VIII. METRIČNI PROSTORI

1. DEFINICIJA, OSNOVNE LASTNOSTI

Definicija. Metrični prostor je neprazna množica M, skupaj s preslikavo $d: M \times M \to \mathbb{R}$, ki ima naslednje lastnosti:

(1) $d(x,y) \geq 0$ za $\forall x, y \in M$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$

(3) trikotniška neenakost: $x, y, z \in M$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Če ima d te lastnosti, imenujemo $d(x,y)$ razdalja točk x in y prostora M.

Opomba. Iz (3) sledi $d(x,y) \geq d(x,z) - d(z,y)$ za $\forall z$.

Primer. $\mathbb{R}$ je metričen prostor, če definiramo $d(x,y)$ kot $d(x,y) = |y-x|$.

$\mathbb{C}$ je metrični prostor za $d(z,w) = |z-w|$.

$\mathbb{R}^3$ za $d(x,y) = d((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) =$

$= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$.

Vsaka podmnožica od $\mathbb{R}^3$ z enako definiranim d je spet metrični prostor.

Splošneje. Vsaka podmnožica S met. pr. (M,d) je za d spet metričen prostor (S,d).

Primer. Naj bo $C(a,b)$ množica vseh zveznih funkcij na $[a,b]$. Če sta $f, g \in C(a,b)$, je $f-g \in C(a,b)$ in je omejena.

Funkcija $x \longmapsto |f(x)-g(x)|$ je torej omejena zvezna nenegativna funkcija na $[a,b]$. Potem doseže svoj maksimum.

Definiramo $d(f,g) = \max\limits_{x\in[a,b]} \{|f(x)-g(x)|\}$. Potem je $(C(a,b), d)$ metričen prostor.

Premisli doma!

- $f, g, h \in C(a,b)$

$\forall x \in [a,b] \quad |f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|$

(trik. neen. za $\mathbb{R}$.)

$$|f(x)-g(x)| \leq \max|f(t)-h(t)| + \max|h(t)-g(t)|, \ \forall x \Rightarrow$$

$$\underbrace{\max|f(x)-g(x)|}_{=d(f,g)} \leq \underbrace{\max|f(x)-h(x)|}_{=d(f,h)} + \max|h(x)-g(x)|$$

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g) \ \blacksquare$$

<u>Primer</u>. $\mathbb{R}^3$, $d((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, |x_3-y_3|\}$.

$(\mathbb{R}^3, d)$ postane vekt. pr.

<u>Definicija</u>. Naj bo (M,d) metričen prostor. Naj bo $a \in M$ in $r>0$.

Odprta krogla s središčem a in polmerom r je množica $K(a,r) = \{x\in M: d(x,a) < r\}$.

Zaprta krogla s središčem v a in polmerom r je množica $\overline{K}(a,r) = \{x \in M : d(x,a) \leq r\}$.

<u>Opomba</u>. Krogle s središčem v a bomo pogosto imenovali okolice.

<u>Definicija</u>. Naj bo $a\in M$, (M,d). Okolica točke a je vsaka množica, ki vsebuje neko kroglo s središčem v a.

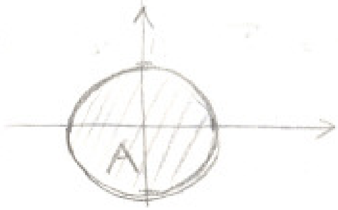
<u>Definicija</u>. Naj bo $A \subseteq M$, (M,d).

(i) $a \in M$ je <u>notranja točka</u> množice A, če obstaja okolica točke a, ki vsa leži v A

(ii) $b \in M$ je <u>zunanja točka</u> za A, če obstaja okolica te točke, ki ne vsebuje nobene točke iz A

(iii) $c \in M$ je <u>robna točka</u> za A, če vsaka okolica te točke vsebuje točke iz A in točke, ki niso v A

Primer. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$



~ notranje točke so vse iz A

~ zunanje so tiste, ki so od izhodišča oddaljene za več kot 1

~ robne točke: $\{x^2+y^2=1\}$

6. 5. 2003

Opomba. Za vsako $A \subset M$ je $\{\text{not. točke } A\} \cup \{\text{zun. t.}\} \cup \{\text{robne t.}\} = M$, saj so edine možnosti za $\forall a \in M$:

~ obstaja $K(a,r)$, ki vsebuje le točke iz A (not.)

~ –||– le točke iz $A^c = M \setminus A$ (zun.) ali

~ vsaka okolica vsebuje točke iz A in A^c (rob.)

in te možnosti so disjunktne.

Oznaka. Naj bo $A \subset M$. Množico vseh notranjih točk A imenujemo NOTRANJOST množice A in označimo $\operatorname{Int} A$, množico vseh robnih točk za A imenujemo MEJA ali ROB množice A in označimo z ∂A.

Primer 1. $M = \mathbb{R}$ z običajno razdaljo. $A = [a,b]$

$\operatorname{Int} A = (a,b)$

$\partial A = \{a,b\}$

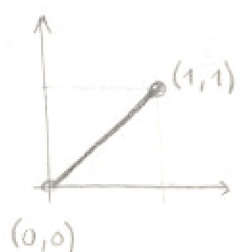
Množica zunanjih točk je $\mathbb{R} \setminus [a,b]$.

Primer 2. $M = \mathbb{R}$, $A = [a,b)$

$\operatorname{Int} A = (a,b)$

$\partial A = \{a,b\}$

Primer 3. $M = \mathbb{R}^2$, A daljica od $(0,0)$ do $(1,1)$ s krajiščema vred.



$\operatorname{Int} A = \emptyset$

$\partial A = A$

(V ravnini je okolica 'krog'!)

Vsaka notranja točka od A je v A ($\operatorname{Int} A \subset A$).
Nobena zunanja točka za A ni v A. Robna točka je lahko v A ali pa ne.
Označimo $A^c = M \setminus A$ (komplement A). Tedaj je notranja točka od A zunanja za A^c in zunanja za A notranja za A^c.
Robna točka za A je hkrati tudi robna točka za A^c (in obratno). $\Rightarrow \partial A = \partial A^c$

<u>Definicija</u>. Podmnožica O metričnega prostora (M, d) je ODPRTA, če je vsaka njena točka notranja točka.

<u>Opomba</u>. Vedno je $\operatorname{Int} A \subseteq A$, če je odprta, je $A \subseteq \operatorname{Int} A$, torej je A odprta $\Leftrightarrow A = \operatorname{Int} A$.

<u>Definicija</u>. Množica Z metričnega prostora (M, d) je zaprta, če vsebuje vse svoje robne točke.

<u>Opomba</u>. Torej je A zaprta $\Leftrightarrow A = \operatorname{Int} A \cup \partial A$.

<u>Diskusija</u>. Nobena točka odprte množice O ni robna točka, torej so za tak O vse robne točke vsebovane v O^c. $\partial O = \partial O^c$, potem je za odprto množico O množica O^c zaprta ($\partial O^c \subset O^c$).
Podobno: če je O^c zaprta, je $\partial O^c \subset O^c$, torej $(O^c)^c = O$ ne vsebuje nobene svoje robne točke, torej je O odprta.

$$A \text{ odprta} \Leftrightarrow A^c \text{ zaprta}$$
$$A \text{ zaprta} \Leftrightarrow A^c \text{ odprta}$$

<u>Primer 1.</u> $M = \mathbb{R}$ (a) $A = (a, b)$, (b) $A = [a, b]$, (c) $A = [a, b)$

(a) A je odprta (b) A je zaprta (c) niti odprta, niti zaprta

Opomba. M je odprta (vsaka točka je notranja)
$\partial M = \emptyset$, zato je $\partial M \subset M$, torej je M zaprta
Torej je prostor M hkrati odprta in zaprta, enako za $\emptyset$.

Izrek. Naj bo $\mathcal{O}$ družina vseh odprtih podmnožic metričnega prostora (M,d). Velja:

O1 $\emptyset \in \mathcal{O}$, $M \in \mathcal{O}$

O2 Unija poljubne družine odprtih množic, je spet odprta množica.

O3 Presek končnega števila odprtih množic je spet odprta množica.

DOKAZ. O1 zgoraj

O2 Naj bodo O_γ, $\gamma \in \Gamma$ odprte množice v M, $O = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} O_\gamma$. Naj bo $a \in O$, tedaj je $a \in O_{\gamma_0}$ za neki γ_0. Ker je O_{γ_0} odprta, obstaja $K(a,r) \subset O_{\gamma_0} \subset O$. Potem je a notranja točka za O za $\forall a \in O$. Potem je O odprta.

O3 Naj bodo $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ odprte množice in $O = O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n$. Naj bo $a \in O$. Tedaj je $a \in O_i$ za $\forall i$, $i = 1, \dots, n$. Ker so vse O_i odprte, za $\forall i$ obstaja $K(a, r_i) \subset O_i$. Naj bo $r = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0$. Tedaj je $K(a,r) \subset K(a,r_i)$ za $\forall i$, torej $K(a,r) \subset O_i$ in $K(a,r) \subset O$. Potem je O odprta.

Izrek. Naj bo Z družina vseh zaprtih množic metričnega prostora (M,d). Tedaj velja

Z1. $M \in Z$, $\emptyset \in Z$

Z2. Unija končnega števila zaprtih množic je zaprta.

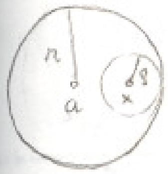
Z3. Presek poljubne družine zaprtih množic je spet zaprta množica.

DOKAZ. Poglej komplemente. Doma!

$Z_1 \cup \dots \cup Z_n$ zaprta $\Leftrightarrow (Z_1 \cup \dots \cup Z_n)^c$ odprta $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow Z_1^c \cap \dots \cap Z_n^c$ odprt

Primer 1. Odprta krogla $K(a,r)$ v (M,d) je odprta.

DOKAZ. Naj bo $x \in K(a,r)$. Tedaj je $d(a,x) < r$. Naj bo ϱ tak, da je $0 < \varrho < r - d(a,x)$. Če je $y \in K(x,\varrho)$, je $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < \varrho + d(x,a) <$
$< r - d(x,a) + d(x,a) = r$. Torej je $K(x,\varrho) \subset K(a,r)$.



Torej za $\forall x \in K(a,r)$ lahko najdemo kroglo $K(x,\varrho)$, ki je vsa v $K(a,r)$, torej je $K(a,r)$ odprta. ∎

Primer 2. Za vsak $a \in M$ in $r > 0$ je $A = \{x \in M, d(a,x) > r\}$ odprta množica.

DOKAZ. Analogen. Doma!

Primer 3. Zaprta krogla $\overline{K}(a,r) = \{x, d(a,x) \leq r\}$ je zaprta množica.

DOKAZ. $\overline{K}(a,r)$ je komplement A iz primera 2, ki je odprta. ∎

Opomba. Pričakovali bi, da bo v splošnem notranjost $\overline{K}(a,r)$ enaka $K(a,r)$. To v splošnem ni res.

Primer. Naj bo $M = \{a,b,c\}$, kjer so a,b,c oglišča enotskega enakostraničnega trikotnika.

$K(a,1)=\{a\}$, $\overline{K}(a,1)=\{a,b,c\}=M$, M odprta $\Rightarrow$

$\text{Int}(\overline{K}(a,1))=M\neq K(a,1)$

$\partial(K(a,1))=\emptyset$, $\partial(\overline{K}(a,1))=\phi$.

Definicija. Množica A metričnega prostora je OMEJENA, če vsa leži v neki (dovolj veliki) krogli, t.j. če obstajata $a\in M$ in $r<\infty$, da je $A\subset K(a,r)$.

Definicija. Točka $a\in M$ se imenuje STEKALIŠČE množice $A\subset M$, če vsaka okolica točke a vsebuje neskončno točk množice A (t.j. za $\forall r>0$ je v $K(a,r)$ neskončno točk iz A).

Opomba. Torej imajo stekališča lahko le neskončne množice.

Izrek. Točka $a\in M$ je stekališče množice $A\subset M$ natanko takrat, ko vsaka okolica točke A vsebuje vsaj eno od a različno točko množice A.

DOKAZ. Če je a stekališče, vsaka okolica vsebuje neskončno točk iz A, torej zagotovo eno, različno od a.

Naj bo iz M taka točka, da vsaka njena okolica vsebuje vsaj eno od a različno točko iz A. Naj bo U poljubna okolica a, t.j. $K(a,r)\in U$ za neki $r>0$. Naj bo $a_1\in K(a,r)\cap A$, $a_1\neq a$. $d(a,a_1)=r_1>0$, ker je $a_1\neq a$ in $d(a,a_1)<r$. Po predpostavki lahko izberemo $a_2\in K(a,r_1)\cap A$, $a_2\neq a$. Jasno je $r_1<r$ in $a_2\neq a_1$, ker je $d(a,a_1)=r_1\neq d(a,a_2)$. Nadaljujemo. $a_2\neq a\Rightarrow d(a,a_2)=r_2>0$, $r_2<r_1$, $\exists a_3\neq a$, $a_3\in K(a,r_2)\cap A$, itn. Dobimo zaporedje $a_1,a_2,a_3,\dots$ različnih točk in $d(a,a_1)>d(a,a_2)>\dots$ in $d(a,a_1)<r$. $a_1,a_2,\dots\in K(a,r)$, potem imamo v U neskončno točk iz A, ki ustrezajo. ∎

8. 5. 2003

<u>Posledica</u>. Množica A v metričnem prostoru, $A \neq \emptyset$, je zaprta $\Leftrightarrow$ vsebuje vsa svoja stekališča.

<u>DOKAZ</u>. Iz def. stekališča je očitno, da je stekališče notranja točka, ali pa robna. Če je A zaprta, vsebuje vse svoje robne točke, torej tudi vsa svoja stekališča.

Naj zdaj A ne bo zaprta. Tedaj obstaja točka v ∂A, ki ni v A. V vsaki okolici točke $a \in \partial A$, $a \notin A$ so točke iz A in točke, ki niso v A. Točke iz A so različne od a. Vsaka okolica točke a vsebuje točke iz A. Torej je a stekališče A in $a \notin A$. ∎

2. ZAPOREDJA TOČK V METRIČNIH PROSTORIH

(M, d) metrični prostor

$a_1, a_2, a_3, \ldots$; $a_i \in M$ za $i \in \mathbb{N}$ ... zaporedje točk iz M

<u>Definicija</u>. Zaporedje v metričnem prostoru M je preslikava $\mathbb{N} \to M$. Če n pripada a_n, imenujemo a_n n-ti člen zaporedja.

<u>Definicija</u>. Točka $a \in M$ je stekališče zaporedja a_n, če vsaka njena okolica vsebuje neskončno členov zaporedja, t.j. $\forall \varepsilon > 0$ velja $d(a, a_n) < \varepsilon$ za neskončno mnogo n-jev. t.j. $a_n \in K(a, \varepsilon)$

<u>Definicija</u>. Zaporedje $\{a_n\}$ v M konvergira proti točki $a \in M$, če vsaka okolica točke a vsebuje vse člene zaporedja od nekega naprej, t.j. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \ni$: $d(a, a_n) < \varepsilon$ za $\forall n \geq n_0$.

Točko a imenujemo limita zaporedja $\{a_n\}$ in pišemo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

<u>Opomba</u>. Če je $M = \mathbb{R}$ in d običajna razdalja $(d(x,y) = |x-y|)$, dobimo že znani definiciji limite in stekališča.

Opomba. Če je $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, je a stekališče zaporedja $\{a_n\}$.

Limita, če obstaja, je edino stekališče in je ena sama.

D.: Slednje sledi iz definicije: če imamo dve, a in b, bi v vsaki okolici a ležali vsi členi od nekega naprej, enako za b. Vendar v M obstajata disjunktni okolici: $R = d(a,b)$, $0 < r < \frac{R}{2}$; $K(a,r) \cap K(b,r) = \{\}$.

$x \in K(a,r) \cap K(b,r) \Rightarrow d(a,b) = R \leq d(a,x) + d(x,b) < r + r < R$.

Protislovje $\Rightarrow$ disjunktnost. Potem so vsi členi od nekega naprej v $K(a,r)$ in $K(b,r)$ in presek je prazen. Protislovje.

Naj ima zaporedje limito $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in stekališče $b \neq a$. Kot prej izberemo r, $0 < r$, da je $K(a,r) \cap K(b,r) = \emptyset$. Ker je a limita, ležijo v $K(a,r)$ vsi členi od nekega naprej. Izven $K(a,r)$ jih je največ končno, torej jih je v $K(b,r)$ največ končno. Torej b ne more biti stekališče. ▪

1/2

Definicija. Zaporedje $\{a_n\}$ v metričnem prostoru (M,d) izpolnjuje Cauchy-jev pogoj, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$, da je $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ za $\forall m,n \geq n_0$.

Opomba. Na $M = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$, je to že znani Cauchy-jev pogoj.

Če zaporedje izpolnjuje CP, mu pravimo Cauchy-jevo zaporedje.

Izrek. Vsako konvergentno zaporedje $\{a_n\}$ v M je Cauchy-jevo.

DOKAZ. $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je a limita, obstaja n_0, da je $d(a, a_n) < \varepsilon/2$ za vse $n \geq n_0$.

Naj bosta $m,n \geq n_0$. $d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ▪

Opomba. Zaporedje v $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ je konvergentno $\Leftrightarrow$ izpolnjuje CP. Enako velja v $\mathbb{R}^n$. V splošnih metričnih prostorih pa to ni res.

Primer. Naj bo $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ z običajno razdaljo $d(x,y) = |x-y|$. Zaporedje $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ je Cauchy-jevo, limite pa nima $(0 \notin M)$.

Primer. $\mathbb{Q}$ $|x-y| = d(x,y)$

Definicija. Metrični prostor (M,d) je poln, če je v njem vsako Cauchy-jevo zaporedje konvergentno, t.j. če je CP ne samo potreben, temveč tudi zadosten za konvergenco.

Primeri. Polni prostori: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$

Izrek. Naj bo $\mathcal{C}[a,b]$ prostor vseh zveznih funkcij na $[a,b]$, s stand. metriko $d(f,g) = \max |f(x)-g(x)|$, $x \in [a,b]$. Zaporedje f_n v $\mathcal{C}[a,b]$ konvergira k $f \Leftrightarrow f_n$ konvergira k f enakomerno na $[a,b]$.

DOKAZ. $f_n \to f$ v $\mathcal{C}[a,b]$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \ni: d(f,f_n) < \varepsilon$ za $\forall n \geq n_0$, t.j. $d(f,f_n) = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

Torej je $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ za $\forall x, a \leq x \leq b, n \geq n_0$.

To je ravno enakomerna konvergenca.

Naj bo zdaj $f_n \to f$ enakomerno: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \ni$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x, a \leq x \leq b, n \geq n_0$. $\max\limits_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$, t.j. $d(f_n, f) < \varepsilon$ za $\forall n \geq n_0$, to je ravno konvergenca. ∎

Izrek. Prostor $\mathcal{C}[a,b]$ s st. metriko je poln.

DOKAZ. Naj bo f_n Cauchy-jevo zaporedje v $\mathcal{C}[a,b]$; torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ za vse $m, n \geq n_0$. Sledi: $\max\limits_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, $n, m \geq n_0$. Torej je $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ za vse $n, m \geq n_0$, $\forall x$. Potem je za vsak fiksen x zaporedje $\{f_i(x)\}$ Cauchy-jevo zaporedje števil. Zato je konvergentno ($\mathbb{R}$ je poln). Označimo $\lim\limits_{i \to \infty} f_i(x) = f(x)$. Pri $m \to \infty$ je $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$, $\forall x, a \leq x \leq b$. Za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \ni$: $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, $n \geq n_0$, x, $a \leq x \leq b$. Potem zaporedje funkcij f_n na $[a,b]$ enakomerno konvergira k f. Potem je po znanem izreku f spet zvezna na $[a,b]$, torej $\{f_n\}$ iz $\mathcal{C}[a,b]$, konvergira k $f \in \mathcal{C}[a,b]$ enakomerno, torej konvergira ∎

3. KOMPAKTNE MNOŽICE, KOMPAKTNI PROSTORI

<u>Definicija</u>. Naj bo (M, d) metrični prostor in $K \subset M$.
Družina množic A_γ, $\gamma \in \Gamma$ je POKRITJE za K, če je $K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$.

Če so vse A_γ odprte, je to ODPRTO POKRITJE. Če so A_γ vse zaprte, je to ZAPRTO POKRITJE. Če je v družini le končno množic, je to KONČNO POKRITJE. (t.j. Γ je končna množica).

PODPOKRITJE pokritja A_γ, $\gamma \in \Gamma$ množice K je vsaka poddružina, ki je pokritje za K.

<u>Definicija</u>. Množica $K \subset M$ je <u>kompaktna</u>, če vsako odprto pokritje množice K vsebuje končno podpokritje, t.j. če iz vsake družine odprtih množic, katerih unija vsebuje K, lahko izberemo končno množic, katerih unija vsebuje K.

13.05.2003

<u>Opomba</u>. Vsaka končna množica je kompaktna.

<u>Opomba</u>. Če je $M = \mathbb{R}$ z običajno razdaljo, je vsak zaprt interval $[a, b]$ kompaktna množica. (To smo že dokazali: če je za $\forall x \in [a,b]$ dan $\delta_x > 0$, lahko najdemo $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$, da je $[a,b] \subset (x_1 - \delta_{x_1}, x_1 + \delta_{x_1}) \cup \dots \cup (x_n - \delta_{x_n}, x_n + \delta_{x_n})$.)

<u>Primer</u>. Odprti interval (a, b) nikoli ni kompaktna množica.

$O_n = (a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ je odprto pokritje (a, b), ki ne vsebuje končnega podpokritja.

<u>Opomba</u>. Včasih je kar ves prostor M kompakten. Npr. $M = [a, b]$ z običajno razdaljo $d(x,y) = |x - y|$ je kompakten prostor. Doma!

Izrek. Vsaka kompaktna množica je omejena in zaprta.

DOKAZ. Naj bo $A \subset M$ kompaktna. Naj bo $a \in A$ in si oglejmo družino odprtih krogel $\{K(a,r); r>0\}$.

Ker je za vsak $x \in M$ $d(a,x) < \infty$, je $\bigcup_{0<r<\infty} K(a,r)$ cel prostor M. Torej je $A \subset \bigcup_{0<r<\infty} K(a,r)$, torej je $\{K(a,r); r \in (0,\infty)\}$ odprto pokritje. Ker je A kompaktna, obstaja končno podpokritje, t.j. $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, da je $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(a,r_i)$. Naj bo $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$. Tedaj je $K(a,r_i) \subset K(a,r)$ za $\forall i$ in je $A \subset K(a,r)$. Potem je A omejena.

Naj bo A kompaktna. Pokažemo, da je komplement A^c odprt. Naj bo $c \in A^c$. Pokažemo, da obstaja okolica c, ki ne seka A. Za $\forall r>0$ je $O_r = \{x \in M : d(x,c) > r\}$ odprta množica. Družina $\{O_r, r>0\}$ pokrije ves $M \setminus \{c\}$. Ker $c \notin A$, je $A \subset M \setminus \{c\}$, torej je A vsebovana v $\bigcup_{r>0} O_r$, t.j. $\{O_r, r>0\}$ je odprto pokritje za A. Obstaja končno podpokritje, t.j. $\exists r_1, \dots, r_n$, da je $A \subset O_{r_1} \cup \dots \cup O_{r_n}$. Naj bo $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$. Tedaj je $O_{r_i} \subset O_r$ za $\forall i$. Torej $A \subset O_r$, t.j. $A \subset \{x, d(x,c) > r\}$, t.j. $\forall x \in A$ je $d(x,c) > r$. Potem je $K(c,r) \cap A = \emptyset$. Potem je $K(c,r) \subset A^c$, torej je A^c odprta. Potem je A zaprta. ∎

Izrek. Vsaka zaprta podmnožica kompaktne množice K je kompaktna.

DOKAZ. Naj bo K kompaktna, Z zaprta in $Z \subset K$. Jasno je Z^c odprta. Naj bo $\{O_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ odprto pokritje za Z. Tedaj je družina $\{O_\gamma, \gamma \in \Gamma; Z^c\}$ odprto pokritje za M. Seveda je $K \subset Z^c \cup [\bigcup_{\gamma \in \Gamma} O_\gamma]$. Ker je K kompaktna, obstaja končno podpokritje za K, t.j. $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{\gamma_i} (\cup Z^c)$. Ker je $Z \subset K$ in Z^c ne vsebuje nobene točke iz Z, je $Z \subset \bigcup O_{\gamma_i}$ in Z kompaktna. ∎

Diskusija. Vsaka kompaktna množica je omejena in zaprta. V splošnem obrat ne velja. Velja npr. za $M = \mathbb{R}$.

Izrek. Množica v $\mathbb{R}$ je kompaktna $\Leftrightarrow$ je zaprta in omejena.

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Sledi iz zgoraj.

($\Leftarrow$) Naj bo A zaprta in omejena, $A \subset \mathbb{R}$. Obstaja $r < \infty$, da je $A \subset [-r, r]$. Vemo, da je $[-r, r]$ kompaktna. Ker je A zaprta, je kompaktna. ■

Izrek. Vsaka neskončna množica točk, ki leži v kompaktni množici metričnega prostora, ima vsaj eno stekališče.

DOKAZ. Naj bo K kompaktna in $A \subset K$ neskončna množica. Denimo, da nobena točka iz K ni stekališče za A. Naj bo $x \in K$, ker ni stekališče, obstaja $K(x, r_x)$, $r_x > 0$, da je $A \cap K(x, r_x)$ končna. Družina $\{K(x, r_x), x \in K\}$ je odprto pokritje. Ker je K kompaktna, obstaja končno podpokritje, t.j. $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, r_{x_i})$. Ker je $A \subset K$, je $A \subset \bigcup K(x_i, r_{x_i})$. V vsaki $K(x_i, r_{x_i})$ je največ končno točk iz A, potem jih je v $\bigcup K(x_i, r_{x_i})$ največ končno. Potem je A končna. Protislovje. ■

Opomba. V zgornjem primeru je vsako stekališče od A vsebovano v K. Vemo: če je $A \subset Z$, Z zaprta in x stekališče A, je x po definiciji tudi stekališče Z. Z vsebuje vsa svoja stekališča, torej je $x \in Z$ (ker je Z zaprta).

Izrek. Naj vsi členi $\{a_n\}$ ležijo v kompaktni množici K. Tedaj ima $\{a_n\}$ vsaj eno stekališče.

DOKAZ. Denimo, da nobena točka iz K ni stekališče. Naj bo $x \in K$. Obstaja $r_x > 0$, da je $a_n \in K(x, r_x)$ za največ končno n. Ker je $\{K(x, r_x), x \in K\}$ odprto pokritje za K in K kompaktna, obstajajo $x_1, \ldots, x_n$, da je $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, r_{x_i})$. Potem je K končna. Protislovje. ■

Opomba. Vsako stekališče zgoraj je vedno v K. Če je a stekališče $\{a_n\}$ in $\{a_n\} \subset Z$, kjer je Z zaprta, je tudi $a \in Z$. (Drugače bi bil $a \in Z^c$, Z^c odprta, $\exists K(a, r) \subset Z^c$, potem je $K(a, r) \cap Z = \emptyset$ in a ni stekališče. Protislovje.)

Posledica. Naj vsi členi zaporedja $\{a_n\}$ ležijo v kompaktni množici K. Tedaj ima $\{a_n\}$ konvergentno podzaporedje.

DOKAZ. $\{a_n\}$ ima vsaj eno stekališče $a \in K$. Naj bo $r_n > 0$ padajoče zaporedje števil, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Ker je a stekališče $\{a_n\}$, je $a_n \in K(a, r_1)$ za neskončno n, torej obstaja n_1, da je $a_{n_1} \in K(a, r_1)$, obstaja a_{n_2}, da je $a_{n_2} \in K(a, r_2)$ in $n_2 > n_1, \dots$ Obstaja n_k, da je $n_k > n_{k-1} > \dots > n_2 > n_1$ in $a_{n_k} \in K(a, r_k)$. Ker je $r_k \to 0$, je $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. ▪

Izrek. Vsak kompakten metričen prostor je poln. 15. 5. 2003

DOKAZ. Naj bo M kompakten met. prostor in $\{a_n\}$ poljubno Cauchy-jevo zaporedje. Zaradi kompaktnosti ima $\{a_n\}$ vsaj eno stekališče, označimo ga z a. Pokazati je treba, da je a limita zaporedja $\{a_n\}$. (gl. pomožni izrek) ▪

Lema. Če ima Cauchy-jevo zaporedje $\{a_n\}$ v metričnem prostoru stekališče a, je to zaporedje konvergentno in a je njegova limita.

DOKAZ. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $\{a_n\}$ Cauchy-jevo, obstaja n_0, da je $d(a_m, a_n) < \varepsilon/2$ za $\forall m, n \geq n_0$. Ker je a stekališče, je $d(a, a_m) < \varepsilon/2$ za neskončno m. (*) Izberemo m tako, da velja (*) in $m \geq n_0$. Če je $n \geq n_0$, je $d(a, a_n) \leq$
$\leq d(a, a_m) + d(a_m, a_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \ni: n > n_0 \Rightarrow d(a, a_n) < \varepsilon \Rightarrow$ konvergentnost $\Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_n$. ▪

Opomba. $\mathbb{R}$ ni kompakten prostor (ni omejen). Ima pa vsaka točka x okolico $[x-r, x+r]$, ki je kompaktna. Prostore, ki niso kompaktni, so pa taki, da ima $\forall x \in M$ kompaktno okolico, imenujemo LOKALNO KOMPAKTNI PROSTORI.

4. PODPROSTORI METRIČNEGA PROSTORA

Naj bo (M, d) metričen prostor, $A \subset M$. Tedaj je (A, d) z isto razdaljo spet metričen prostor.

Primer. $(\mathbb{R}, d)$, poljubna $A \subset \mathbb{R}$ je z isto razdaljo je spet metričen prostor (A, d).