Opomba. Rekli bomo, da je (A,d) zgoraj podprostor od (M,d).

$K_A(a,r) = \{x \in A;\ d(x,a) < r\} = K(a,r) \cap A$

Izrek. Množica O' v A je odprta v prostoru $(A,d) \Leftrightarrow$ je oblike $O \cap A$, kjer je O odprta množica v prostoru (M,d).

DOKAZ. Naj bo $O \subset (M,d)$ odprta. Za $\forall a \in O$ obstaja $r_a > 0$, da je $K(a,r_a) \subset O$. Torej je $O = \bigcup_{a \in O} K(a,r_a)$. Če je $O' \subset (A,d)$ odprta, je $O' = \bigcup_{a\in O'} K_A(a,r_a)$.

Naj bo $O = \bigcup_{a \in O'} K(a,r_a)$. Množica O je odprta v prostoru (M,d). Jasno je $O \cap A = \left(\bigcup_{a\in O'} K(a,r_a)\right) \cap A = \bigcup_{a \in O'} (K(a,r_a) \cap A) = \bigcup_{a\in O'} K_A(a,r_a)$. Torej je $O' = O \cap A$, kjer je O odprta v (M,d).

Analogno v drugo smer. ∎ Doma!

Izrek. Množica Z' v (A,d) je zaprta v $(A,d) \Leftrightarrow$ je oblike $Z \cap A$, kjer je Z zaprta v prostoru (M,d).

DOKAZ. Prehod na komplemente. Doma!

Primer. $M = \mathbb{R}^2$ z običajno razdaljo $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$, $A = \mathbb{R}$. V $\mathbb{R}$ je d za $y_1 = y_2 = 0 \Rightarrow d = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = |x_1 - x_2|$.

Izrek. Množica $K \subset A$ je v (A,d) kompaktna $\Leftrightarrow$ je kompaktna v (M,d).

DOKAZ. $(\Rightarrow)$ Naj bo $K \subset (A,d)$ kompaktna. Naj bo $\{O_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ pokritje množice K, kjer so O_γ odprte v (M,d). Tedaj so $O_\gamma' = O_\gamma \cap A$ odprte v (A,d) in tvorijo pokritje za K. (ker je $K \in \bigcup O_\gamma$, je $K \cap A \subset \bigcup O_\gamma \cap A = \bigcup O_\gamma'$, $K \subset A \Rightarrow K \cap A = K \Rightarrow$ $\Rightarrow K \subset (\bigcup O_\gamma')$). Ker je K kompaktna v (A,d), obstaja končno podpokritje za vsako odprto pokritje. Potem je $K \subset \bigcup_{\substack{\gamma_i\in\Gamma_n \\ i=1}}^{n} O_{\gamma_i}'$, $O_{\gamma_i}' = O_{\gamma_i} \cap A$ in $O_{\gamma_i}' \subset O_{\gamma_i}$, potem je $\bigcup O_{\gamma_i}' \subset \bigcup O_{\gamma_i}$. Potem je $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{\gamma_i}$. Potem je K kompaktna v (M,d).

$(\Leftarrow)$ Naj bo $K \subset A$ kompaktna v (M,d). Naj bo $\{O_\gamma', \gamma \in \Gamma\}$ odprto pokritje v (A,d). Za $\forall \gamma \in \Gamma$ obstaja $O_\gamma \subset M$ odprta, da je $O_\gamma' = O_\gamma \cap A$. Potem je $\{O_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ odprto pokritje K v (M,d).

Ker je K kompaktna v (M,d), obstaja končno podpokritje $O_{\varepsilon i}$, da je $K \subset O_{\varepsilon 1} \cup \cdots \cup O_{\varepsilon n}$. Ker je $K \subset A$, je $K \subset A \cap (O_{\varepsilon 1} \cup \cdots \cup O_{\varepsilon n}) = \bigcup O_{\varepsilon i} \cap A = \bigcup O_{\varepsilon i}'$. Potem je K kompaktna v (A,d). ∎

5. PRESLIKAVE MED METRIČNIMI PROSTORI

(M,d), (M',d') metrična prostora, $D \subset M$ neprazna.

Če je $f: D \to M'$ preslikava, pravimo, da je D njeno definicijsko območje. Za vsak $x \in D$ je $f(x) \in M'$ natanično določena. Če je $M = \mathbb{R}$ ali $M = \mathbb{C}$, je f funkcija.

<u>Definicija</u>. Preslikava $f: D \to M'$ je zvezna v točki $x_0 \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, čim je $d(x, x_0) < \delta$, $x \in D$.

<u>Opomba</u>. Ko je $M = M' = \mathbb{R}$ z običajno razdaljo: f zvezna v $x_0 \in D$, če za $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ za $|x - x_0| < \delta$, t.j. običajna definicija zveznosti.

<u>Ekvivalentna definicija</u> (z okolicami) Preslikava $f: D \to M'$ je zvezna v $x_0 \in D$, če za vsako okolico V slike $f(x_0) = y_0$ obstaja okolica U pravotne točke x_0, da je $f(U \cap D) \subset V$, t.j. da se vsaka točka D, ki je v U preslika z f v točko v V. Doma premisli!

<u>Opomba</u>. Ekvivalentno: $f: D \to M'$ zvezna v $x_0 \in D \Leftarrow \forall$ okolico V od $f(x_0)$ obstaja okolica U x_0 v (D,d), da je $f(U) \subset V$. Doma!

<u>Poseben</u>: $D = M$, $f: M \to M'$ je zvezna v $x_0 \in M$, če za $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da je $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, čim je $d|x - x_0| < \delta$.

<u>Opomba</u>. Definicija je posplošitev z števil na splošne metrične prostore.

<u>Izrek</u>. Preslikava $f: D \to M'$ je zvezna v $x_0 \in D \Leftrightarrow \forall$ zaporedje $\{x_n\} \subset M$, ki konvergira k x_0, zaporedje $\{f(x_n)\}$ konvergira k $f(x_0)$, t.j.

$$\left.\begin{matrix} x \in D \\ \lim_{n\to\infty} x_n = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

<u>DOKAZ</u>. Podobno kot pri funkcijah. Doma!

20.5.2003

Definicija. Preslikava $f: D \to M'$ je zvezna na D, če je zvezna v vsaki točki množice D.

Opomba. Če je $f: M \to M'$ zvezna, je f zvezna na D za vsako $D \subset M$.

Opomba. Omenili smo že, da zveznost v točki lahko definiramo z okolicami. Odprte množice v (D, d), $D \subset M$ so preseki odprtih množic v (M, d).

Izrek. Preslikava $f: D \to M'$ je zvezna $\Leftrightarrow$ praslika $f^{-1}(O')$ vsake odprte množice $O' \subset M'$ odprta množica v (D, d).

Poseben primer. $D = M$, $f: (M, d) \to (M', d')$ zvezna $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(O')$ odprta v (M, d) za vsako odprto $O' \subset M'$.

DOKAZ. Naj bo $f: D \to M'$ zvezna. Naj bo $O' \subset M'$ odprta in $O = f^{-1}(O')$. $\left(f^{-1}(O') = \{x \in D;\ f(x) \in O'\}\right)$ Če je O prazna, nobena slika $f(x)$ ne leži v O', je O odprta. Naj torej zdaj O ne bo prazna. Naj bo $x_0 \in O$, potem je $f(x_0) \in O'$. Ker je O' odprta, obstaja okolica V točke $f(x_0) = y_0$, ki vsa leži v O'. Ker je f zvezna v točki x_0, za vsako okolico točke y_0 obstaja okolica točke x_0, ki se vanjo preslika, torej obstaja okolica U točke x_0, ki se vsa preslika v V, torej je $f(U) \subset V \subset O'$, potem je $U \subset O$. Potem je O res odprta. $(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$ Naj bo $f^{-1}(O')$ odprta v (D, d) za vsako odprto O' v M'. Pokažemo, da je f zvezna, torej zvezna v vsaki točki D. Naj bo $x_0 \in D$ in V okolica točke $f(x_0) = y_0$, $V \subset M'$. BŠZS preidemo na V, ki je odprta okolica od y_0 $V = K(y_0, r)$ za neki $r > 0$. $f^{-1}(V)$ je odprta množica v (D, d). Ker je $f(x_0) = y_0 \in V$, množica $f^{-1}(V)$ vsebuje x_0. Ker je odprta, obstaja okolica U točke x_0 v (D, d), da je $U \in f^{-1}(V)$, t.j. $f(U) \subset V$. Potem je f zvezna v x_0. ∎

Izrek. Preslikava $f: D \to M'$ je zvezna $\Leftrightarrow$ za vsako zaprto množico $Z' \subset M'$ praslika $f^{-1}(Z')$ zaprta v (D, d).

DOKAZ. Podobno ali s prehodom na komplemente $\left(f^{-1}(O^c) = (f^{-1}(O))^c\right)$.

Opomba. Če je f zvezna in O odprta, tedaj $f(O)$ ni nujno odprta.
Če je Z zaprta, tedaj $f(Z)$ ni nujno zaprta.

Izrek. Zvezna slika kompaktne množice je kompaktna.

DOKAZ. Naj bo $K \subset M$ kompaktna in $f: K \to M'$ zvezna. Naj bo $K' = f(K) \subset M'$. Pokažemo, da je K' kompaktna.

Naj bo $\{O'_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ poljubno odprto pokritje množice K' v M'. Ker so O'_γ odprte in f zvezna, so $f^{-1}(O'_\gamma)$ odprte v (K,d). Seveda je $\{f^{-1}(O'_\gamma); \gamma \in \Gamma\}$ pokritje za K. Ker je K kompaktna v (M,d), je kompaktna v (K,d). Potem obstaja končno podpokritje $f^{-1}(O'_{\gamma_i})$, $i=1,\dots,n$ za K, torej $K \subset f^{-1}(O'_{\gamma_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(O'_{\gamma_n}) = f^{-1}(O'_{\gamma_1} \cup \dots \cup O'_{\gamma_n})$, potem je $f(K) \subset O'_{\gamma_1} \cup \dots \cup O'_{\gamma_n}$. To je končno podpokritje za K'. Potem je K' kompaktna. ∎

Posledica. Naj bo realna funkcija definirana in zvezna na kompaktni množici K v (M,d). Tedaj je f na obe strani omejena in doseže svojo največjo in najmanjšo vrednost.
(t.j. $K \subset M$ kompaktna, $f: K \to \mathbb{R}$ zvezna $\Rightarrow$ f omejena, t.j. $A \leq f(x) \leq B$ za $\forall x \in K$ za $A > -\infty$, $B < \infty$, in doseže največjo in najmanjšo vrednost, t.j. obstajata $x_{min} \in K$, $x_{max} \in K$, da je $f(x) \geq f(x_{min})$ in $f(x) \leq f(x_{max})$ za vse $x \in K$)

DOKAZ. Ker je f zvezna na K in K kompaktna, je $f(K)$ kompaktna podmnožica od $\mathbb{R}$. Kompaktne množice v $\mathbb{R}$ pa so natanko tiste, ki so omejene in zaprte, torej je $f(K)$ omejena in zaprta v $\mathbb{R}$. Iz omejenosti sledi omej funkcije f.

Naj bo $L = \sup\{f(x): x \in K\}$, $l = \inf\{f(x): x \in K\}$. Pokazati je treba, da je $L, l \in f(K)$. Recimo, da $L = \sup\{f(x): x \in K\}$ ni vsebovan v $f(K)$. Tedaj so (po definiciji sup) poljubno blizu L točke iz $f(K)$. Torej je L stekališče množice $f($
$f(K)$ je zaprta, zato vsebuje vsa svoja stekališča, torej tudi L. Protislovje. Podobno za l, potem $\exists x_{max}, x_{min}$, $L = f($

$l = f(x_{min})$. ■

Opomba. Posebni primer, $K=[a,b]$, že poznamo iz poglavja o zveznosti.

Definicija. Naj bo $D \subset M$. Preslikava $f: D \to M'$ je enakomerno zvezna (na D), če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, da je za $x, x_0 \in D$
$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, če je le $d(x, x_0) < \delta$.

Opomba. To je več kot zveznost. Zveznost pomeni, da za $\forall x_0 \in D$, $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ (odvisen od x_0), da je $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, če je $d(x, x_0) < \delta$. Enakomerna zveznost pomeni, da po izbiri $\varepsilon > 0$ lahko izberemo isti δ za vse $x_0 \in D$.

Opomba. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$. Za funkcije $f: D \to \mathbb{R}$ smo to že spoznali. Ugotovili smo, da je za zvezne $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f enakomerno zvezna.

Izrek. Naj bo $K \subset M$ kompaktna in $f: K \to (M', d')$ zvezna. Tedaj je f enakomerno zvezna.

DOKAZ. Naj bo K kompaktna, $f: K \to M'$ zvezna. Naj bo $\varepsilon > 0$. Zaradi zveznosti za $\forall x \in K$ obstaja $\delta_x > 0$, da je

$$d'(f(x'), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (*)$$

čim je $d(x, x') < \delta_x$, $x, x' \in K$. Za $\forall x \in K$ naj bo U_x krogla $K(x, \frac{1}{2}\delta_x)$. Družina $\{U_x ; x \in K\}$ je odprto pokritje za K. Ker je K kompaktna, obstaja končno podpokritje, t.j. $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Naj bo $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta_{x_1}, \dots, \frac{1}{2}\delta_{x_n}\}$. Naj bo $x, x' \in K$ in $d(x, x') < \delta$. Ker U_{x_i} pokrijejo K, je $x \in U_{x_k}$ za nek k, potem je $d(x, x_k) < \frac{1}{2}\delta_{x_k}$. Ker je $d(x, x') < \delta \le \frac{1}{2}\delta_{x_k}$, je $d(x_k, x') < \delta_{x_k}$. Iz $(*)$ sledi, da je $d'(f(x), f(x')) \le d'(f(x), f(x_k)) + d'(f(x_k), f(x')) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.
To je enakomerna zveznost za f na K. ■

Definicija. Naj bo $D \subset M$, $f: D \to M'$ preslikava. Naj bo a stekališče D. Preslikava $f: D \to M'$ ima limito y_0 v M', ko gre $x \to a$, $x \neq a$, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, da je $d'(f(x), y_0) < \varepsilon$ čim je $d(x, a) < \delta$, $x \in D$.

22. 5. 2003

Tedaj pišemo $y_0 = \lim_{x \to a} f(x)$.

Opomba. To je naravna posplošitev limite funkcije kot jo že poznamo ($D \subset \mathbb{R}$, $M' = \mathbb{R}$).

Opomba. Če je $a \in D$ in je f zvezna v a, tedaj je seveda

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

To sledi iz definicije zveznosti. Če pa $a \notin D$ in ima f limito y_0, $x \to a$, lahko funkcijo f dodefiniramo še v točki a, da je $f(a) = y_0$, in dobimo zvezno preslikavo $f : D \cup \{a\} \to \ldots$

6. NADALJNI PRIMERI METRIČNIH PROSTOROV

Definicija. Naj bo X realen ali kompleksen vektorski prostor. Norma na X je funkcija $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, ki izpolnjuje naslednje pogoje:

(a) $\|x\| \geq 0$ za $\forall x \in X$

(b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ za $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{F}$

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za $\forall x, y \in X$.

Par $(X, \|\cdot\|)$ imenujemo normiran vektorski prostor (kratko: normiran prostor).

Opomba. V primeru ko je $X = \mathbb{R}^1$ z običajnimi operacijami in $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, je običajna absolutna vrednost norma na $\mathbb{R}$.

Primer 1. $\mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$

Primer 2. $\mathbb{R}^2$, $\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Primer 3. $\mathbb{R}^3$, $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Primer 2'. $\mathbb{R}^2$, $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$

(d) $\|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\| = \max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\} \leq \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\}$

$|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1|$

$|x_2 + y_2| \leq |x_2| + |y_2|$

1: $|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1| \leq \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\}$

2: — || —

Primer 3'. $\mathbb{R}^3$, $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

Primer 4. $X = C([a,b])$, $f \in X$; $\|f\| = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$

$$\underbrace{|f(x)+g(x)|}_{L} \leq \underbrace{\max_{a<x<b}|f(x)| + \max|g(x)|}_{D}, \text{ potem je}$$

$$\max_{a<x<b} L \leq D \Rightarrow \text{zadošča (d)}$$

Izrek. Če je X normiran prostor, je $d(x,y) = \|x-y\|$ metrika na X.

DOKAZ. $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (a), (b)

$$\underset{d(x,y)}{\|x-y\|} = \|(-1)(x-y)\| = \underset{d(y,x)}{\|y-x\|} \quad (c)$$

(d) trik.: $d(x,y) = \underset{\|(x-z)+(z-y)\|}{\|x-y\|} \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$ $\blacksquare$

Definicija. Če je normiran prostor X v metriki $d(x,y) = \|x-y\|$ poln, mu pravimo BANACHOV PROSTOR.

(Stefan Banach, 1892-1945)

Opomba. Torej je vsak normiran prostor metričen, ni pa vsak normiran prostor poln.

Definicija. Skalarni produkt na realnem vektorskem prostoru X je funkcija $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$, z naslednjimi lastnostmi:

(a) $\langle x,x \rangle \geq 0$ za $\forall x \in X$

(b) $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(c) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x,z \rangle + \mu \langle y,z \rangle$, $x,y,z \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(d) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$.

Če je na realnem vektorskem prostoru skalarni produkt z lastnostmi (a)-(d), tedaj $(X, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ imenujemo realen unitaren prostor.

Primer. $\mathbb{R}^2$ $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$

Primer 2. Prostor vektorjev v $\mathbb{R}^3$ z običajnim seštevanjem in množenjem s skalarjem in s skalarnim produktom $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$.

Primer 3. $\mathbb{R}^3$, $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

Primer 4. $\mathbb{R}^n$, $\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
$\mathbb{R}^n$ s tem skalarnim produktom imenujemo n-dimenzionalen Evklidski prostor.

Primer 5. $C([a,b])$ s skalarnim produktom $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ je spet realen unitaren prostor.

Izrek. Če je X realen unitaren prostor, je s formulo
$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$
definirana norma na prostoru X.

DOKAZ. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Cauchy: $x,y\in X$ $\quad |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$

$$\langle x-ay, x-ay\rangle \ge 0 \quad \text{za } \forall a\in\mathbb{R}$$
$$\langle x,x\rangle - 2a\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle a^2 \ge 0$$

za $y=0$ je (*) očitna, $y\neq 0$ vzamemo $a = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$

$$\langle x,x\rangle - 2\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle^2}\langle y,y\rangle \ge 0$$
$$\langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \ge 0 \quad / \cdot \langle y,y\rangle$$
$$\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \ge \langle x,y\rangle^2 \quad / \sqrt{}$$
$$\|x\|\|y\| \ge |\langle x,y\rangle|$$

27. 5. 2003

$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle \le |\langle x+y,x\rangle| + |\langle x+y,y\rangle|$
$\le \|x+y\|\|x\| + \|x+y\|\|y\| = \|x+y\|(\|x\|+\|y\|) \Rightarrow$
$\Rightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (posebej: $\|x+y\|=0 \Rightarrow$ ni kaj dokazovati)

Ostale lastnosti so trivialne. Doma!

Definicija. Unitaren prostor, ki je kot normiran prostor z normo $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ poln, imenujemo HILBERTOV PROSTOR.
(D. Hilbert, 1862-1943)

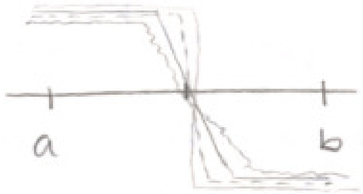
Opomba. Prostor $C[a,b]$ je poln normiran prostor v normi $\|f\| = \max_{a\le x\le b}\{|f(x)|\}$. (Vemo.)

Prostor $C[a,b]$ lahko dobi skalarni produkt $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ in od tu se normo $|||f||| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}$.

Prostor $C[a,b]$ z normo $|||\cdot|||$ ni poln.

Za uporabo pa potrebujemo polne prostore.

Primer.



Zaporedje takih funkcij je Cauchy-jevo v $C([a,b])$ z normo $|||\cdot|||$ (integral razlike je zmeraj manjši), ki v $C([a,b])$ ne konvergira.

Obstaja abstraktna procedura, kako iz metričnega prostora, ki ni poln, narediti poln metrični prostor (iz ekvivalenčnih razredov Cauchy-jevih zaporedij).

V konkretnem primeru prostora $\mathcal{C}([a,b])$ z normo $|||\cdot|||$ se da to konkretno realizirati, tako da posplošimo Riemannov integral na t.i. Lebesgue-ov integral in namesto $\mathcal{C}([a,b])$ gledamo splošnejše funkcije, t.i. integrabilne po Lebesgue-u. Ta prostor je poln. Označimo ga z $L^2([a,b])$ in je nadvse pomemben za uporabo v fiziki, kvantni mehaniki.

Poseben primer realnega unitarnega prostora:

EVKLIDSKI PROSTOR

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\quad \langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

$$\|x\| = \|(x_1,\dots,x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Cauchy-jeva neenakost

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}$$

Opomba. (O ekvivalenci metrik na $\mathbb{R}^n$) Če imamo na X dve metriki, d_1 in d_2; pravimo, da sta EKVIVALENTNI, če obstajata števili c in C, $0<c<C$, da je

$c\,d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C\,d_1(x,y)$ za vse $x,y \in X$.

$\left(\frac{1}{C} d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \frac{1}{c} d_2(x,y)\right)$.

Naj bosta d_1 in d_2 ekvivalentni metriki na X. Tedaj imamo (X, d_1) in (X, d_2). Prostora imata iste odprte in

zaprte množice, ista Cauchy-jeva in konvergentna zaporedja. (Premisli z okolicami)
$\Rightarrow$ Ista topologija.

<u>Poseben primer</u>. $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad |||x||| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

$$d_1(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}, \quad d_2(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, \dots, |x_n-y_n|\}$$

Ti dve metriki sta ekvivalentni.

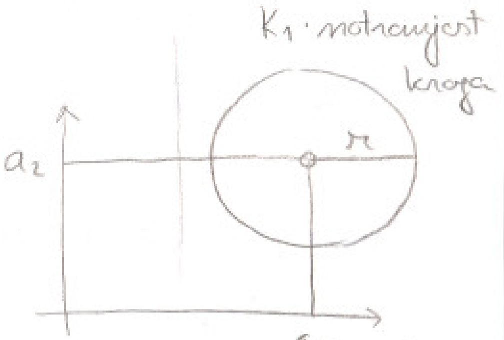
<u>Dokaz</u>. Na $\mathbb{R}^2$. $d_1(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

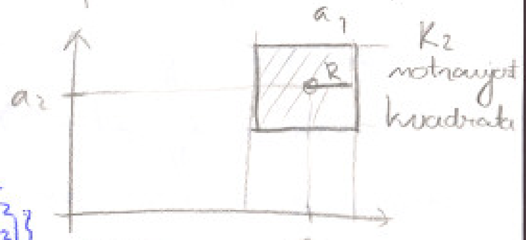
$d_2(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$

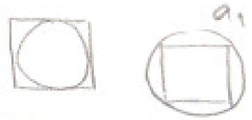
$a_1 = (a_1, a_2)$, $r > 0$

$K_1(a,r) = \{(x,y) : \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < r\}$

$K_2(a,R) = \{(x,y) : \max\{|x-a_1|, |y-a_2|\}$







- $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} =$
$= \sqrt{|x_1-x_2|^2 + |y_1-y_2|^2} \le \sqrt{2\max\{|x_1-x_2|^2, |y_1-y_2|^2\}}$
$= \sqrt{2}\sqrt{\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}^2} = \sqrt{2}\, d_2(\dots)$
- $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} \le \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} =$
$= d_1(\dots)$

$\Rightarrow \quad d_2(x,y) \le d_1(x,y)$ in $\frac{1}{\sqrt{2}} d_1(x,y) \le d_2(x,y)$.

Podobno dokaz v $\mathbb{R}^n$.

7. BANACHOVO SKRČITVENO NAČELO (IZREK) V POLNIH METRIČNIH PROSTORIH

<u>Definicija</u>. Naj bo (M,d) metrični prostor. Preslikava $f: M \to M$ se imenuje SKRČITEV (KONTRAKCIJA), če obstaja tak $q > 0$, $q < 1$, da je

$$d(f(x), f(y)) \le q\, d(x,y)$$

za poljubna $x, y \in M$.

<u>Opomba</u>. Pomembno je, da je $q < 1$ (in ne enak 1). Skrčitev je vedno preslikava prostora vase.

Izrek. Naj bo M poln metrični prostor in $f: M \to M$ skrčitev tedaj obstaja natanko ena negibna točka (fiksna točka) preslikave f, t.j. taka a, da je $f(a) = a$. Če je $x_0 \in M$ poljubna točka, tedaj zaporedje $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots$ konvergira k a.

DOKAZ. Če fiksna točka obstaja, je ena sama.

Naj bo $f(a) = a$ in $f(b) = b$ in recimo, da $a \neq b$.

Ker je f skrčitev, je $d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq q\,d(a,b)$, $q < 1$. Protislovje. Potem je $a = b$.

Obstoj fiksne točke: ideja je, da izberemo nek $x_0 \in M$, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$

Uporabimo dejstvo, da je preslikava f skrčitev, da pokažemo, da je $\{x_n\}$ Cauchy-jevo. Ker je M poln, ima $\{x_n\}$ limito a, za katero pokažemo, da je negibna točka za f.

$D = d(x_0, x_1)$, $d(x_1, x_2) = d(x_1, f(x_1)) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq$
$\leq q(x_0, x_1) = qD, \dots \; d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n D$. Premisli, zakaj je Cauchyjevo! 29.5.2003

Naj bo $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n > m$.

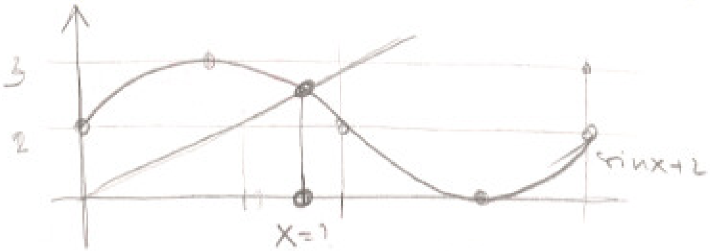
$$d(x_m, x_n) \overset{T.N.}{\leq} d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \leq$$
$$\leq q^m D + q^{m+1} D + \dots + q^{n-1} D = q^m D (1 + q + \dots + q^{n-m-1}) \leq$$
$$\leq q^m D (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{q^m D}{1-q}.$$

Potem je za $\forall m \in \mathbb{N}, n > m$ $d(x_m, x_n) \leq q^m D \frac{1}{1-q}$. Potem je zaporedje $\{x_n\}$ Cauchy-jevo: naj bo $\varepsilon > 0$. Izberimo m_0, da bo $q^{m_0} D \frac{1}{1-q} < \varepsilon$. To gre, ker je $q < 1$. Naj bo $m, n > m_0$, $n > m$. Tedaj je $d(x_m, x_n) \leq q^m D \frac{1}{1-q} \leq q^{m_0} D \frac{1}{1-q} < \varepsilon$.

Ker je prostor poln, ima to zaporedje $\{x_n\}$ limito. Pokažemo še, da je ta limita, označimo jo z a, negibna točka naše preslikave f. Ker je f skrčitev, je $d(f(x), f(y)) \leq q\,d(x,y)$. Fiksiramo x. Če je $d(x,y) < \delta$, je $d(f(x), f(y)) \leq q\delta$. Potem za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ za $d(x,y) < \delta$. Torej je f zvezna v x za vsak $x \in M$.

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{\text{zveznost } f}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(a). \quad \blacksquare$$

Primer. Reši enačbo $2x = \sin x + 2$ na tri decimalke natančno z uporabo Banachovega skrčitvenega načela.



$$x = \frac{1}{2}\sin x + 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x + 1$$

$$f(x) = x$$

$$d(f(x_1), f(x_2)) = \left|\frac{1}{2}\sin x_2 - \frac{1}{2}\sin x_1\right| = \frac{1}{2}\left|\sin x_2 - \sin x_1\right| = \left|\frac{1}{2}\cos\xi\right|\left|x_2 - x_1\right| \le$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Lagrange} \\ \sin x_2 - \sin x_1 = \cos\xi\,(x_2 - x_1) \\ \xi \text{ med } x_2 \text{ in } x_1\end{array}}$$

$$\le \frac{1}{2}\left|x_2 - x_1\right| = \frac{1}{2} d(x_1, x_2)$$

$\Rightarrow$ f je skrčitev, $q = \frac{1}{2}$, $M = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ poln, običajna razdalja.

Za poljuben x_0 zaporedje $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots$ konvergira k negibni točki a, ki je ena sama in $\frac{1}{2}\sin a + 1 = a$, t.j. $\sin a + 2 = 2a$.

Spomnimo se ocene iz dokaza:

$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $d(x_0, x_1) = D = 1$

$n > m$ $\quad d(x_m, x_n) \le q^m D \frac{1}{1-q}$. Za fiksen m, $n \to \infty$ je $x_n \to a$ in $d(x_m, x_n) \xrightarrow{\text{Doma!}} d(x_m, a)$. Potem je $d(x_m, a) \le q^m D \frac{1}{1-q} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$.

Izberemo m tak, da je $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} < 0{,}0005$. Za tak m je $|x_m - a| < 0{,}0005$, torej je x_m približek za a, točen na vsaj tri decimalke.