DOKAZ. Velja: $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ ...

Integriramo:

$$\int_a^b (u(x)\,v(x))'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

$\parallel \leftarrow$ osnovni izrek IR.

$u(b)v(b) - u(a)v(a)$

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big(u(b)v(b) - u(a)v(a)\big) - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Primer. $\int_1^3 x e^x dx = ?$

$u = x \qquad du = dx$

$e^x dx = dv \qquad v = e^x$

$$= [x\cdot e^x]_1^3 - \int_1^3 e^x dx = 3\cdot e^3 - e - [e^x]_1^3 =$$

$$= 3\cdot e^3 - e - e^3 + e = \underline{\underline{2e^3}}$$

6. IZREKI O POVPREČJIH

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \;\ldots\; \text{povprečje } f \text{ na } [a,b]$$

Izrek. Naj bosta f in g integrabilni na $[a,b]$, $m \le f(x) \le M$ $(a \le x \le b)$ in naj bo g povsod istega znaka. Tedaj je

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

kjer je $m \le \mu \le M$.

DOKAZ. $m \le f(x) \le M$, recimo, da je $g(x) \ge 0$. Potem je

$m\,g(x) \le f(x)g(x) \le M g(x)$ in je

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Če je $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, je dober vsak μ. Če je $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ (nikoli ni <0, saj je g pozitivna!), delimo:

$$m \le \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}}_{\mu} \le M$$

in označimo μ. $\blacksquare$

Podobno, če je $g(x) \le 0$.

Posledica. Če je f zvezna, obstaja ξ, da je $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$.

(Zvezna f zavzame vse vrednosti, $\mu = f(\xi)$)

Posledica. Za $g \equiv 1$ in f zvezna, obstaja ξ, $a \le \xi \le b$, da je

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

(Že znani izrek o povprečni vrednosti).

Izrek. Naj bo f zvezna na $[a,b]$ in g nenegativna padajoča in zvezno odvedljiva na $[a,b]$. Tedaj obstaja ξ, $a \le \xi \le b$, da je

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

DOKAZ. Naj bo F primitivna funkcija funkcije f izbrana tako, da je $F(a)=0$, torej $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Funkciji F in g sta zvezno odvedljivi.

$$(*) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\underbrace{g(x)}_{u}\,\overset{dv}{dx} =$$

$$= \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b g'(x)F(x)\,dx = F(b)g(b) - \underbrace{F(a)}_{0}g(a) -$$

$$- \int_a^b g'(x)F(x)\,dx = F(b)g(b) - \int_a^b g'(x)F(x)\,dx.$$

Po predpostavki g pada, zato je $-g' \ge 0$ na $[a,b]$.

Uporabimo posledico: $\int_a^b F(x)g'(x)\,dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)\,dx$ za nek ξ, $a \le \xi \le b$.

$$F(\xi)\int_a^b g'(x)\,dx = F(\xi)\big(g(b)-g(a)\big)$$

Iz $(*)$ je $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(b)g(b) - F(\xi)\big(g(b)-g(a)\big) =$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Naj bo $m = \min f$, $M = \max f$ na $[a,b]$. Ker je $g(b) \ge 0$, je $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le Mg(b) - M\int_a^b g'(x)\,dx = Mg(b) - M\big(g(b)-g(a)\big) \le$ $\le Mg(a)$. Podobno: $f \ge m$ in je $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \ge mg(a)$.

Potem je $mg(a) \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le Mg(a)$. Če je $g(a)=0$, je dober vsak ξ. Če je $g(a)>0$, je $m \le \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M$.

F je zvezna, torej zavzame tudi to vrednost: $\exists \xi \ni$:

$$\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

18. 3. 2003

<u>Uporaba.</u> $\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx$, $0<a<b$

$f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x\,dx = \frac{1}{a}(-\cos x)\Big|_a^\xi = \frac{1}{a}(-\cos\xi+\cos a)$$

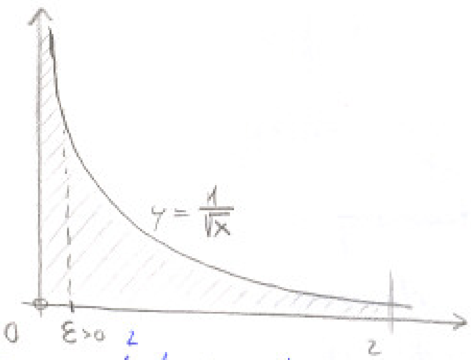
Sledi: $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{2}{a}$ za vsaka a, b $(0<a<b)$.

(Nadaljevanje na koncu naslednjega poglavja!)

7. POSPLOŠENI INTEGRALI (IZLIMITIRANI INTEGRALI, NEPRAVI INTEGRALI)

Če je funkcija f na zaprtem intervalu $[a,b]$ integrabilna, tedaj je na $[a,b]$ omejena.

Recimo, da f v krajišču a ni omejena (npr. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ na $[0,2]$).



Vprašanje: Kolika je ploščina (neomejenega!) lika, ki ga omejujejo premice $x=0$, $x=2$, $y=0$ in krivulja $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Problem: $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (kandidat za ploščino) ne obstaja, saj $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ni omejena. Znamo pa za vsak $\varepsilon>0$ izračunati ploščino lika, omejenega z $x=\varepsilon$, $x=2$, $y=0$, $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Enaka je $\int_\varepsilon^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Za točno ploščino vzamemo $\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^2 =$

$= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left[2\sqrt{2}-2\sqrt{\varepsilon}\right] = 2\sqrt{2}$.

Ista naloga za $f(x)=\frac{1}{x}$. $S = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left[\ln x\right]_\varepsilon^2 =$

$= \lim_{\varepsilon\searrow 0}(\ln 2-\ln\varepsilon) \to \infty$ (narašča čez vse meje), torej limita ne obstaja.

Definicija. Naj bo f definirana na $(a,b]$. Pravimo, da f ni omejena v točki a (ali v okolici a), če je neomejena na vsakem intervalu $(a,a+\sigma)$, $\sigma>0$.
Če je f definirana na $[a,b)$, pravimo, da f ni omejena v b, če je neomejena na vsakem intervalu $(b-\sigma,b)$, $\sigma>0$.
Naj bo $a<c<b$ in f definirana na $[a,b]\setminus\{c\} = [a,c)\cup(c,b]$. f ni omejena v točki c, če je neomejena na $(c-\sigma,c)\cup(c,c+\sigma)$ za vse $\sigma>0$.

Primer. $f(x)=\frac{1}{x}$ na $(0,b]$ ni omejena v 0, na $[-3,0)$ ni omejena v 0, na $[-3,3]\setminus\{0\}$ ni omejena v 0.

Opomba. Če je f integrabilna na $[a,b]$, tedaj je $\lim_{\sigma\searrow 0}\int_a^{b-\sigma} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ in $\lim_{\sigma\searrow 0}\int_{a+\sigma}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

(Če le ima f primitivno funkcijo: vemo, da je F zvezna!)

$$\lim_{\sigma\searrow 0}\int_a^{b-\sigma} f(x)\,dx = \lim_{\sigma\to 0}\left[F(b-\sigma)-F(a)\right] \overset{\text{zveznost } f}{=} F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(Če f nima primitivne funkcije, je to še vedno res zaradi zveznosti integrala kot funkcije zg. meje.)

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, Φ zvezna, $\lim_{x\nearrow b}\Phi(x)=\Phi(b)$, t.j.

$$\lim_{x\nearrow b}\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Definicija. (Posplošeni integral) Naj bo f definirana na $(a,b]$, neomejena v a in naj bo integrabilna na vsakem intervalu $[c,b]$, $a<c<b$. Če limita

$$\lim_{\sigma\searrow 0}\int_{a+\sigma}^{b} f(x)\,dx$$

obstaja, jo imenujemo POSPLOŠENI INTEGRAL funkcije f na $[a,b]$ in označimo z

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\sigma\searrow 0}\int_{a+\sigma}^{b} f(x)\,dx.$$

- Podobno: če je f definirana na $[a,b)$, neomejena v b in integrabilna na $[a,c]$, $c<b$ in če limita

$$\lim_{\delta\searrow 0}\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

obstaja, jo imenujemo posplošeni integral funkcije f na $[a,b]$ in pišemo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\searrow 0}\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx .$$

- Naj bo f definirana na $[a,c)\cup(c,b]$, kjer je $a<c<b$ in naj bo f neomejena v c. Naj bo f integrabilna na $[a,d]$, $\forall d$, $a<d<c$ in na $[d,b]$ za $\forall d$, $c<d<b$. Če limiti

$$\lim_{\delta\searrow 0}\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx \quad \text{in} \quad \lim_{\delta\searrow 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

obstajata, tedaj njuno vsoto imenujemo POSPLOŠENI INTEGRAL funkcije f na $[a,b]$ in označimo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\searrow 0}\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \lim_{\delta\searrow 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

<u>Primer.</u> $\int_{-2}^{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = ?$ Je zvezna povsod razen v 0, kjer je neomejena.

$$\int_{-2}^{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{\delta\searrow 0}\int_{-2}^{0-\delta}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \lim_{\delta\searrow 0}\int_{0+\delta}^{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx =$$

$$= \lim_{\delta\searrow 0}\left[\tfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{-2}^{0-\delta} + \lim_{\delta\searrow 0}\left[\tfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{0}^{3} =$$

$$= \lim_{\delta\searrow 0}\left[\tfrac{3}{2}(-\delta)^{\frac{2}{3}} - \tfrac{3}{2}(-2)^{\frac{2}{3}}\right] + \lim_{\delta\searrow 0}\left[\tfrac{3}{2}\,3^{\frac{2}{3}} - \tfrac{3}{2}\,\delta^{\frac{2}{3}}\right] =$$

$$= \lim_{\delta\searrow 0}\left[\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{\delta^2} - \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{4} + \tfrac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{9} - \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{\delta^2}\right] =$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)}}$$

<u>Opomba.</u> Če je slučajno primitivna funkcija F funkcije f znana, je $\lim_{\delta\searrow 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta\searrow 0}[F(b)-F(a+\delta)]$, torej $\int_a^b f(x)dx$ obstaja $\Leftrightarrow$ obstaja $\lim_{\delta\searrow 0}F(a+\delta)$.

Kaj pa, če F ne poznamo? V nekaterih primerih lahko vnaprej povemo, če integral obstaja.

<u>Izrek</u>. Naj bo g zvezna funkcija na $[a,b]$. Tedaj $\int_a^b \frac{g(x)\,dx}{(x-a)^s}$ obstaja, če je $s<1$. Če je $s\geq 1$ in $g(a)\neq 0$, tedaj integral $\int_a^b \frac{g(x)\,dx}{(x-a)^s}$ ne obstaja.

<u>DOKAZ</u>. Pišimo $x=a+t^n$, $a\leq x\leq b$, $n\in\mathbb{N}$

Tedaj je $dx=nt^{n-1}dt$ in pri $x=a+\delta$ je $t=\sqrt[n]{\delta}$ in pri $x=b$ je $t=\sqrt[n]{b-a}$.

Potem je $\int_{a+\delta}^{b}\frac{g(x)\,dx}{(x-a)^s}=n\int_{\sqrt[n]{\delta}}^{\sqrt[n]{b-a}} g(a+t^n)\frac{t^{n-1}}{(t^n)^s}\,dt=$

$=n\int_{\sqrt[n]{\delta}}^{\sqrt[n]{b-a}} g(a+t^n)\,t^{n-ns-1}\,dt.$

Naj bo najprej $s<1$. Izberemo tako velik n, da je $n-ns-1>0$ (to gre, saj je $n-ns-1=$ $=n\underbrace{(1-s)}_{>0}-1$). Tedaj je integrand $g(a+t^n)t^{n-ns-1}$ zvezen na $[0,\sqrt[n]{b-a}]$, zato je

$$\lim_{\eta}\int_{\eta}^{\sqrt[n]{b-a}} g(a+t^n)\,t^{n-ns-1}\,dt=\int_0^{\sqrt[n]{b-a}} g(a+t^n)\,t^{n-ns-1}\,dt,$$

zato je $\lim_{\delta\searrow 0}\int_{a+\delta}^{b}\frac{g(x)\,dx}{(x-a)^s}=\lim_{\delta\searrow 0} n\int_{\sqrt[n]{\delta}}^{\sqrt[n]{b-a}} g(a+t^n)\,t^{n-ns-1}\,dt=$

$$=\int_0^{\sqrt[n]{b-a}}\underbrace{g(a+t^n)\,t^{n-ns-1}}_{\text{zvezna na }[0,\sqrt[n]{b-a}]}\,dt.$$

Torej limita obstaja, če je $s<1$, posplošeni integral $\int_a^b\frac{g(x)\,dx}{(x-a)^s}$ obstaja za $s<1$.

Naj bo zdaj $g(a)\neq 0$ in $s\geq 1$. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $g(a)>0$. Ker je g zvezna na $[a,b]$, obstaja $\eta>0$, da je $g(x)\geq\underbrace{\tfrac{1}{2}g(a)}_{m}>0$ za $a<x<a+\eta$.

$$\int_{a+\sigma}^{b} = \int_{a+\sigma}^{a+\eta} + \underbrace{\int_{a+\eta}^{b}}_{} \quad \text{za } g(x)dx/(x-a)^s$$

obstaja, saj je $\frac{g(x)}{(x-a)^s}$ na $[a+\eta, b]$ zvezna.

Ogledamo si $\int_{a+\sigma}^{a+\eta} \frac{g(x)\,dx}{(x-a)^s}$, $s \geq 1$.

$\frac{g(x)}{(x-a)^s} \geq \frac{m}{(x-a)^s}$ za vse x, $a+\sigma < x < a+\eta$ in je

$$\int_{a+\sigma}^{a+\eta} \frac{g(x)\,dx}{(x-a)^s} \geq m \int_{a+\sigma}^{a+\eta} \frac{dx}{(x-a)^s} = *$$

$(x-a)^s \leq (x-a)$ za $x-a < 1$, torej je $\frac{1}{(x-a)^s} \geq \frac{1}{(x-a)}$

$$* \geq m \int_{a+\sigma}^{a+\eta} \frac{dx}{x-a} = m\left[\ln(x-a)\right]_{a+\sigma}^{a+\eta} =$$

$$= m(\ln\eta - \ln\sigma).$$

$$\int_{a+\sigma}^{a+\eta} \frac{g(x)\,dx}{(x-a)^s} \geq m(\ln\eta - \ln\sigma) \to \infty \text{ za } \sigma \to 0.$$

Od tu sledi, da $\lim_{\sigma \searrow 0} \int_{a+\sigma}^{a+\eta} \frac{g(x)\,dx}{(x-a)^s}$ ne obstaja, torej ne obstaja $\lim_{\sigma \searrow 0} \int_{a+\sigma}^{b} \frac{g(x)\,dx}{(x-a)^s}$ za $s \geq 1$, $g(a) \neq 0$. Potem $\int_{a}^{b} \frac{g(x)\,dx}{(x-a)^s}$ ne obstaja. $\blacksquare$

<u>Opomba</u>. Enak izrek velja $\int_{a}^{b} \frac{g(x)\,dx}{(b-x)^s}$, kjer je g zvezna na $[a,b]$. (Za $g(b) \neq 0$, $s \geq 1$ integral ne obstaja, za $s < 1$ obstaja.)

<u>Opomba</u>. Če je f neomejena v c, $a < c < b$ in npr. zvezna na $[a,c) \cup (c,b]$, tedaj obstoj integrala (posplošenega) $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ pomeni, da obstajata limiti

$$\lim_{\sigma \searrow 0} \int_{a}^{c-\sigma} f(x)\,dx \text{ in } \lim_{\eta \searrow 0} \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx.$$

Zgodi se lahko, da posplošeni integral $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ ne obstaja, obstaja pa $\lim_{\sigma \to 0}\left(\int_{a}^{c-\sigma} f(x)\,dx + \int_{c+\sigma}^{b} f(x)\,dx\right)$. V tem primeru imenujemo to limito GLAVNA VREDNOST posplošenega integrala $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, ki sicer sam ne obstaja.

Ponavadi jo označimo z $V.P.\int_a^b f(x)\,dx$.

20.3.2003

Primer. $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x}\,dx$

Vemo: $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ in $\int_{0}^{3}\frac{1}{x}\,dx$ ne obstajata, zato ne obstaja $\int_{-2}^{3}\frac{1}{x}\,dx$ kot posplošeni integral.

$$V.P.\int_{-2}^{3}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta\searrow 0}\left[\int_{-2}^{-\delta}\frac{1}{x}\,dx+\int_{\delta}^{3}\frac{1}{x}\,dx\right] = \lim_{\delta\searrow 0}\left(\left[\ln|x|\right]_{-2}^{-\delta}+\left[\ln|x|\right]_{\delta}^{3}\right) =$$

$$= \lim_{\delta\searrow 0}\left(\ln\delta-\ln 2+\ln 3-\ln\delta\right) = \ln 3-\ln 2 = \underline{\underline{\ln\frac{3}{2}}}$$

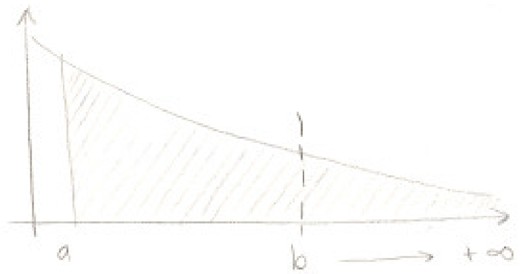
Definicija. Naj bo f definirana na $[a,\infty)$ in integrabilna na vsakem $[a,b]$, $a<b<\infty$. Tedaj je

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

če li-ta obstaja.

Podobno: če je f definirana na $(-\infty,a)$ in integrabilna na vsakem $[c,a]$, $-\infty<c<a$, je

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx := \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\,dx.$$



Primer. $\int_2^{\infty} e^{-x}\,dx = ?$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_2^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+e^{-2}\right) = \underbrace{\lim_{b\to\infty}(-e^{-b})}_{0}+e^{-2} =$$

$$= \underline{\underline{e^{-2}}}$$

Primer. $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln|x|\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln b\,(=\infty) \Rightarrow$ <u>ne obstaja</u>

Opomba. Če posplošeni integral obstaja, pravimo tudi, da konvergira.

Diskusija. Naj bo f zvezna na $[a,\infty)$ in F njena primitivna funkcija. $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ obstaja $\Leftrightarrow$ obstaja $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, t.j. natanko tedaj, ko obstaja $\lim_{b\to\infty}\left[F(b)-F(a)\right] = \lim_{b\to\infty}F(b)-F(a)$, t.j. $\Leftrightarrow \exists\lim_{b\to\infty}F(b)$.

Po Cauchy-jevem pogoju je to $\Leftrightarrow$ za vsak $\varepsilon > 0$ $\exists$ nek b_ε, da za $\forall b, b' > b_\varepsilon$ velja $|F(b') - F(b)| < \varepsilon$, t.j.

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists b_\varepsilon$, da je za $\forall b, b'$, $b' > b > b_\varepsilon$

$$\left| \int_b^{b'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon .$$

Torej $\int_a^\infty f(x)\,dx$ obstaja $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists b_\varepsilon, \left|\int_b^{b'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ za $\forall b, b', b' > b > b_\varepsilon$.

<u>Izrek.</u> $\int_a^\infty f(x)\,dx$ zvezne funkcije f obstaja $\Leftrightarrow$ za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $b_\varepsilon < \infty$, da je $\left|\int_b^{b'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ za vse b, b', $b' > b > b_\varepsilon$.

<u>Primer.</u> Dokaži: $\exists \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. $=$

$= \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = *$

$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$ ima desno limito v levem krajišču, drugod je zvezen $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ je INTEGRABILNA na $[0,1]$

na $[1,\infty)$: $b' > b > 1$

$\left|\int_b^{b'} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \frac{2}{b}$ (povprečja! $\leftarrow$) $\Rightarrow$ je poljubno majhen, če je b dovolj velik, torej za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists b_\varepsilon < \infty$, da je $\left|\int_b^{b'} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \varepsilon$ če je le $b > b_\varepsilon$.

Potem $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ obstaja, zato obstaja $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

<u>Izrek.</u> Naj bo g omejena zvezna funkcija na $[a,\infty)$. Integral $\int_a^\infty g(x)\,dx / x^s$ obstaja, če je $s > 1$. $(a > 0)$ Če je za nek $c < \infty$ $g(x) \geq m > 0$ ali $g(x) \leq -m < 0$ za vse $x > c$ in je $s \leq 1$, potem integral ne obstaja.

<u>DOKAZ.</u> Naj bo $|g(x)| \leq A$ za $\forall x > 1$ in $s > 1$. Tedaj je za $b > 0$

$$\left|\int_b^{b'} g(x)/x^s\,dx\right| \leq \int_b^{b'} |g(x)|/x^s\,dx \leq A \int_b^{b'} x^{-s}\,dx =$$

$$= A\left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_b^{b'} = A\left(\frac{b'^{1-s}}{1-s} - \frac{b^{1-s}}{1-s}\right).$$ Za $b', b > N$, je

$$\left|\int_b^{b'} g(x)/x^s\,dx\right| \leq 2A \frac{1}{|1-s|} \underbrace{N^{\overset{<0}{1-s}}}_{\text{polj. majhno}}.$$ Sledi, da za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists b_\varepsilon$, da je za $b, b' > b_\varepsilon$ $\left|\int_b^{b'} \frac{g(x)}{x^s}\,dx\right| < \varepsilon$. Potem integral obstaja.

Naj bo $g(x) \geq m > 0$ za $x \geq 0$. Brez škode je lahko $c > 1$.
Naj bo $s \leq 1$.

Za velike b je

$$\int_a^b \frac{g(x)}{x^s}dx = \int_a^c \frac{g(x)}{x^s}dx + \int_c^b \frac{g(x)}{x^s}dx.$$

$$\int_c^b \frac{g(x)}{x^s}dx \geq \int_c^b m/x^s\,dx = m\int_c^b \frac{1}{x^s}dx \geq m\int_c^b \frac{1}{x}dx = m[\ln x]_a^b =$$

$$= m(\ln b - \ln a).$$

Ker gre $\ln b \to \infty$ za $b \to \infty$, sledi, da desna stran konvergira k $+\infty$ in izraz $\int_c^b \frac{g(x)}{x^s}dx$ nima limite, zato tudi $\int_a^b \frac{g(x)}{x^s}dx$ nima limite za $b\to\infty$ in torej ne obstaja.

Podobno pri $g(x) \leq -m < 0$ na $[c,\infty)$. ▪

Primer. Eulerjeva Γ-funkcija

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$

Integrand je zvezen povsod. Pri $s>0$ je $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{1-s}}dx$, $1-s<1 \Rightarrow$ obstaja.

$\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$, $x^{s-1}e^{-x} = \frac{x^{s+1}e^{-x}}{x^2}$, za poljuben $s>0$ je $\lim_{x\to\infty} x^{s+1}e^{-x} = 0$ in je $x^{s+1}e^{-x}$ gotovo omejena na $[1,\infty)$. Potem integral $\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ obstaja $\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ za $s>0$.

$\Gamma(s) = ?$ $\quad \int_0^A x^{s-1}e^{-x}dx = \left[\frac{x^s}{s}e^{-x}\right]_0^A + \frac{1}{s}\int_0^A x^s e^{-x}dx = \frac{A^s e^{-A}}{s} + \frac{1}{s}\int_0^A x^s e^{-x}dx$

V limiti $A\to\infty$: $\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = \frac{1}{s}\int_0^\infty x^s e^{-x}dx$.

Torej je $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. *

$s=1 \Rightarrow \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-x}dx = \lim_{A\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^A = \lim_{A\to\infty}\left[-e^{-A}+e^{-0}\right] =$

$= \underline{\underline{1}}$

$\Gamma(1)=1,\ \Gamma(2)=1,\ \Gamma(3)=2,\ \ldots,\ \Gamma(n)=(n-1)!$

Opomba. $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$, f zvezna

$\qquad \shortparallel$

$\int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx$ (če oba obstajata)

Primer. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx + \int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 xe^{-x^2}dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx =$

$= \lim_{c\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_c^0 + \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b = \lim_{c\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^{-c^2}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-b^2} + \frac{1}{2}e^{-0}\right) =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$

Opombica. Včasih $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ne obstaja, obstaja pa limita

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)\,dx.$$

V tem primeru jo imenujemo glavna vrednost integrala

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)\,dx.$$

Opomba. (O absolutni konvergenci posplošenega integrala za $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$) Rekli smo, da integral obstaja (konvergira), če obstaja $\lim_{N\to\infty}\int_a^{N} f(x)\,dx$. Če slučajno obstaja $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$, pravimo, da integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ absolutno konvergira. Velja: če integral absolutno konvergira, tedaj integral konvergira. Premisli doma: $\left|\int_b^{b'} f(x)\,dx\right| \le \int_b^{b'} |f(x)|\,dx$

8. UPORABA INTEGRALA V GEOMETRIJI

1. DOLŽINA POTI

Pot: $t \mapsto (f(t), g(t))$, f, g zvezni

$ \overset{\shortparallel}{F(t)}$, $t \in I$ interval $I = [\alpha, \beta]$

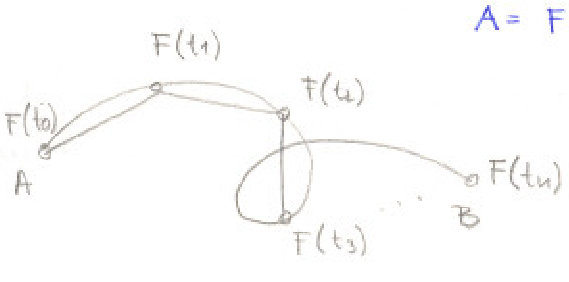
Tir: (sled) $F(I) = \{ (f(t), g(t));\ t \in I \}$

25. 03. 2003

$d(T_1, T_2)$... razdalja med T_1 in T_2

Približek za dolžino: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ ... delitev D

$A = F(t_0), F(t_1), \dots, F(t_n) = B$



$$\lambda(D) = \sum_{k=1}^{n} d(F(t_{i-1}), F(t_i)) \dots$$

... dolžina poligonske črte, ki aproksimira našo pot

Izrek. Če je delitev D' nadaljevanje delitve D, je $\lambda(D') \geq \lambda(D)$.

DOKAZ. Dovolj je dokazati za $D' = D \cup \{t'\}$. Naj bo $t_{i-1} < t' < t_i$. Člen $d(F(t_{i-1}), F(t_i))$ se zamenja z $d(F(t_{i-1}), F(t')) + d(F(t'), F(t_i))$.

Po trikotniški neenakosti je

$$d(F(t_{i-1}), F(t')) + d(F(t'), F(t_i)) \geq d(F(t_{i-1}), F(t_i)).$$

Potem je $\lambda(D') \geq \lambda(D)$. ■

<u>Definicija.</u> Dolžina poti F je $\ell(F) := \sup\{\lambda(D);\ D \text{ delitev } I\}$.
Pot F se imenuje IZMERLJIVA, če je $\ell(F) < \infty$.

<u>Izrek.</u> Naj bo $F = (f, g) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ taka pot, da sta funkciji f in g zvezno odvedljivi na $[\alpha, \beta]$. Tedaj je pot F izmerljiva in je

$$\boxed{\ell(F) = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt} =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \qquad x = f(t),\ y = g(t)$$

<u>DOKAZ.</u> Naj bo $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ delitev I. Po definiciji je

$$\lambda(D) = \sum_{k=1}^n \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}.$$

Uporabimo Lagrange-ov izrek na vsakem (t_{i-1}, t_i):

$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$, kjer je $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ in

$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\eta_i)(t_i - t_{i-1})$, kjer je $\eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$.

$\lambda(D) = \sum_{i=1}^n \sqrt{f'(\xi_i)^2 + g'(\eta_i)^2} \cdot (t_i - t_{i-1})$. Ta vsota je podobna Riemannovi vsoti za delitev D in izbiro $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$: $\sigma(D) = \sum_{i=1}^n \sqrt{f'(\tau_i)^2 + g'(\tau_i)^2}\,(t_i - t_{i-1})$ (za funkcijo $\sqrt{f'^2 + g'^2}$).

Izračunamo $\sigma(D) - \lambda(D)$:

$$\sigma(D) - \lambda(D) = \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{f'(\tau_i)^2 + g'(\tau_i)^2} - \sqrt{f'(\xi_i)^2 + g'(\eta_i)^2}\right)\overbrace{(t_i - t_{i-1})}^{\delta_i} \leq$$

$$= \sum_{i=1}^n \left| \frac{f'(\tau_i)^2 + g'(\tau_i)^2 - f'(\xi_i)^2 - g'(\eta_i)^2}{\sqrt{f'(\tau_i)^2 + g'(\tau_i)^2} + \sqrt{f'(\xi_i)^2 + g'(\eta_i)^2}} \right| \delta_i = \sum_{i=1}^n \delta_i \left| \frac{f'(\tau_i)^2 - f'(\xi_i)^2 + g'(\tau_i)^2 - g'(\eta_i)^2}{\sqrt{} + \sqrt{}} \right|$$

$\geq |g'(\tau_i)|$ in $\geq |f'(\tau_i)|$ $\qquad \geq |f'(\xi_i)|$ in $\geq |g'(\eta_i)|$ *

$$= \sum_{i=1}^n \left| \frac{[f'(\tau_i) - f'(\xi_i)][f'(\tau_i) + f'(\xi_i)] + [g'(\tau_i) - g'(\eta_i)][g'(\tau_i) + g'(\eta_i)]}{\sqrt{} + \sqrt{}} \right| \delta_i \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \delta_i \left(\frac{|f'(\tau_i) + f'(\xi_i)|}{\sqrt{} + \sqrt{}} |f'(\tau_i) - f'(\xi_i)| + \frac{|g'(\tau_i) + g'(\eta_i)|}{\sqrt{} + \sqrt{}} |g'(\tau_i) - g'(\eta_i)| \right.$$

$$*\leq \sum_{i=1} \left(|f'(\tau_i)-f'(\xi_i)| + |g'(\tau_i)-g'(\eta_i)|\right)(t_i-t_{i-1}).$$

$$|\sigma(D)-\lambda(D)| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(|f'(\tau_i)-f'(\xi_i)| + |g'(\tau_i)-g'(\eta_i)|\right)(t_i-t_{i-1}).$$

Naj bo $I = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\,dt$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem $\exists \sigma$, da je

- $|I - \sigma(D)| < \frac{\varepsilon}{2}$ za vsako delitev D, za katero je dolžina najdaljšega intervala manjša od σ.
- $|f'(t)-f'(\tau)| < \frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$, $|g'(t)-g'(\tau)| < \frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$, čim je $|t-\tau| < \sigma$, $t, \tau \in [\alpha, \beta]$ (enakomerna zveznost f', g').

Naj bo D poljubna delitev, za katero je $\max\{\delta_k\} < \sigma$. Tedaj je

$$|I - \lambda(D)| = |I - \sigma(D) + \sigma(D) - \lambda(D)| \leq |I - (D)| + |\sigma(D) - \lambda(D)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}(t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot(\beta-\alpha) = \varepsilon.$$

Torej je $I - \varepsilon < \lambda(D) < I + \varepsilon$ za vsako delitev D, $\max\{\delta_k\} < \sigma$.

Naj bo D poljubna delitev $[\alpha, \beta]$. Obstaja nadaljevanje D' delitve D, za katero je $\max\{\delta_k\} < \sigma$. Po izreku je $\lambda(D) \leq \lambda(D')$ in $\lambda(D') < I + \varepsilon$. Torej je $\lambda(D) \leq I + \varepsilon$ za vsako delitev D in je $\sup_D \lambda(D) \leq I + \varepsilon$. Podobno je $\sup_D \lambda(D) > I - \varepsilon$.

Dokazali smo: za $\forall \varepsilon > 0$ je $I - \varepsilon < \sup_D \lambda(D) < I + \varepsilon$, potem je $\sup_D \lambda(D) = I$. ∎

<u>Posledica</u>. Naj bo parameter polarni kot: $F: [\alpha, \beta] \to (f(\varphi), \varphi)$, kjer je f zvezno odvedljiva na $[\alpha, \beta]$. Tedaj je F izmerljiva in

$$\ell(F) = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\,d\varphi.$$

<u>DOKAZ</u>. $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. $\dot{x} = \frac{dx}{d\varphi} =$
$= f'(\varphi)\cos\varphi + f(\varphi)(-\sin\varphi)$, $\dot{y} = \frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = f'(\varphi)^2 + f(\varphi)^2 + 2f(\varphi)f'(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi - 2f(\varphi)f'(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi =$$

$$= f'(\varphi)^2 + f(\varphi)^2 \Rightarrow \ell(F) = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\,d\varphi \quad ∎$$

Posledica. Naj bo parameter kar x, t.j. $F:[\alpha,\beta]\to(x,f(x))$ (F parametrizira Γ_f na $[\alpha,\beta]$), kjer je f zvezno odvedljiva funkcija. Tedaj je
$$l(F)=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

DOKAZ. $x=x,\ y=f(x),\ x\in[\alpha,\beta]$

$\dot{x}=1,\ \dot{y}=f'(x)\Rightarrow \dot{x}^2+\dot{y}^2=1^2+f'(x)^2=1+f'(x)^2.$ ∎

Opomba. Enaka formula velja za $F:[\gamma,\delta]\to(g(y),y)$.

Diskusija. Gladka krivulja je bila tir poti F: $(\alpha\le t\le\beta)$, kjer sta x in y gladki funkciji (t.j. zvezno odvedljivi na $[\alpha,\beta]$) in velja, da je za $\forall t\in[\alpha,\beta]$ vsaj ena od $\dot{x}(t),\dot{y}(t)$ različna od 0 (t.j. $\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2>0$ za $\forall t\in[\alpha,\beta]$).

Vemo: lokalno je tak tir poti vedno graf ($y=y(x)$ ali $x=x(y)$). < gl. zgoraj

Definicija. Gladek lok je tir gladke poti F, ki ima dodatno lastnost, da je injektivna (t.j. $F(t_1)\neq F(t_2)$ za $t_1\neq t_2$). t.j. brez samopresečišč

27. 3. 2003

Opomba. Lok je torej $F(I)$, kjer je $F=(f,g):[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ gladka, injektivna in $f'(t),g'(t)$ nista nikoli oba nič.

Dolžino loka $F(I)$ definiramo kar kot $l(F)$.

Izrek. Naj bo L gladek lok v ravnini in F_1,F_2 dve parametrizaciji tega loka: $L=F_1([\alpha,\beta])=F_2([\alpha',\beta'])$, $F_1:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$, $F_2:[\alpha',\beta']\to\mathbb{R}^2$. Tedaj je $l(F_1)=l(F_2)$.

DOKAZ. (skica) Naj bo $F_1: I=[\alpha,\beta]\to L$ podana z $F_1(t)=(x_1(t),y_1(t))$ in $F_2:I'=[\alpha',\beta']\to L$, $F_2(t)=(x_2(t),y_2(t))$. Ker sta F_1 in F_2 injektivni, lahko definiramo $\varphi\doteq F_2^{-1}\circ F_1$, $\varphi:[\alpha',\beta']\to[\alpha,\beta]$ je bijekcija. Mogoče je pokazati, da je φ zvezno odvedljiva, podobno za φ^{-1}. $F_1=F_2\circ\varphi$, torej je $x_1(t)=x_2(\varphi(t))$, $y_1=y_2(\varphi(t))$.

Dve možnosti: φ strogo narašča ali strogo pada. Recimo, da narašča: $\varphi(\alpha)=\alpha'$, $\varphi(\beta)=\beta'$

$$\ell(F_2) = \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{\dot{x}_2(t)^2 + \dot{y}_2(t)^2}\, dt$$

Uvedemo novo spremenljivko: $t = \varphi(\tau)$, $\tau = \alpha \ldots t = \alpha'$, $\tau = \beta \ldots t = \beta'$

$$\ell(F_2) = \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}_2(\varphi(\tau))^2 + \dot{y}_2(\varphi(\tau))^2}\, \varphi'(\tau) d\tau}_{\cdots\, =\, \ell(F_1)}, \quad dt = \varphi'(\tau)\, d\tau$$

$\ldots = \ell(F_1)$. ∎

NARAVNA PARAMETRIZACIJA

Parametrizacija je preslikava $F: [\alpha, \beta] \to L$, $F([\alpha, \beta]) = L$.
$F(t) = (x(t), y(t))$. Oglejmo si funkcijo $\varphi(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2}\, d\tau$ je dolžina loka med točkama $F(\alpha)$ in $F(t)$. Vemo: φ je odvedljiva in odvod od φ je $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \frac{d\varphi}{dt}$. Odvod je različen od 0 (ker nista oba odvoda hkrati 0). Sledi, da je $\varphi: [\alpha, \beta] \to [0, \ell(L)]$ strogo naraščajoča in zvezno odvedljiva, odvod je povsod pozitiven. Zato ima inverzno funkcijo $\varphi^{-1}: [0, \ell(L)] \to [\alpha, \beta]$, $s \mapsto \varphi^{-1}(s)$.

Nova parametrizacija: $G = F \circ \varphi^{-1}: [0, \ell(L)] \to L$,
$s \mapsto G(s) = (g_1(s), g_2(s)) = (x(\varphi^{-1}(s)), y(\varphi^{-1}(s)))$. Tu je

$$g_1'(s)^2 + g_2'(s)^2 = \left(\frac{dx}{dt}(\varphi^{-1}(s)) \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}\right)^2 + \cdots =$$

$\varphi^{-1}(s) = t$

$$= \dot{x}(\varphi^{-1}(s))^2 \cdot \frac{1}{\dot{x}(\varphi^{-1}(s))^2 + \dot{y}(\varphi^{-1}(s))^2} + \cdots = \underline{\underline{1}}$$

Lok smo parametrizirali z $G: [0, \ell(L)] \to L$. $G = (g_1, g_2)$, potem je $g_1'(s)^2 + g_2'(s)^2 \equiv 1$.

Dolžino kosa loka med $G(0)$ in točko $G(s)$ izračunamo kot $\int_0^s \sqrt{g_1'(s)^2 + g_2'(s)^2}\, ds = \int_0^s 1\, ds = s - 0 = s$.

Če je L parametriziran na ta način, pravimo, da je parametrizacija naravna. (Parameter meri dolžino po loku od začetne točke). Parametrizacija $G = (g_1, g_2)$ je naravna, če je $g_1'(t)^2 + g_2'(t)^2 \equiv 1$.

$$s = \varphi(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt, \quad ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

$$ds = \cdots = (\dot{x}(t)dt)^2 + (\dot{y}(t)dt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Če je lok parametriziran s polarnim kotom, dobimo $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, če je parameter x, dobimo $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + (f'(x)dx)^2 = (1+f'(x)^2)dx^2$.

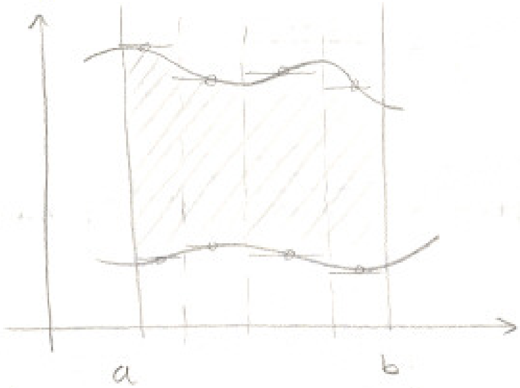
2. PLOŠČINE LIKOV V RAVNINI

(a) Ploščina lika med grafoma zveznih funkcij.

Na $[a,b]$ definirani f, g, dve zvezni funkciji;

$$f(x) \le g(x) \quad \text{za} \quad a \le x \le b.$$

Kolikšna je ploščina lika $D = \{(x,y) : f(x) \le y \le g), a \le x \le b\}$.



Za približek:

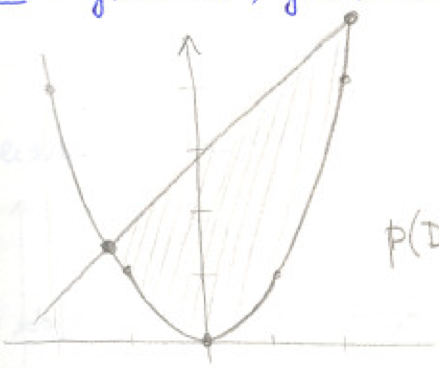
$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$

$\sum_i [g(\xi_i) - f(\xi_i)](x_1 - x_0) = R.V(g-f)$

V limiti (vedno finejša delitev) dobimo $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx = p(D)$.

Primer. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x+3$



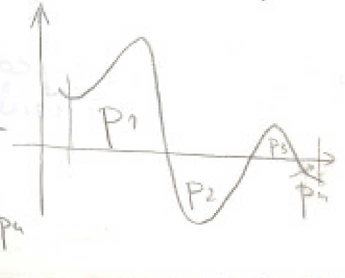
Presečišča (meje): $\frac{1-\sqrt{13}}{2} = a$, $\frac{1+\sqrt{13}}{2} = b$

$$p(D) = \int_a^b (x + 3 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{x^3}{3}\right]_a^b =$$

$$= \dots$$

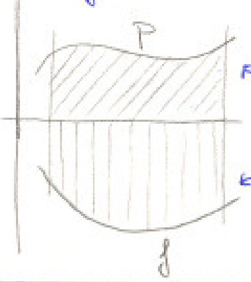
1. 4. 2003

Opomba. Geometrični pomen integrala zvezne funkcije:



$\int_a^b f(x)dx =$

$= P_1 - P_2 + P_3 - P_4$

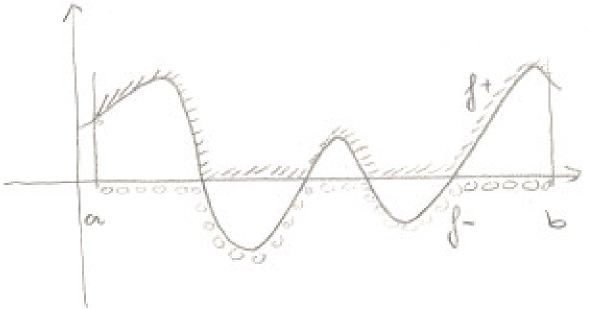


$P = \int_a^b [f(x) - 0]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$P = -\int_a^b f(x)\,dx$

Označi: $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ $(a \le x \le b)$

$f_-(x) = \min\{f(x), 0\}$ $(a \le x \le b)$

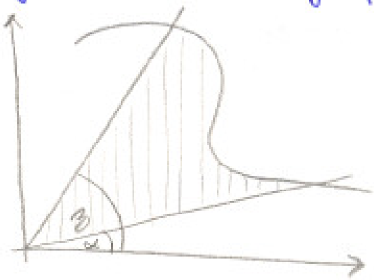


$f = f_+ + f_-$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f_-(x)\,dx$$

Polarne koordinate

Naloga: Naj bo f zvezna nenegativna funkcija na $[\alpha, \beta]$. $r = f(\varphi)$. Kolikšna je ploščina izseka, omejenega s poltrakoma $\varphi = \alpha$ in $\varphi = \beta$ in krivuljo $r = f(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$.

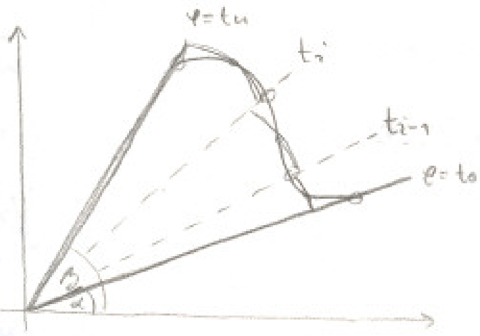


Izrek. Naj bo f zvezna nenegativna funkcija na $[\alpha, \beta]$. Naj bo $D = \{(r, \varphi) : 0 \le r \le f(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta\}$. Tedaj za ploščino D velja:

$$(D) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f(\varphi)^2 \, d\varphi.$$

(Zaradi enostavnosti vzamimo $0 \le \alpha \le \beta \le 2\pi$)

Približek: $\alpha \quad t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$



Približna ploščina izseka je enaka ploščini krožnega izseka med $t_i - t_{i-1}$ in polmerom $f(\xi_i)$, torej $(f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})) \cdot \frac{f(\xi_i)}{2}$. Približek za ploščino je $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 (t_i - t_{i-1})$.

V limiti dobimo $p(D) = \frac{1}{2} \int_a^b f(\varphi)^2 \, d\varphi$. ■