VI. VRSTE

1. ŠTEVILSKE VRSTE

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad (*)$$

Primeri. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$

$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

$s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ...

Definicija. Številska vrsta je formalna vsota oblike $(*)$. Števila $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ imenujemo delne vsote vrste $(*)$. Če zaporedje delnih vsot s_n konvergira, tedaj pravimo, da vrsta $(*)$ konvergira in da je njena vsota enaka

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Tedaj zapišemo: $a_1 + a_2 + \cdots = s$ oz. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Cauchy-jev kriterij. Vrsta $(*)$ konvergira $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

za vse $n \geq n_0$ in $p \geq 1$.

To je potrebni pogoj za konvergenco. Če vsota konvergira, je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Primer. Naj bo $a \neq 0, q \neq 1$. Potem je $a + aq + aq^2 + \cdots$ geometrijska vrsta z začetnim členom a in kvocientom q.

$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + q^{n-1}a = a\frac{q^n - 1}{q-1}$. Pri $|q| < 1$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, potem je $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$. Če je $|q| > 1$, q^n ne konvergira, zato vrsta divergira. Pri $q=1$, je $a+a+\cdots$ divergira. Enako za $q=-1$ $a-a+a-a+\cdots$ divergira ($a\neq 0$).

Izrek. Če vrsta $a_1+a_2+\cdots$ (*) konvergira, potem za vsak m konvergira vrsta $a_m+a_{m+1}+\cdots$ (**).

Obrat: če za nek m konvergira (**), konvergira (*).

DOKAZ. Sledi iz definicije.

$$\begin{array}{l} a_1+a_2+a_3+\cdots \\ \underline{\quad b_1+b_2+b_3+\cdots} \\ (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots \\ (a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots \\ \lambda a_1+\lambda a_2+\cdots \quad (\lambda\in\mathbb{R}) \end{array}$$

Izrek. Naj vrsta $a_1+a_2+\cdots$ konvergira. Potem za vsak $c\in\mathbb{R}$ konvergira tudi $ca_1+ca_2+ca_3+\cdots$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Naj konvergira tudi $b_1+b_2+\cdots$. Tedaj konvergirata tudi vrsti $(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots$.

DOKAZ. (za vsoto)

Naj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergirata. Tedaj zaporedje $t_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ in $b_1+b_2+\cdots+b_n=s_n$ konvergirata.

Označimo $t=\lim_{n\to\infty} t_n$, $s=\lim_{n\to\infty} s_n$.

$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots$, delne vsote pri so $p_n=(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)=(a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n)=t_n+s_n$. Iz pravil za računanje limit zaporedij sledi: ker s_n in t_n konvergirata, konvergira s_n+t_n in je limita enaka $s+t$. To pomeni, da vrsta $(a_1+b_1)+\cdots$ konvergira proti $s+t$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=t+s. \blacksquare$$

2. KONVERGENCA VRST Z NENEGATIVNIMI ČLENI

$$(*) \quad a_1 + a_2 + \cdots \qquad a_i \geq 0 \text{ za vse } i \in \mathbb{N}$$

$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ (ker je $a_{n+1} \geq 0$)

Zaporedje delnih vsot vrste z nenegativnimi členi je monotono naraščajoče.

- Vrsta $(*)$ torej konvergira $\Leftrightarrow$ zaporedje delnih vsot je (navzgor) omejeno.

<u>Primer.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ (Harmonična vrsta)

Vsak člen harm. vrste (od drugega naprej) je harmonična sredina sosednjih. c je harmonična sredina od a in b, če je

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Pokažemo, da vrsta divergira.

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad (+)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{8}}_{2^2} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{2^3} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}} + \cdots >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \to \infty. \quad \blacksquare$$

<u>Primer.</u> Naj bo $s \in \mathbb{R}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$:

- če je $s \leq 1$, je $\frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{n}$, torej je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ($S_n > s_n \; \forall n$), vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ divergira.
- če je $s > 1$, t.j. $s = 1 + \delta$, $\delta > 0$

$$\frac{1}{(n+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(2n)^s} < n\left(\frac{1}{2n}\right)^s = \frac{1}{2^s n^\delta} <$$

Delne vsote: $\underbrace{\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}}_{< \frac{1}{2^\delta}} + \underbrace{\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots + \frac{1}{8^s}}_{< \left(\frac{1}{2^\delta}\right)^2} + \cdots$, torej je

poljubna delna vsota manjša od $1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^\delta} + \left(\frac{1}{2^\delta}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^\delta}\right)^l$ za dovolj velik l, vemo pa, da so $\frac{1}{2^\delta} + \cdots + \left(\frac{1}{2^\delta}\right)^l$ navzgor omejene, saj geometrijska vrsta $1 + \frac{1}{2^\delta} + \cdots$ konvergira, saj je $\left|\frac{1}{2^\delta}\right| < 1$. Sledi, da vrsta $\sum \frac{1}{n^s}$ konvergira.

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergira, če je $s > 1$,
divergira, če je $s \le 1$.

<u>Izrek</u>. Naj bosta $\sum a_n$ in $\sum b_n$ vrsti s samimi nenegativnimi členi in naj bo $a_n \le b_n$ za vsak n. Če vrsta $\sum b_n$ konvergira, konvergira tudi $\sum a_n$. (Če vrsta $\sum a_n$ divergira, divergira tudi $\sum b_n$.)

<u>DOKAZ</u>. Naj bodo s_n delne vsote $\sum a_n$ in t_n delne vsote $\sum b_n$.

$$\begin{aligned} a_1 &\le b_1 \\ a_2 &\le b \\ &\vdots \\ a_n &\le b_n \\ \hline a_1 + \dots + a_n &\le b_1 + \dots + b_n \\ s_n &\le t_n \end{aligned}$$

Če $\sum b_n$ konvergira, je $\{t_n\}$ navzgor omejeno, potem je tudi s_n navzgor omejeno in konvergira tudi $\sum a_n$. $\blacksquare$

3.4.2003

<u>Opomba</u>. Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s členi poljubnega znaka in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsta z nenegativnimi členi, tedaj vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ imenujemo MAJORANTA za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, če je $|a_n| \le b_n$ za $\forall n$. ($\sum b_n$ majorizira $\sum a_n$).

<u>Opomba</u>. Dovolj je, da v gornjem izreku velja $a_n \le b_n$ za vse n od nekega n_0 naprej.

Če za primerjavo vzamemo geometrijsko vrsto, dobimo različne kriterije konvergence.

<u>Izrek</u>. (Kvocientni (D'Alambert-ov) kriterij konvergence (1717 – 1783))

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s samimi pozitivnimi členi. Sestavimo zaporedje števil $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Tedaj velja:

(a) Če obstaja $q < 1$, da za $\forall n \ge n_0 \in \mathbb{N}$ velja $D_n \le q$, tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(b) Če od nekega n_0 naprej velja za vse $n \geq n_0$, da je $D_n \geq 1$, tedaj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

V posebnem primeru: če obstaja $D = \lim_{n\to\infty} D_n$, potem velja:

(a') Če je $D < 1$, vrsta $\sum a_n$ konvergira.

(b') Če je $D > 1$, vrsta $\sum a_n$ divergira.

(Če je slučajno $D = 1$, ne vemo o konvergenci ničesar.)

<u>DOKAZ</u>. $D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

Iz (a) sledi (a'), iz (b) sledi (b').

(a) Naj od nekega n_0 naprej velja $D_n \leq q < 1$ za vse $n \geq n_0$. Torej $a_{n+1}/a_n \leq q \ \forall n \geq n_0$. Potem je $a_{n+1} \leq q a_n$ za vse $n \geq n_0$.

$$a_{n_0+1} \leq q a_{n_0}$$
$$a_{n_0+2} \leq q a_{n_0+1} \leq q^2 a_{n_0}$$
$$\vdots$$
$$a_{n_0+k} \leq q^k a_{n_0}$$
$$\vdots$$

Od tu sledi iz primerjave vrst $a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots$ z vrsto $q a_{n_0} + q^2 a_{n_0} + \dots$, da je vedno $a_{n_0+k} \leq a_{n_0} q^k$ in $\sum_{i=1}^{\infty} q^i a_{n_0}$ je konvergentna geometrijska vrsta (ker je $0 < q < 1$) in sledi, da $\sum a_{n_0+i}$ konvergira, torej tudi $\sum_i a_i$ konvergira. ■

(b) Naj za vse $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ velja: $D_n \geq 1$. To pomeni, da je $a_{n+1} \geq a_n$ za vse $n \geq n_0$. Potem je $a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq \dots \leq a_{n_0+k} \leq \dots$. Ker je $a_{n_0} > 0$, ne more biti limita $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, kar je potreben pogoj za konvergenco $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Torej $a_1 + a_2 + \dots$ divergira. ■

<u>Opomba</u>. $\sum \frac{1}{n}$ - vemo, da divergira; $D_n = \frac{n}{n+1} \to 1$

$\sum \frac{1}{n^2}$ - vemo, da konvergira; $D_n = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$

Za take primere kriterij ne pove ničesar.

<u>Primer</u>. Za katere c, $0 < c < \infty$ konvergira vrsta $1 + c + c^2/2 + c^3/3! + c^4/4! + \dots$

$D_n = \frac{c}{n}$ (a') $\overset{D}{\overset{\parallel}{\lim_{n\to\infty}}} D_n = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n} = 0 < 1 \Rightarrow D < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira

Izrek. (Cauchy-jev, korenski kriterij)

Naj bo $\sum a_n$ vrsta s samimi nenegativnimi členi in $c_n = \sqrt[n]{a_n}$. Tedaj velja:

(a) Če obstaja $q<1$, da od nekega n_0 naprej za vse n velja $c_n \leq q$, tedaj vrsta konvergira.

(b) Če za vse $n \geq n_0$ velja, da je $c_n \geq 1$, tedaj vrsta divergira.

Posebej: če obstaja $c = \lim_{n\to\infty} c_n$ velja:

(a') $c < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira.

(b') $c > 1 \Rightarrow$ vrsta divergira.

(Če je $c=1$, ne vemo ničesar.)

DOKAZ. (a) $\Rightarrow$ (a'), (b) $\Rightarrow$ (b')

(a) Naj velja $c_n \leq q < 1$ za vse $n \geq n_0$. Potem je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ za vse $n \geq n_0$, torej $a_n \leq q^n$ za vse $n \geq n_0$. Zato primerjava vrste $a_{n_0+1} + \dots$ z vrsto $q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + \dots$ pove: $a_{n_0+k} \leq q^{n_0+k}$ in $\sum_i q^{n_0+i}$ konvergira. Po izreku 1 sledi, da $\sum a_{n_0+i}$ konvergira, zato konvergira tudi $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

(b) Podobno kot zgoraj. Doma!

Primer. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$, za katere $0 < x < \infty$ konvergira?

$c_n = \sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{n}$, $c = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ za $\forall x \Rightarrow$ konvergira za $\forall x > 0$

Izrek. (Raabe-jev kriterij)

Naj bo $\sum a_n$ vrsta s samimi pozitivnimi členi in $r_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Če za vse $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ obstaja r, da velja, da je $r_n \geq r > 1$, tedaj vrsta konvergira.

Če je za vse $n \geq n_0$ $r_n \leq 1$, tedaj vrsta divergira.

Če je $r = \lim_{n\to\infty} r_n$, velja:

(a') $r > 1 \Rightarrow$ konvergira,

(b') $r < 1 \Rightarrow$ divergira.

(Pri $r=1$ ne vemo.)

DOKAZ. Primerjava z $\sum \frac{1}{n^s}$. Naj velja $r_n > r > 1$ za vse $n \geq n_0$, torej $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r > 1$ za vse $n \geq n_0$, torej
$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{r}{n} + 1$.

Naj bo $1 < s < r$. Ker je $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^s - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{s(1+x)^{s-1}}{1} = s$ in sledi, da je $\lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1\right)/\frac{1}{n} = s < r$. To pa pomeni, da je za vse $n > n_0$ $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1\right)/\frac{1}{n} < r$, torej $\left(1+\frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n}$. Za dovolj velik n_0, je torej za $\forall n \geq n_0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{r}{n} + 1 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^s}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^s},$$

torej je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^s}{\left(\frac{1}{n}\right)^s}$ za $\forall n \geq n_0$.

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_m}{a_{m-1}} < \frac{\left(\frac{1}{n_0+1}\right)^s}{\left(\frac{1}{n_0}\right)^s} \cdot \ldots \cdot \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^s}{\left(\frac{1}{m-1}\right)^s} \text{ oz.}$$

$$\frac{a_m}{a_{n_0}} < \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^s}{\left(\frac{1}{n_0}\right)^s}, \text{ torej}$$

$$a_m < a_{n_0} / \left(\frac{1}{n_0}\right)^s \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^s, \text{ oz.}$$

torej je vrsta $a_{n_0} + \ldots$ majorizirana s konvergentno vrsto (ker je $s>1$): $\frac{a_n}{\left(\frac{1}{n_0}\right)^s} \sum_{m > n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^s$ in je konvergentna. ■

Naj bo $r_n \leq 1$ za $\forall n \geq n_0$. Tedaj je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ za vse $n \geq n_0$ oz. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$ in je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$. Enako kot prej dobimo

$$\frac{a_m}{a_{n_0}} \geq \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n_0}} \text{ za } \forall m \geq n_0,$$

torej je $a_m \geq \left(\frac{a_{n_0}}{\frac{1}{n_0}}\right) \cdot \frac{1}{m}$. Torej je vrsta $\sum a_{n_0} + \ldots$ majoranta za $(a_{n_0} n_0) \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{i}$, ki divergira, torej divergira tudi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. ■

Primer. Naj bo $x > 0$. Za kakšne x konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}$?

$D_n = \frac{n+1}{x+n+1} \to 1 \Rightarrow$ kvoc. kriterij ne pove ničesar

$r_n = n\left(\frac{x+n+1}{n+1} - 1\right) = n\left(\frac{x}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot x$

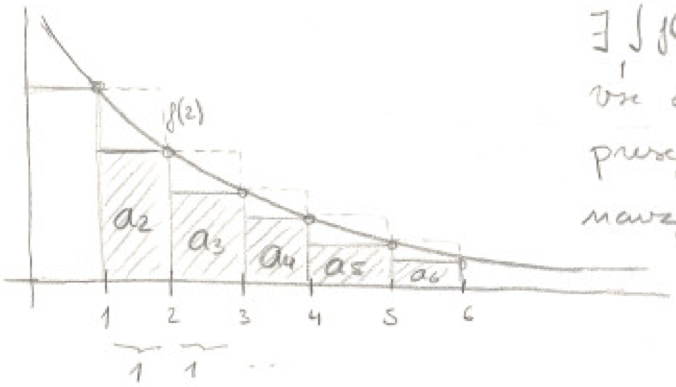
$\lim_{n\to\infty} r_n = x \Rightarrow$ $x < 1 \to$ divergira

$x > 1 \to$ konvergira

Izrek. (Cauchy-jev integralski kriterij)

Naj bo dana vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kjer je $a_n = f(n)$ za neko funkcijo f, ki je zvezna, pozitivna in padajoča na $(1, \infty)$. Tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj, ko obstaja $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

DOKAZ. Doma!



$\exists \int_1^{\infty} f(x)\,dx \Rightarrow$ ploščina je končna. Vse delne vsote $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ne presegajo $p \Rightarrow S_n < p$, zato so navzgor omejene in vrsta konvergira.

3. VRSTE S ČLENI POLJUBNEGA PREDZNAKA, ABSOLUTNA KONVERGENCA

Definicija. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se imenuje absolutno konvergentna, če konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Izrek. Če je $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.

DOKAZ. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstaja n_0, da za vse $n \geq n_0$ in $p \geq 1$ velja:

$$\big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}|\big| < \varepsilon. \quad \text{(Cauchy-jev pogoj)}$$

Ker je $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq \big||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|\big| < \varepsilon$ in sledi $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$ za $\forall n \geq n_0$, $\forall p \geq 1$. Torej je po Cauchy-jevem pogoju za delne vsote, $\sum a_n$ konvergentna.

Opomba. Obstajajo vrste, ki so konvergentne, pa niso absolutno konvergentne.
Primer: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

8. 4. 2003

Izrek. Naj bo $\sum a_n$ vrsta, v kateri so vsi členi od 0 različni. Če obstaja $q < 1$, da je $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$ za vse $n \geq n_0$, tedaj vrsta $\sum a_n$ absolutno konvergira. Če je $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ za vse $n \geq n_0$, vrsta $\sum a_n$ divergira.

<u>DOKAZ</u>. Prvi del sledi iz kvocientnega kriterija, drugi iz dejstva, da $a_n \not\to 0$, saj $|a_n|$ narašča. ∎

4. PREUREDITEV VRSTE

Naj bo dana vrsta (*) $a_1+a_2+a_3+\cdots$ in naj bo $\pi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijekcija. Ogledamo si vrsto $a_{\pi(1)}+a_{\pi(2)}+\cdots$ (**)

Recimo, da (*) konvergira. Ali nujno konvergira tudi (**)?

<u>Izrek</u>. Naj bo $\sum a_n$ absolutno konvergentna vrsta. Tedaj za vsako bijekcijo $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutno konvergira in je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

<u>DOKAZ</u>. Naj bo $s_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$ in $s_n'=\sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}$. Dovolj je pokazati, da je $\lim_{n\to\infty}(s_n'-s_n)=0$ (ker prvotna vrsta konvergira, $\lim s_n$ obstaja, potem je $\lim s_n' = \lim s_n$).

Naj bo $\varepsilon>0$. Obstaja n_0, da je $\sum_{n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$ za vse $n,m\geq n_0$ (konvergentnost $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$). V posebnem sledi, da je $|s_m - s_n| \overset{\dagger\dagger}{=} \left|\sum_{n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$ za $m,n\geq n_0$.

Naj bo l največje od števil $\pi^{-1}(1),\pi^{-1}(2),\ldots,\pi^{-1}(n_0)$. Tedaj je $\{\pi^{-1}(1),\ldots,\pi^{-1}(n_0)\}$ vsebovana v $\{1,2,\ldots,l\}$, $l\geq n_0$. Torej $\{1,2,\ldots,n_0\}\subseteq\{\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(l)\}$. Če je $n\geq l$ je $\{1,2,\ldots,n_0\}\subseteq\{\pi(1),\ldots,\pi(n)\}$. Naj bo m največje od števil $\pi(1),\ldots,\pi(n)$. Velja: $\{1,2,\ldots,n_0\} \overset{*}{\subseteq} \{\pi(1),\ldots,\pi(n)\} \overset{\square}{\subseteq} \{1,2,\ldots,m\}$. $|s_n'-s_{n_0}| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)} - \sum_{i=1}^{n_0} a_i\right| \overset{*}{=} \left|\sum_{\substack{i\leq n\\ \pi(i)>n_0}} a_{\pi(i)}\right| \leq \sum_{\substack{i\leq n\\ \pi(i)>n_0}} |a_{\pi(i)}| \overset{\square}{\leq} \sum_{n_0+1}^{m} |a_k| \overset{\dagger}{<} \varepsilon$. Ker je $n\geq n_0$, velja še $|s_n - s_{n_0}| \overset{\dagger\dagger}{<} \varepsilon$. Torej za $n\geq l$ sledi $|s_n'-s_n| = |s_n'-s_{n_0}+s_{n_0}-s_n| \leq |s_n'-s_{n_0}|+|s_n-s_{n_0}| < 2\varepsilon$. Potem je

$\lim_{n\to\infty}|s_n' - s_n| = 0$. ∎

<u>Definicija</u>. Vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ki je konvergentna, a ni absolutno konvergentna, imenujemo pogojno konvergentna vrsta.

<u>Izrek</u>. (Riemannov izrek) Naj bo $\sum a_n$ pogojno konvergentna vrsta. Za vsako število A obstaja bijekcija $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da je $\sum a_{\pi(n)} = A$.

<u>DOKAZ</u>. (skica) Zapišimo vrsto iz nenegativnih členov prvotne vrste $p_1 + p_2 + \cdots$, $p_i \geq 0$ in vrsto iz negativnih členov $q_1 + q_2 + \cdots$, $q_i < 0$. Ker vrsta konvergira, je $\lim p_n = 0$ in $\lim q_n = 0$ (saj je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$), ker absolutno ne konvergira, sama pa konvergira, obe vrsti divergirata. Z dovolj dolgimi delnimi vsotami presežemo poljubno število.

Naj bo A poljubno število. Vzamemo toliko členov iz $\sum p_i$, da ravno presežemo A, potem toliko členov iz $\sum q_i$, da pridemo ravno pod A, in ponavljamo. Tako pridemo do preurejene vrste, katere vsota je enaka A. ∎

5. ALTERNIRAJOČE VRSTE

<u>Izrek</u>. (Leibniz-ov kriterij) Naj bo $\sum a_n$ alternirajoča vrsta (t.j. $\operatorname{sgn}(a_{n+1}) = -\operatorname{sgn}(a_n)$) in naj bo $|a_1|, |a_2|, \ldots$ padajoče zaporedje z limito 0. Tedaj vrsta $\sum a_n$ konvergira.

<u>Primer</u>. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ konvergira (ne konvergira pa absolutno).

<u>DOKAZ</u>. Naj bo $b_n = |a_n|$ ($n \in \mathbb{N}$). Privzemimo $a_1 < 0$, t.j. $a_1 = -b_1$. $\sum a_n$ je $\sum (-1)^n b_n$. Naj bo s_n n-ta delna vsota $\sum a_n$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k b_k$. Velja: $s_{2n+1} = s_{2n-1} + b_{2n} - b_{2n+1} \geq s_{2n-1}$. Enako: $s_{2n+2} = s_{2n} - b_{2n+1} + b_{2n+2} \leq s_{2n}$.

Torej je zaporedje $s_1, s_3, s_5, \dots$ naraščajoče, $s_2, s_4, s_6, \dots$ padajoče. Jasno je še $s_{2n} = s_{2n-1} + b_{2n} \geq s_{2n-1}$, torej $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2$. Torej obstajata $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1} = s'$ in $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s''$. Potem je za $\forall n$ $s_{2n-1} \leq s'$, $s'' \leq s_{2n}$. Ker je $s_{2n} - s_{2n-1} = b_{2n} \to 0$, je $s' = s'' = s$, zato je $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, torej $\sum a_n$ res konvergentna. ■

6. MNOŽENJE VRST

Naj bosta dani konvergentni vrsti $A = \sum a_n$ in $B = \sum b_n$. Oglejmo si vse mogoče produkte:

$$\begin{array}{|lllll} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 & a_4 b_1 & \dots \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & \vdots & & \\ \vdots & a_2 b_3 & & & \\ & \vdots & & & \end{array} \qquad (C)$$

Napravimo lahko različne neskončne vsote, npr.

Vsako tako neskončno vsoto imenujemo produkt vrst AB.

<u>Izrek</u>. Naj bosta A in B absolutno konvergentni vrsti. Tedaj je (vsak) njun produkt, t.j. neskončna vrsta iz vseh produktov iz (C) v poljubnem vrstnem redu, spet konvergentna in njena vsota je $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

<u>DOKAZ</u>. Naj bo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = A^*$ in $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| = B^*$. Naj bo sedaj $\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s} = a_{i_1} b_{k_1} + a_{i_2} b_{k_2} + \dots$ vrsta iz produktov v nekem vrstnem redu. Pokažimo, da so delne vsote $|a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + \dots + |a_{i_m} b_{k_m}|$ navzgor omejene.

Naj bo l večje od $i_1, i_2, \dots, i_m, k_1, k_2, \dots, k_m$. Tedaj je $|a_{i_1} b_{k_1}| + \dots + |a_{i_m} b_{k_m}| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{l} |a_i|\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{l} |b_k|\right) \leq A^* B^*$.

Delne vsote so navzgor omejene z A^*B^*, zato vrsta $a_{i_1}b_{k_1}+\dots$ absolutno konvergira. Vsota je potem neodvisna od vrstnega reda seštevanja.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1b_1}_{a_1b_1}+\underbrace{a_2b_1+a_1b_2+a_2b_2}}_{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}+\underbrace{\dots+a_1b_3+\dots}}_{(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)\ \dots}=$$

Če so s_n delne vsote $\sum a_n$ in t_n delne vsote $\sum b_n$, je s_nt_n podzaporedje delnih vsot produkta in to podzaporedje konvergira k limiti S zaporedja delnih vsot. $S=\lim s_n\cdot \lim t_n$, neskončna vsota $a_{i_1}b_{k_1}+\dots=$
$=(a_1+a_2+\dots)(b_1+b_2+\dots)$. ■

10.4.2003

<u>Opomba</u>. (O dvakratnih vrstah)

$$A=\begin{array}{|lllll} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \\ a_{31} & a_{32} & \dots & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ ... vsote po posameznih vrsticah (i-ta)

$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right)$ (*) ... dvakratna vrsta

$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ ... vsote po stolpcih

$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)$ ... dvakratna vrsta (**)

Vrsta (*) je konvergentna, če konvergira vsaka od vrst $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ in nato še (*).

Zapišemo še elemente A v zaporedje $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$
$\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ (***). (bijekcija $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$)

Velja: če (***) konvergira absolutno in je njena vsota U, tedaj konvergirata (*) in (**) in imata vsoti enaki U.

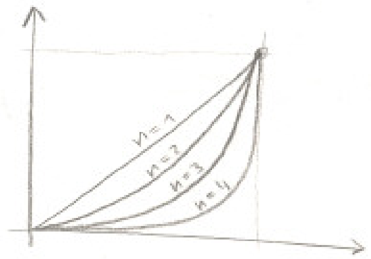
Če konvergira vrsta, ki jo iz (*) dobimo z nadomestitvijo vseh a_{ij} z $|a_{ij}|$, tedaj konvergira (***) absolutno in so vsote vseh treh vrst enake. Dokaz doma!

7. FUNKCIJSKA ZAPOREDJA IN VRSTE, ENAKOMERNA KONVERGENCA

Naj bo $f_1, f_2, f_3, \dots$ zaporedje funkcij, definiranih na D.

<u>Definicija</u>. Zaporedje funkcij f_n konvergira na D, če za $\forall x \in D$ konvergira zaporedje $\{f_n(x)\}$. Če za vsak $x \in D$ pišemo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, imenujemo funkcijo f limita zaporedja f_n.

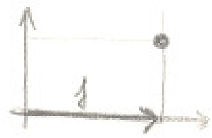
<u>Primer</u>. $D = [0,1]$ in $f_n(x) = x^n$.



$0 \le x < 1 \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \underline{0}$

$f(1) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1^n = \underline{\underline{1}}$

$$f(x) = \begin{cases} 0; & 0 \le x < 1 \\ 1; & x = 1 \end{cases}$$



<u>Definicija</u>. Zaporedje funkcij f_n konvergira <u>enakomerno</u> na D (k funkciji f), če za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za vse $x \in D$, če je le $n \ge n_0$.

<u>Opomba</u>. Enakomerna konvergenca je več kot konvergenca, saj tam za $\forall \varepsilon > 0$, $x \in D$ obstaja n_0 (v splošnem odvisen od x), da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za $\forall n \ge n_0$. Pri enakomerni konvergenci moramo za vsak $\varepsilon > 0$ izbrati n_0 neodvisen od x (isti je dober za vse $x \in D$).

<u>Primer 1</u>. $f_n(x) = x/n$, $D = \mathbb{R}$

Konvergira na $\mathbb{R}$ k $f(x) = 0$. Ne konvergira pa enakomerno.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, neodvisen od x $\ni: \left|\frac{x}{n} - 0\right| < \varepsilon$ za vse $x \in \mathbb{R}$,

t.j. $\exists n_0 \ni: \frac{|x|}{n} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow n > \frac{|x|}{\varepsilon}$ za vse $n \geq n_0$ in $x \in \mathbb{R}$.

Ne. Če bi to šlo, bi bilo npr. $n_0 > \frac{|x|}{\varepsilon}$ za $\forall x \in \mathbb{R}$, to za dovolj velike x ne gre.

<u>Primer 2.</u> $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $f(x) \equiv 0$ doma: enakomerno konv.

<u>Primer 3.</u> $f_n(x) = x^n$ ne konvergira enakomerno na $[0,1]$.

$f_n(x) = x^n$ konvergira na $[0,1]$ k $f(x) = \begin{cases} 0; & x<1 \\ 1; & x=1 \end{cases}$

Ali $f_n(x)$ enakomerno konvergira na $[0,1)$?

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ni: |f_n(x) - 0| < \varepsilon$ za $n > n_0$, $x \in [0,1) \Leftrightarrow$

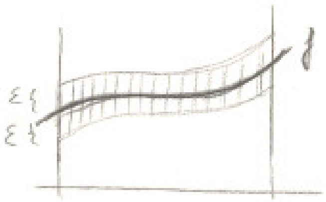
$x^n < \varepsilon$ za $n \geq n_0$, $x \in [0,1) \Leftrightarrow$

$x < \sqrt[n]{\varepsilon}$ za $n \geq n_0$, $x \in [0,1)$

Ne. Če bi n_0 obstajal, bi bilo $x < \sqrt[n_0]{\varepsilon} \in (0,1)$ za $\forall x \in [0,1)$

npr. $\varepsilon = \frac{1}{2}$: $x < \sqrt[n_0]{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ ne gre za $x \in \left[\sqrt[n_0]{\tfrac{1}{2}}, 1\right)$.

<u>Geometrijska interpretacija.</u>



$\varepsilon > 0$

$f \leftarrow$ grafi f_n za $n \geq n_0$ ležijo v pasu širine 2ε okoli grafa f

<u>Izrek.</u> Naj f_n konvergira enakomerno na D k f. Če so vse f_n zvezne v $a \in D$, je tudi f zvezna v a. Če so vse f_n zvezne na D, je tudi f zvezna na D.

<u>DOKAZ.</u> Za $\forall n$: $|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$. (*)

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno majhen. Izberimo n, da bo $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za $\forall y \in D$ (enak. konv.). Ker je f_n zvezna v a, obstaja $\delta > 0$, da je $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za $|x-a| < \delta$, $x \in D$. Če je $x \in D$ in $|x-a| < \delta$, je iz (*)

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \ \blacksquare$$

<u>Opomba.</u> Enakomerna limita zaporedja zveznih funkcij je torej spet zvezna funkcija. V splošnem limita zaporedja zveznih funkcij ni nujno zvezna.

Definicija. Naj bodo $u_1, u_2, u_3, \dots$ funkcije, definirane na D. Vrsta $u_1(x) + u_2(x) + \dots$ konvergira enakomerno na D, če zaporedje njenih delnih vsot $s_n(x)$ konvergira enakomerno na D. $\left(s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} s_i(x)\right)$

Posledica. Vsota enakomerno konvergentne vrste zveznih funkcij na D je zvezna funkcija.

Cauchy-jev pogoj: zaporedje števil $\{a_n\}$ konvergira natanko tedaj, ko za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je $|a_n - a_m| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$, $m \geq n_0$.

Izrek. Zaporedje f_n funkcij na D je enakomerno konvergentno $\Leftrightarrow$ je enakomerno Cauchy-jevo, t.j.: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ni: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ za vse $n, m \geq n_0$, za vse $x \in D$. Doma!

Izrek'. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcij na D je na D enakomerno konvergentna $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ni: \left|\sum_{n=m}^{m+p} u_n(x)\right| < \varepsilon$ za vse $m \geq n_0$, $p \geq 0$ in vse $x \in D$, t.j. ko je zaporedje $s_n(x)$ njenih delnih vsot enakomerno Cauchy-jevo. Dokaz doma!

Izrek. (Weierstrassov primerjalni kriterij za enakomerno konvergenco funkcijskih vrst) - Weierstrassov M-test

Naj bo u_n zaporedje funkcij na D. Naj za $\forall n$ obstaja število c_n, da je $|u_n(x)| \leq c_n$ za vse $x \in D$ in da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira. Tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergira enakomerno na D.

DOKAZ. To je preprosta posledica izreka':

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} u_n(x)\right| \leq \sum_{n=m}^{m+p} |u_n(x)| \leq \sum_{n=m}^{n+p} c_n.$$

Primer. Naj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergira. Tedaj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ in $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ konvergirata enakomerno na vsem $\mathbb{R}$.