\!\!\leftarrow$ ☒
(Podobno dobimo omejenost navzdol.)

27.02.2003

Vprašanje: Katere funkcije so Riemannovo integrabilne?
Kako izračunamo integral?

## 3. DARBOUX-jeve VSOTE

(Darboux 1842 - 1917)

Naj bo $f$ omejena funkcija na $[a,b]$. Označimo $m = \inf\{f(x), x \in [a,b]\}$ in $M = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$.

Naj bo $D: x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ delitev intervala $[a,b]$.

Za $\forall k$, $k \in \{1, \dots, n\}$ definiramo $m_k = \inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ in $M_k = \sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}$.

Potem je $m \leq m_k \leq M_k \leq M$.

Definiramo vsoti: $s(D) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$ (spodnja Darboux-jeva vsota),

$S(D) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$ (zgornja Darboux-jeva vsota).

Velja: $s(D) \leq S(D)$ in $m(b-a) \leq s(D) \leq S(D) \leq M(b-a)$.

<u>Definicija</u>. Delitev $D'$ je nadaljevanje delitve $D$, če je $D \subseteq D'$.
(t.j. $D'$ ima še nekaj dodatnih delilnih točk).

<u>Lema 1</u>. Naj bo $D \subset D'$, tedaj velja:

$$s(D') \geq s(D) \text{ in } S(D') \leq S(D).$$

<u>DOKAZ</u>. Točke lahko dodajamo zaporedno, zato je dovolj preveriti trditev za eno dodatno točko: $x_i' \in (x_{i-1}, x_i)$. $D' = D \cup \{x_i'\}$.
Označimo: $m_i' = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i']\}$, $m_i'' = \inf\{f(x); x \in [x_i', x_i]\}$,
$M_i' = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i']\}$ in $M_i'' = \sup\{f(x); x \in [x_i', x_i]\}$.

$$s(D') - s(D) = \sum_{k=1}^{i-1} m_k (x_k - x_{k-1}) + m_i'(x_i' - x_{i-1}) + m_i''(x_i - x_i') + \sum_{k=i+1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) -$$
$$- \sum_{k=1}^{i-1} m_k (x_k - x_{k-1}) - m_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{k=i+1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= m_i'(x_i'-x_{i-1}) + m_i''(x_i - x_i') - m_i(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= m_i'(x_i'-x_{i-1}) + m_i''(x_i - x_i') - m_i(x_i'-x_{i-1}) - m_i(x_i - x_i') =$$

$$= (m_i' - m_i)(x_i' - x_{i-1}) + (m_i'' - m_i)(x_i - x_i') \geq 0,$$

ker je $m_i' \geq m_i$ in $m_i'' \geq m_i$.

Potem je $s(D') \geq s(D)$ in $S(D') \leq S(D)$ dokažemo podobno. ■

<u>Lema 2.</u> Naj bosta $D$ in $D'$ poljubni delitvi. Potem je $s(D) \leq S(D')$.

<u>DOKAZ.</u> Definiramo delitev $D'' = D \cup D'$, potem je $D''$ nadaljevanje $D$ in nadaljevanje $D'$. Po (lemi 1) je

$$s(D) \leq s(D'') \leq S(D'') \leq S(D'),$$

torej $s(D) \leq S(D')$. ■

Vemo: Množica spodnjih vsot je navzgor omejena z $M(b-a)$, množica zgornjih vsot je navzdol omejena z $m(b-a)$.

Obstajata torej $I_1 = \sup\{s(D);\, D \text{ delitev}\}$ in $I_2 = \inf\{S(D);\, D \text{ delitev}\}$.

Ker je $s(D) \leq S(D')$ za poljubni dve delitvi, je $I_1 \leq I_2$. Potem imenujemo $I_1$ SPODNJI DARBOUX-jev INTEGRAL, $I_2$ pa ZGORNJI DERBOUX-jev INTEGRAL.

<u>Definicija.</u> Omejena funkcija $f$ je Darbouxjevo integrabilna, če velja $I_1 = I_2$.

<u>Opomba.</u> Kasneje bomo videli, da je $f$ Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je Darboux-jevo integrabilna.

<u>Izrek.</u> Omejena funkcija $f$ je Darboux-jevo integrabilna natanko tedaj, ko za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja neka delitev, da je

$$S(D) - s(D) < \varepsilon.$$

<u>DOKAZ.</u> ($\Rightarrow$) Recimo, da je $f$ Darboux-jevo integrabilna (DI). Potem je $I_1 = I_2$. Tedaj je $\sup_D s(D) = \inf_D S(D) =: I$.

Obstaja $D_1$, da je $s(D_1) > I - \frac{\varepsilon}{2}$ in $D_2$, da je $S(D_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$.

Potem naj bo $D = D_1 \cup D_2$.

$I - \frac{\varepsilon}{2} < s(D_1) \leq s(D) \leq S(D) \leq S(D_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Torej $s(D), S(D) \in (I - \frac{\varepsilon}{2}, I + \frac{\varepsilon}{2})$,

torej je $S(D) - s(D) < (I + \frac{\varepsilon}{2}) - (I - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$.

ali $S(D) \geq I_2$, $I_1 \leq I_2$, torej je $I_2 - I_1 \leq S(D) - s(D) < \varepsilon$.
To je res za $\forall \varepsilon$, torej je $I_2 = I_1$. ∎

Lema 3. (a) Vsaka zvezna funkcija na $[a,b]$ je Darboux-jevo integrabilna.
(b) Vsaka monotona funkcija na $[a,b]$ je DI.

DOKAZ. (a) Naj bo $f$ zvezna na $[a,b]$. Potem je $f$ enakomerno zvezna, zato za $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0$: $|x-x'| < \sigma \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.
Izberemo delitev $D$, za katero velja: $|x_k - x_{k-1}| = \sigma_k < \sigma$ za $\forall k$.
Če izberemo $x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |x-x'| < \sigma \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
$\Rightarrow M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (strogi neenačaj je, ker je $f$ zvezna in zato $\exists x, x'$, da je $f(x) = M_k$, $f(x') = m_k$).
$S(D) - s(D) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\sigma_k < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\sigma_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^{n}\sigma_k = \varepsilon$.
Torej za $\forall \varepsilon > 0\ \exists D$, da je $S(D) - s(D) < \varepsilon$. Potem je $f$ Darboux-jevo integrabilna.

(b) Naj bo $f$ naraščajoča na $[a,b]$.
Potem je $m = f(a)$, $M = f(b)$. Za vsako delitev je tudi (BŠZS)
$m_k = f(x_{k-1})$, $M_k = f(x_k)$. Izberemo $D$, da je $\sigma_k < \sigma$.
$S(D) - s(D) = \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\sigma_k < \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\sigma <$
$< \sigma(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \sigma(f(x_n) - f(x_0)) =$
$= \sigma(f(b) - f(a)) < \varepsilon$ (Izberemo $\sigma = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$) ∎

a. V (a) leme 3 lahko privzamemo, da je $f$ zvezna na $(a,b)$ in definirana na $[a,b]$.
Naj bo $\eta > 0$, da je $a + \eta < b - \eta$. Na $[a+\eta, b-\eta]$ je $f$ zvezna.
Najdemo lahko delitev $a + \eta = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} = b - \eta$, da je $\sum_{k=2}^{n-1}(M_k - m_k)\sigma_k < \frac{\varepsilon}{2}$. Naj bo $D = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$.
$S(D) - s(D) = (M_1 - m_1)\eta + \sum_{k=2}^{n-1}(M_k - m_k)\sigma_k + (M_n - m_n)\eta <$
$< (M-m)\eta + \frac{\varepsilon}{2} + (M-m)\eta = 2(M-m)\eta + \frac{\varepsilon}{2}$. Če izberemo
$\eta > 0$ tako, da je $2(M-m)\eta < \varepsilon/2$, je ...

**Lema 4.** Naj bo $f$ omejena na $[a,b]$ in $a<c<b$. Tedaj je $f$ Darboux-jevo integrabilna $\overset{\text{na } [a,b]}{f \Leftrightarrow}$ $f$ je DI na $[a,c]$ in na $[c,b]$.

**DOKAZ.** ($\Rightarrow$) $f$ je DI na $[a,b]$ in $D$ delitev $[a,b]$, da je $S(D)-s(D)<\varepsilon$.

$D' := D \cup \{c\}$. Vemo, da je $S(D')-s(D') \leq S(D)-s(D) < \varepsilon$.

$D'$: $\underbrace{x_0 < x_1 < \cdots < \overset{c}{\overset{\shortparallel}{x_i}}}_{D''} < \cdots < x_n$. $D''$ je delitev $[a,c]$.

$\sum_{k=1}^{i}(M_k-m_k)\delta_k < \sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\delta_k = S(D')-s(D') < \varepsilon$, torej je $S_{[a,c]}(D'')-s_{[a,c]}(D'')<\varepsilon$. Potem je $f$ DI na $[a,c]$.

Podobno dobimo DI na $[c,b]$.

($\Leftarrow$) Naj bo $f$ integrabilna na $[a,c]$ in na $[c,b]$, $\varepsilon>0$. 4. 3. 2003

Potem obstaja delitev $D'$ intervala $[a,c]$, da je $s(D')-s(D')<\frac{\varepsilon}{2}$ in $D''$ na $[c,b]$, da je $S(D'')-s(D'')<\frac{\varepsilon}{2}$.

Naj bo $D$ delitev $[a,b]$, $D=D'\cup D''$. Potem je $S(D)=S(D')+S(D'')$, $s(D)=s(D')+s(D'')$, zato je $S(D)-s(D) = S(D')-s(D')+S(D'')-s(D'')<$ $<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Torej za $\forall \varepsilon>0$ $\exists D$ intervala $[a,b]$, da je $S(D)-s(D)<\varepsilon$. Torej je $f$ integrabilna na $[a,b]$. ∎

**Opomba.** Vemo že, da je ne samo vsaka zvezna funkcija na $[a,b]$ integrabilna, ampak tudi vsaka omejena na $[a,b]$, ki je zvezna na $(a,b)$.

**Lema 5.** Naj bo $f$ omejena na $[a,b]$ in naj obstajajo $c_i$, da je $a=c_0<c_1<\cdots<c_n=b$, da je $f$ zvezna na vsakem odprtem intervalu $(c_{i-1},c_i)$. Tedaj je $f$ integrabilna na $[a,b]$. (Po Darboux-ju)

**DOKAZ.** (posledica leme 4)

**Izrek.** Naj bo $f$ integrabilna po Darboux-ju na $[a,b]$, $\varepsilon>0$. Obstaja $\delta>0$, da je $S(D)-s(D)<\varepsilon$ za <u>vsako</u> delitev $D$, pri kateri je $\max_{1\leq k\leq n}\delta_k<\delta$.

**DOKAZ.** Naj bo $M=\sup\{f(x);\ x\in[a,b]\}$ in $m=\inf\{f(x);\ a\leq x\leq b\}$, $\varepsilon>0$. Če je $M=m$, je $f$ konstanta in ni kaj dokazovati. Naj bo torej $m\neq M$. Ker je $f$ integrabilna na $[a,b]$, obstaja $D_0$, da je $S(D_0)-s(D_0)<\frac{\varepsilon}{2}$. Naj ima delitev $D_0$ $r$ delilnih točk $x_i'$. Naj bo $\delta=\frac{\varepsilon}{2r(M-m)}$. Naj bo $D$ poljubna delitev $[a,b]$, pri kateri je $\max\delta_k<\delta$.

$S(D)-s(D) = \sum (M_k - m_k)\sigma_k = \sum{}' (M_k - m_k)\sigma_k + \sum{}'' (M_k-m_k)\sigma_k$.
(vsota $\sum'$ po tistih delnih intervalih, ki ne vsebujejo $x_i$, druga vsota $\sum''$ po preostalih delnih intervalih).
V drugi vsoti je največ $r$ členov, vsak je manjši ali enak $(M-m)\sigma = \frac{\varepsilon}{2r}$, torej je druga vsota $\sum'' < \frac{\varepsilon}{2r} r = \frac{\varepsilon}{2}$.
V prvi vsoti: $D_0 \cup D$ je nadaljevanje delitve $D_0$, zato je po lemi 1 $S(D_0 \cup D) - s(D_0 \cup D) \leq S(D_0) - s(D_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Vsota $\sum'$ je del vsote $S(D_0 \cup D) - s(D_0\cup D)$ (namreč tisti del, ki se nanaša na podintervale iz $D$, ki ne vsebujejo točk iz $D_0$).
Potem je $\sum' < \frac{\varepsilon}{2}$. $S(D)-s(D) = \sum' + \sum'' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

<u>Izrek.</u> Funkcija $f$ na $[a,b]$ je integrabilna po Riemannu natanko tedaj, ko je integrabilna po Darboux-ju. Tedaj sta integrala enaka.

<u>Opomba.</u> Posledica je, da vsi dokazani izreki za DI veljajo tudi za RI. Od tu naprej govorimo zato le o integrabilnosti.

<u>DOKAZ</u>. (a) Naj bo $f$ integrabilna po Riemannu in $I$ njen Riemannov integral, $\varepsilon > 0$ poljuben. Po definiciji RI obstaja $\sigma > 0$, da je $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sigma_k - I\right| < \varepsilon/3$ za vsako delitev $D$, pri kateri je $\max \sigma_k < \sigma$. (za vsako izbiro $\xi_k$)
Fiksirajmo tako delitev $D$. Tedaj je $\left|\sum_{k=1}^{n} m_k\sigma_k - I\right| \leq \varepsilon/3$.
(Če bi bila $\geq \frac{\varepsilon}{3}$, bi bila $\left|\sum_{k=1}^{n} m_k \sigma_k - I\right| > \frac{\varepsilon}{3} + \eta$, $\eta > 0$. Ker na $k$-tem intervalu lahko izberemo $\xi_k$ tako, da je $f(\xi_k) - m_k$ poljubno majhen, lahko $\xi_k$ izberemo tako, da dosežemo $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sigma_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\sigma_k\right| <$ , od tu sledi, da je $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sigma_k - I\right| =$
$= \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sigma_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\sigma_k + \sum_{k=1}^{n} m_k\sigma_k - I\right| \geq \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n} m_k\sigma_k - I\right|}_{>\varepsilon/3+\eta} - \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sigma_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\sigma_k\right|}_{<\eta}$
$> \frac{\varepsilon}{3} + \eta - \eta = \frac{\varepsilon}{3}$.)
Enako pokažemo, da je $\left|\sum_{k=1}^{n} M_k\sigma_k - I\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Sledi: $|S(D) - s(D)| = \left|\sum_{k=1}^{n} M_k\sigma_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\sigma_k\right| \leq$
$\left|\sum_{k=1}^{n} M_k\sigma_k - I + I - \sum_{k=1}^{n} m_k\sigma_k\right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Sklep: za vsak $\varepsilon > 0$ smo našli delitev $D$, da je $S(D) - s(D) < \varepsilon$, kar pomeni, da je $f$ integrabilna po Darboux-ju.
Sledi tudi, da je DI enak RI ($I$).

(b) Naj bo $f$ integrabilna po Darboux-ju in $I' = I_1 = I_2$ njen Darboux-jev integral. Po prejšnjih izrekih $\exists \delta > 0$, da za vsako delitev $D$, kjer je $\max \delta_k < \delta$ velja: $S(D) - s(D) < \varepsilon$.

Ker je $s(D) = \sum_{k=1}^{n} m_k \delta_k$ in $S(D) = \sum_{k=1}^{n} M_k \delta_k$ in $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$ za vsak $\xi_k \in x_{k-1}, x_k]$, je $m_k \delta_k \leq f(\xi_k)\delta_k \leq M_k \delta_k$, zato:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \delta_k .$$

$$s(D) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k \leq S(D),$$

$s(D) \leq I' \leq S(D)$, ker je $S(D) - s(D) < \varepsilon$, je

$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k - I' \right| < \varepsilon$ za vsako delitev $D$, za katero je $\max \delta_k < \delta$ in za vsako izbiro $\xi_k$. Potem je $f$ RI na $[a, b]$.

RI je enak DI ($I'$). ■

<u>Izrek.</u> Naj bo $f$ integrabilna na $[a, b]$ in $g$ zvezna na $[m, M]$, kjer je $m = \inf\{f(x); a \leq x \leq b\}$ in $M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$.

Tedaj je $F = g \circ f$ integrabilna na intervalu $[a, b]$.

6.3.2003

<u>DOKAZ</u>. Če je $m = M$, je $F = \text{konst.}$

Naj bo $m \neq M$, $\varepsilon > 0$. Ker je $g$ na $[m, M]$ zvezna, je $g$ na $[m, M]$ enakomerno zvezna, torej obstaja $\delta > 0$, da je $|g(u') - g(u)| < \varepsilon$ za $|u' - u| < \delta$ in $u, u' \in [m, M]$.

Ker je $f$ integrabilna na $[a, b]$, obstaja $D$ int $[a, b]$, da je $S_f(D) - s_f(D) < \varepsilon\delta$.$^{(+)}$ $S_f(D) - s_f(D) = \sum'(M_k - m_k)\delta_k + \sum''(M_k - m_k)\delta_k$ kjer je $\sum'$ glede na tiste intervale delitve $D$, za katere je $M_k - m_k < \delta$ in $\sum''$ za ostale. Zaradi (+) je vsaka od teh vsot manjša od $\varepsilon\delta$.

Oglejmo si $\sum''$. $M_k - m_k \geq \delta$. $\sum'' \delta\delta_k \leq \sum''(M_k - m_k)\delta_k < \varepsilon\delta$.

Sledi $\sum'' \delta_k < \varepsilon$.$^{(*)}$ (t.j. vsota dolžin vseh intervalov druge vrste je manjša od $\varepsilon$).

Naj bo $g \circ f = F$ in $\overline{m}_k = \inf\{F(x); x_{k-1}, x_k\}$, $\overline{M}_k = \sup\{F(x); \text{na } [x_{k-1}, x_k]\}$

Na $k$-tem intervalu so vrednosti $f$ med $m_k$ in $M_k$. Za intervale $\sum'$ (t.j. $M_k - m_k < \delta$) za vsaka $x, x'$ velja: $|F(x') - F(x)| =$

$= |g(f(x')) - g(f(x))| < \varepsilon$ $(|f(x') - f(x)| \leq M_k - m_k < \delta)$. Za intervale prve vrste je torej $\overline{M}_k - \overline{m}_k \leq \varepsilon$.

$S_F(D)-s_F(D)=\sum{}'(\overline{M}_k-\overline{m}_k)\delta_k+\sum{}''(\overline{M}_k-\overline{m}_k)\delta_k$. Za $\sum{}'$ (kjer je $\overline{M}_k-\overline{m}_k\le\varepsilon$) je $\sum{}'(\overline{M}_k-\overline{m}_k)\delta_k\le\varepsilon\underline{\sum{}'\delta_k}\le\varepsilon(b-a)$. Za $\sum{}''$ je $\overline{M}_k-\overline{m}_k\le\overline{M}-\overline{m}$, kjer sta $\overline{M}$ in $\overline{m}$ sup. in inf. na $[a,b]$, $\sum{}''(\overline{M}-\overline{m})\delta_k=(\overline{M}-\overline{m})\underline{\sum{}''\delta_k}<(\overline{M}-\overline{m})\varepsilon^{(*)}$.

Potem je $S_F(D)-s_F(D)<\varepsilon(b-a)+(\overline{M}-\overline{m})\varepsilon=\varepsilon(b-a+\overline{M}-\overline{m})$. Ker je bil $\varepsilon$ poljubno majhen, je za vsak $\tau>0$ mogoče najti delitev $D$ $[a,b]$, da je $S_F(D)-s_F(D)<\tau$. Potem je $F$ res integrabilna na $[a,b]$. ■

<u>Posledica.</u> Če je $f$ integrabilna na $[a,b]$, sta na $[a,b]$ integrabilni $x\mapsto|f(x)|$ in $x\mapsto[f(x)]^n$ $(n=1,2,\dots)$

<u>DOKAZ.</u> (i) $g(u)=|u|$, (ii) $g(u)=u^n$.

## 4. LASTNOSTI DOLOČENEGA INTEGRALA

(1) $f(x)=c$ je zvezna, zato integrabilna na vsakem $[a,b]$

- Riemannove vsote: $\sum f(\xi_i)\delta_i=c\sum\delta_i=\underline{c(b-a)}$

so vse enake $c(b-a)$, zato je tudi njihova lim

$$\boxed{\int_a^b c\,dx=c(b-a)}$$

<u>Izrek.</u> Naj bosta $f$ in $g$ integrabilni na $[a,b]$. Tedaj so $f+g$, $Af$, $fg$ tudi integrabilne funkcije (A je konstanta). <u>Velja:</u>

$$\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g,\qquad(1)$$

$$\int_a^b Af(x)\,dx=A\int_a^b f(x)\,dx,\qquad(2)$$

$$f(x)\ge0 \text{ za } \forall x\in[a,b]\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\ge0,\qquad(3)$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx.\qquad(4)$$

<u>Opomba.</u> Iz (3) sledi še: če sta $f,g$ integrabilni na $[a,b]$ in je $f(x)\le g(x)$ $\forall x\in[a,b]$, je $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$.
$(h=g-f,\ 3\Rightarrow$ q.e.d$)$

VI. VRSTE

DOKAZ. Naj bosta $f, g$ integrabilni na $[a,b]$. RV za $f+g$:

$$\sum_{k=1}^{n}(f+g)(\xi_k)\delta_k = \sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k)+g(\xi_k))\delta_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k}_{RV(f)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\delta_k}_{RV(g)}.$$

Ker je $f$ integrabilna, je prva vsota $RV(f)$ poljubno blizu $\int_a^b f(x)dx$, če je le $\max \delta_k$ dovolj majhen. Podobno za $g$.
Potem je $RV(f+g)$ poljubno blizu $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. $\Rightarrow$ (1)

Enako za (2): $\sum_{k=1}^{n}(Af)(\xi_k)\delta_k = \sum_{k=1}^{n} Af(\xi_k)\delta_k = A\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k \ldots$

Integrabilnost produkta. $f, g$ integrabilni $\Rightarrow f+g, f^2, g^2, (f+g)^2$ int. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2) = fg$ je integrabilna.

$f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, $f$ integrabilna, RV $\sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(\xi_k)}_{\geq 0}\underbrace{\delta_k}_{\geq 0} \geq 0$, torej je $\int_a^b f(x)dx$ (kot limita) tudi nenegativen $\Rightarrow$ (3)

$f$ integrabilna na $[a,b]$, $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k\right| \underset{T.N.}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\delta_k$ (RV za $|f|$).
$|f|$ je integrabilna, zato je $RV(|f|)$ poljubno blizu $\int_a^b |f(x)|dx$, $RV(f)$ je poljubno blizu $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$. $\Rightarrow$ (4) ■

Izrek 2. Naj bo $f$ integrabilna na $[a,b]$ in $a<c<b$. Tedaj je $f$ integrabilna na $[a,c]$ in $[c,b]$ in je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

DOKAZ. Integrabilnost sledi iz (leme 4). Zapišemo RV za $f$ na $[a,b]$, $c$ je ena od delilnih točk:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k = \underbrace{\sum{}' f(\xi_k)\delta_k}_{\text{po } [a,c]} + \underbrace{\sum{}'' f(\xi_k)\delta_k}_{\text{po } [c,b]}.$$ $\Sigma'$ in $\Sigma''$ sta RV za

$f$ na $[a,c]$ in $[c,b]$, $\Sigma$ je RV za $f$ na $[a,b]$. Za $\max\delta_k \to 0$, v limiti gre $\Sigma \to \int_a^b f(x)dx$, $\Sigma' \to \int_a^c f(x)dx$, $\Sigma'' \to \int_c^b f(x)dx$, torej $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. ■

Dogovor. $\int_a^a f(x)dx = 0$
$a>b$, $f$ int. na $[b,a]$: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Opomba. Ob tem dogovoru velja formula

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

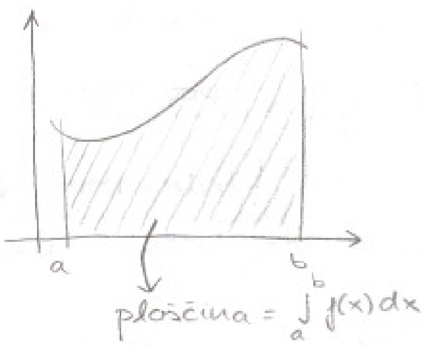
za poljuben $c$ in ne samo za $a<c<b$, če je le $f$ integrabilna na največjem od $[a,c]$, $[b,c]$, ...

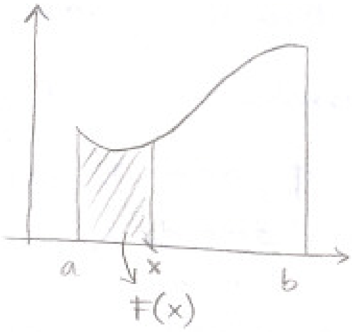
## 5. DOLOČENI INTEGRAL KOT FUNKCIJA ZGORNJE MEJE, OSNOVNI IZREK INTEGRALSKEGA RAČUNA

$\int_a^b f(x)\,dx$ je število, odvisno od $f$ in $[a,b]$. $\int_a^b f$

Naj bo $f$ integrabilna na $[a,b]$. Vemo že, da je tedaj $f$ integrabilna na $[a,x]$ za vsak $x$, $a<x<b$.

Definirajmo: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ (to je funkcija, $F(a)=0$, $F(b)=\int_a^b f(x)\,dx$).




11. 3. 2003

**Izrek.** Naj bo $f$ integrabilna na $[a,b]$. Tedaj je funkcija $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ na intervalu $[a,b]$ zvezna. Če je v kakšni točki $x$ integrand $f$ zvezna, je v tej točki $F$ odvedljiva funkcija in velja $F'(x)=f(x)$.

DOKAZ. Vemo, da je $f$ na $[a,b]$ omejena, t.j. $|f(x)|\le M$ za vse $x\in[a,b]$, $M<\infty$. Če je $x,x'\in[a,b]$, $x<x'$, je

$$F(x')-F(x)=\int_a^{x'} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x'} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=$$

$=\int_x^{x'} f(t)\,dt$. Potem je $|F(x')-F(x)|=\left|\int_x^{x'} f(t)\,dt\right|\le\int_x^{x'}|f(t)|\,dt\le$

$\le\int_x^{x'} M\,dt=M(x'-x)$.

Torej velja za poljubna $x,x'\in[a,b]$: $|F(x')-F(x)|\le M|x'-x|$.

(Od tod sledi celo enakomerna zveznost.) Naj bo $x\in[a,b]$ in $\varepsilon>0$. Naj bo $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$. Če je $x'\in[a,b]$, $|x'-x|<\delta$, je $|F(x')-F(x)|\le M|x'-x|<M\delta=M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$. Potem je $F$ zvezna v $x$.

Naj bo $f$ zvezna v $x\in(a,b)$. Pišimo

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=$$

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt.$$

Ker je $f$ zvezna v $x$, za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, da je $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$, če je $|t-x| < \delta$, $t \in [a,b]$. Če je torej $|h| < \delta$ in $h > 0$, je

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt\right| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt < \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\varepsilon\,dt = \varepsilon\cdot\frac{1}{h}h = \varepsilon.$$

$(0 < h < \delta,\ x < t < x+h < x+\delta,\ |t-x| < \delta \Rightarrow |f(t)-f(x)| < \varepsilon)$ Podobno za $h < 0$.

Sklep: $\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt\right|$ je poljubno majhno, če je le $h$ dovolj majhen. Ko gre $h \to 0$, je $\lim_{h\to 0}(F(x+h)-F(x))/h = f(x)$, kar pomeni, da je $F$ v točki $x$ odvedljiva in $F'(x) = f(x)$.

V robnih točkah: $x = a$ ali $x = b$, premislek je isti, sklep velja za desni odvod v $a$ in levi odvod v $b$. ∎

<u>Posledica</u>. Vsaka zvezna funkcija na $[a,b]$ ima primitivno funkcijo, t.j.; če je $f$ zvezna na $[a,b]$ obstaja odvedljiva funkcija $F$ na $[a,b]$, za katero je $F'(x) = f(x)$ za vse $a \le x \le b$.

<u>DOKAZ</u>. Drugi del zgornjega izreka uporabimo v vsaki točki $a \le x \le b$. ∎

<u>Opomba</u>. Nima vsaka integrabilna funkcija primitivne funkcije (glej začetne primere). Če integrabilna funkcija primitivno funkcijo ima, pa velja:

<u>Osnovni izrek integralskega računa</u>. Naj bo $f$ integrabilna funkcija na $[a,b]$ in naj ima $f$ primitivno funkcijo $F$.

Tedaj velja: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).}$

<u>Opomba</u>. Izrek (Formula) velja za vsako zvezno funkcijo $f$ (saj vemo, da zvezna $f$ vedno ima primitivno funkcijo).

<u>DOKAZ.</u> (le za zvezne funkcije $f$) Naj bo $f$ zvezna funkcija in $F$ neka njena primitivna funkcija. Tedaj je $F$ zvezna na $[a,b]$, odvedljiva na $(a,b)$ in velja $F'(x) = f(x)$ za vse $x, a \le x \le b$. Naj bo $D$ poljubna

delitev intervala $[a,b]$: $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Po Lagrange-evem izreku obstajajo $\xi_1, \dots, \xi_n$, da je $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ in

$$\frac{F(x_1)-F(x_0)}{x_1-x_0} = F'(\xi_1) = f(\xi_1), \quad \frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1} = F'(\xi_2) = f(\xi_2), \dots,$$

$$\frac{F(x_n)-F(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} = F'(\xi_n) = f(\xi_n).$$ Potem je

$$F(x_n) - F(x_0) = \overbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}^{\text{R.V. za } \int_a^b f(x)\,dx}$$

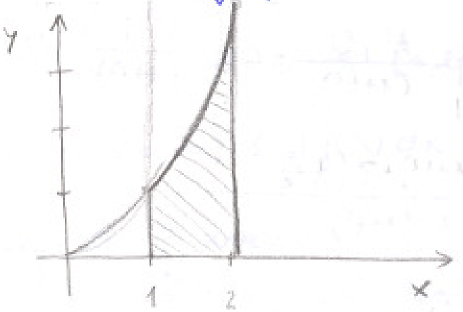
$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

za vsako delitev D. Če je $\max \delta_k \to 0$, konvergira desna stran proti $\int_a^b f(x)\,dx$. Potem je res

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

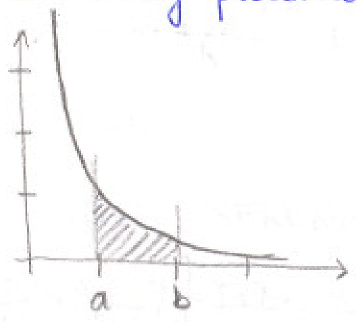
<u>Oznaka.</u> $F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$

<u>Primer.</u> Izračunaj ploščino lika, omejenega z $x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=x^2$.




$$p = \int_1^2 x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \tfrac{1}{3}\cdot 2^3 - \tfrac{1}{3}\cdot 1^3 = \tfrac{8}{3} - \tfrac{1}{3} = \underline{\underline{\tfrac{7}{3}}}$$

<u>Primer 2.</u> Izračunaj ploščino lika, omejenega z $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x=a$, $x=b$, $y=0$.



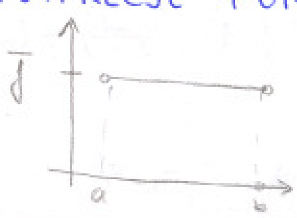

(a) <u>1. način</u> – glej naprej

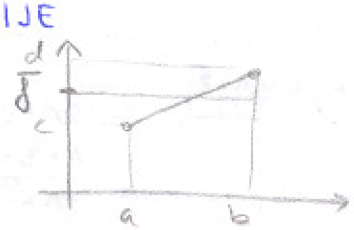
(b) <u>2. način</u>

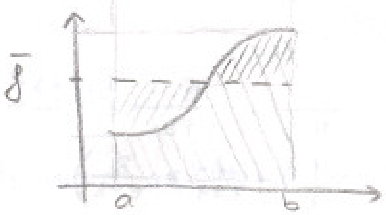
$$p = \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \underline{\underline{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}}$$

<u>Opomba.</u> Formula $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ se včasih imenuje LEIBNIZ-evo pravilo.

POVPREČJE FUNKCIJE



$\bar{f}$ ... povprečna vrednost funkcije na $[a,b]$

$$\underbrace{\bar{f}\cdot(b-a)}_{\substack{\text{ploščina}\\ \text{pravokotnika}}} = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\substack{\text{ploščina}\\ \text{lika pod krivuljo}}}$$

<u>Definicija</u>. Naj bo $f$ integrabilna na $[a,b]$. Povprečna vrednost (povprečje) funkcije $f$ na $[a,b]$ je
$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

<u>Primer</u>. Povprečna temparatura.


$$\frac{f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_{m-1})}{m} =$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[f(x_0)\frac{b-a}{n}+\dots+f(x_{m-1})\frac{b-a}{n}\right] =$$
$$= \sum f(\xi_k)\delta_k \text{ ... Riemannova vsota}$$

V limiti dobimo
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Naj bo $f$ integrabilna na $[a,b]$, $m=\inf f$, $M=\sup f$. Vemo: $-\infty < m \le M < \infty$

$m \le f(x) \le M$ za $x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$

<u>Izrek</u>. Naj bo $f$ zvezna na $[a,b]$. Tedaj obstaja vsaj ena točka $\xi$, $a\le\xi\le b$, za katero je $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

<u>DOKAZ</u>. Vemo, da je $\bar{f}$ med $m$ in $M$. Ker je $f$ zvezna na $[a,b]$, zavzame vse vrednosti med $m$ in $M$ (vključno), zato zavzame tudi $\bar{f}$. ■

## UVEDBA NOVE SPREMENLJIVKE V DOLOČENI INTEGRAL, PARCIALNA INTEGRACIJA

<u>Izrek</u>. Naj bo $f$ zvezna na $[a,b]$ in $\varphi$ zvezno odvedljiva na $[\alpha,\beta]$. Naj bo $a\le\varphi(t)\le b$ za vse $t$, $\alpha\le t\le\beta$ in naj bo $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.
Tedaj je $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$.

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

vedno res, tudi če se obrnjo

<u>Opomba</u>. Ni nujno, da $\varphi$ ves čas narašča, le biti mora $a\le\varphi(t)\le b$ za $\forall t$, $\alpha\le t\le\beta$. meje

Opomba. Tej formuli se reče uvedba nove spremenljivke v določeni integral.

DOKAZ. Naj bo $F$ primitivna funkcija od $f$ (obstaja, saj je $f$ zvezna). Kompozitum $F(\varphi(t)) = G(t)$ je definirana in odvedljiva na $[\alpha, \beta]$ (ker ima $\varphi$ vrednosti v $D = [a, b]$ in zato, ker sta $\varphi$ in $F$ odvedljivi, velja $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$).

Po OIIR je

$$\int_\alpha^\beta \underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}_{G'} = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Če je $\varphi(\alpha) = b$ in $\varphi(\beta) = a$, je $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

13. 3. 200

Izrek. Naj bo $f$ integrabilna in naj bo $\varphi$ zvezno odvedljiva na $[\alpha, \beta]$. Naj bo $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ in $\varphi$ naraščajoča na $[\alpha, \beta]$. Tedaj je $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ integrabilna na $[\alpha, \beta]$ in velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

DOKAZ. Naj bo $D$ delitev intervala $[\alpha, \beta]$, $D = \{\alpha = t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta\}$ in naj bo $x_i = \varphi(t_i)$. Ker $\varphi$ narašča, je $a = x_0 \leq \dots \leq x_n = b$ delitev intervala $[a, b]$ (čeprav lahko na manjše število intervalov). $x_k - x_{k-1} = \delta_k \geq 0$, $t_k - t_{k-1} = \eta_k > 0$

Ogledamo si Riemannovo vsoto za $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na $[\alpha, \beta]$:

$$\sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k))\varphi'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) \qquad (1)$$

Naj bo $\varphi(\tau_k) = \xi_k$. Ker je $\varphi$ naraščajoča, je $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$.

Ogledamo si še RV:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\cdot(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\underbrace{\left(\frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}(t_k - t_{k-1})\right)}_{\substack{= \varphi'(\overline{\tau}_k),\ t_{k-1} \leq \overline{\tau}_k \leq t_k \\ \text{(Lagrange)}}} = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k))\varphi'(\overline{\tau}_k)(t_k - t_{k-1}) \qquad (2)$$

Primerjamo (1) in (2).

Odštejemo (1) − (2):

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k))\left(\varphi'(\tau_k)-\varphi'(\bar\tau_k)\right)(t_k-t_{k-1}).$$

Ker je $\varphi'$ zvezna na $[\alpha,\beta]$, je $\varphi'$ na $[\alpha,\beta]$ enakomerno zvezna. Naj bo $\varepsilon>0$. Obstaja torej $\delta>0$, da je $|\varphi'(\tau)-\varphi'(\bar\tau)|<\varepsilon$, čim je $|\tau-\bar\tau|<\delta$, $\tau,\bar\tau\in[\alpha,\beta]$.

Naj bo naša delitev $\alpha=t_0\le\dots<t_n=\beta$ tako fina, da bo dolžina najdaljšega intervala manjša od $\delta$. Ker $\tau_k$ in $\bar\tau_k$ ležita med $t_{k-1}$ in $t_k$, je $|\varphi'(\tau_k)-\varphi'(\bar\tau_k)|<\varepsilon$ za vsak $k$.

Torej je $|(1)-(2)|\le\sum_{k=1}^{n}|f(\varphi(\tau_k))|\cdot\varepsilon(t_k-t_{k-1})\le\varepsilon\cdot M\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})=$
$=\varepsilon\cdot M(\beta-\alpha)$, kjer je $M=\sup\{|f(x)|;\ a\le x\le b\}$.

Torej: če je $\max \eta_k$ dovolj majhen, je $\sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k))\varphi'(\tau_k)(t_k-t_{k-1})$ poljubno blizu $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$, ki je zaradi integrabilnosti $f$ poljubno blizu $\int_a^b f(x)\,dx$.

Torej je vsota (1) poljubno blizu $\int_a^b f(x)\,dx$, če je le delitev $t_i$ dovolj fina. Torej je $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ integrabilna na $[\alpha,\beta]$ in je

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx. \blacksquare$$

<u>Primer</u>. $\int_1^2 \sin(2x-5)\,dx = ?$

$2x-5=u \qquad x=1\ \dots\ u=-3$

$2dx=du \qquad x=2\ \dots\ u=-1$

$$? = \int_{-3}^{-1}\tfrac12\sin u\,du=\tfrac12\int_{-3}^{-1}\sin u\,du=\tfrac12\left[\cos u\right]_{-3}^{-1}=$$

$$=\underline{\tfrac12\left(-\cos(-1)+\cos(-3)\right)}$$

<u>Izrek</u>. Naj bosta $u$ in $v$ zvezno odvedljivi funkciji na $[a,b]$. Tedaj je

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=\left(u(b)\cdot v(b)-u(a)v(a)\right)-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx,$$

t.j. $\int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du.$

DOKAZ. Velja: $\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ za vse $a \le x \le b$, zvezne.

Integriramo:

$$\int_a^b \left(u(x)\,v(x)\right)' dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

$\parallel \leftarrow$ osnovni izrek IR.

$u(b)v(b) - u(a)v(a)$

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left(u(b)v(b) - u(a)v(a)\right) - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Primer. $\int_1^3 x e^x dx = ?$

$u = x \qquad du = dx$

$e^x dx = dv \qquad v = e^x$

$$= \left[x \cdot e^x\right]_1^3 - \int_1^3 e^x dx = 3 \cdot e^3 - e - \left[e^x\right]_1^3 =$$

$$= 3 \cdot e^3 - e - e^3 + e = \underline{\underline{2e^3}}$$

## 6. IZREKI O POVPREČJIH

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \ \ldots \text{ povprečje } f \text{ na } [a,b]$$

Izrek. Naj bosta $f$ in $g$ integrabilni na $[a,b]$, $m \le f(x) \le M$ $(a \le x \le b)$ in naj bo $g$ povsod istega znaka. Tedaj je

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

kjer je $m \le \mu \le M$.

DOKAZ. $m \le f(x) \le M$, recimo, da je $g(x) \ge 0$. Potem je

$m\,g(x) \le f(x)g(x) \le M g(x)$ in je

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Če je $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, je dober vsak $\mu$. Če je $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ (nikoli ni $< 0$, saj je $g$ pozitivna!), delimo:

$$m \le \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}}_{\mu} \le M$$

in označimo $\mu$. $\blacksquare$

Podobno, če je $g(x) \le 0$.