2. 10. 2003

I. FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

1. ŠE O PROSTORU $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

- seštevanje po komponentah
- množenje s skalarji
- st. baza: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$
  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$
  $\vdots$
  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$

  $x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$
- skalarni produkt: $\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$
- norma: $|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
- $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$
- $K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, a) < r\}$ ... odprta krogla s središčem $a \in \mathbb{R}^n$ in polmerom $r > 0$
- $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, a) = r\}$ ... sfera

  $S(a, r)$ je rob krogle $K(a, r)$. Dokaži doma!
- Druge posebne množice v $\mathbb{R}^n$:
  - $K = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_1 < x_1 < b_1, \dots, a_n < x_n < b_n\}$ je odprt kvader, robovi so dolgi $b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n$; če so vsi enako dolgi, se kvader imenuje kocka; vsak kvader je omejena množica, vsebovana je v $K(a, r)$, kjer je $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $r = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$. Doma!
  - Daljice: $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$, daljica s krajiščema a in b je množica $\{a + t(b - a);\ 0 \leq t \leq 1\}$. (kot konveksna kombinacija $(1-t)a + tb$)

ZAPOREDJA TOČK V $\mathbb{R}^n$, $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)}, \dots \in \mathbb{R}^n$

$a^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$

Zaporedje točk $\{a^{(m)}\}$ v $\mathbb{R}^n$ določa n zaporedij števil:

$a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots$ $k = 1, \dots, n$ (prve koordinate, druge, ...)

Izrek. Zaporedje $\{a^{(k)}\} \subset \mathbb{R}^n$ konvergira natanko tedaj, ko za vsak i, $i = 1 \le i < n$, konvergira zaporedje i-tih koordinat $\{a_i^{(k)}\}$. Limita zaporedja je točka, ki ima koordinate $\lim\limits_{k\to\infty} a^{(k)} = (\lim\limits_{k\to\infty} a_1^{(k)}, \lim\limits_{k\to\infty} a_2^{(k)}, \dots, \lim\limits_{k\to\infty} a_n^{(k)})$.

DOKAZ. Naj $\{a^{(k)}\} \to a$, t.j. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \ni: |a^{(k)} - a| < \varepsilon$ za vse $k \ge k_0$. Torej je $\sqrt{(a_1^{(k)} - a_1)^2 + \dots + (a_n^{(k)} - a_n)^2} < \varepsilon$, torej je $|a_1^{(k)} - a_1| < \varepsilon, \dots, |a_n^{(k)} - a_n| < \varepsilon$ za vse $k \ge k_0$. Potem za vsak i, $1 \le i \le n$ velja: $a_i = \lim\limits_{k\to\infty} a_i^{(k)}$.

Obrat: Naj $\{a_i^{(k)}\} \to a_i$ za $\forall i$, $1 \le i \le n$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstaja k_0, da je $|a_i^{(k)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{n}$ za vse $k \ge k_0$, i, $1 \le i \le n$. Torej $|a^{(k)} - a|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i^{(k)} - a_i|^2 < \sum (\frac{\varepsilon}{n})^2 = \frac{\varepsilon^2}{n} \le \varepsilon^2$. Sledi $|a^{(k)} - a| < \varepsilon$ za vse $k \ge k_0$. ■

Izrek 2. $\mathbb{R}^n$ je poln metričen prostor.

DOKAZ. (skica) Če je $\{a^{(k)}\}$ Cauchy-jevo zaporedje, je $\{a_i^{(k)}\}$ Cauchy-jevo za vsak i, $1 \le i \le n$. Zato je konvergentno (ker je $\mathbb{R}$ poln). Po prejšnjem izreku $\{a^{(k)}\}$ konvergira k $a = (a_1, \dots, a_n)$. ■

Izrek 3. Množica $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je omejena in zaprta.

DOKAZ. (Vrabec: Metrični prostori)

2. ZVEZNE PRESLIKAVE Z (OBMOČIJ V) $\mathbb{R}^n$ V $\mathbb{R}^m$

Zveznost definiramo kot v splošnih metričnih prostorih:

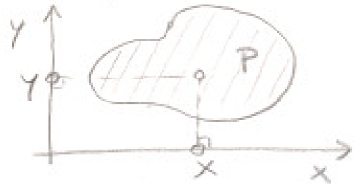
Definicija. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$. Preslikava $f: D \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v točki x, če za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, da je $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ za $\forall x' \in D$, $|x - x'| < \delta$.

Opomba. Pri $n = m = 1$ dobimo že znano definicijo.

Definicija. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$. Preslikava $f: D \to \mathbb{R}^m$ je zvezna na D, če je zvezna v vsaki točki iz D. Preslikava f je enakomerno zvezna, če za $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, da je $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ za vsaka $x, x' \in D$, za katera je $|x - x'| < \delta$.

Če je $m=1$, tedaj f imenujemo <u>funkcija</u>, $f(x)$ imenujemo <u>vrednost funkcije</u> v točki $x=(x_1,\dots,x_n)\in D$ in pišemo tudi $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Pravimo, da je f <u>funkcija</u> <u>n spremenljivk</u>, definirana na D.

<u>Primer</u>. Temperatura na plošči.



$$T(x,y),\quad (x,y)\in P$$

<u>Izrek 1.</u> Naj bosta funkciji f in g, definirani na $D\subset\mathbb{R}^n$, zvezni v $x_0\in D$. Tedaj so v točki x_0 zvezne

(a) $f+g$;
(b) $f-g$;
(c) λf, λ konstanta;
(d) f/g, če je $g(x_0)\neq 0$;
(e) $f\cdot g$.

<u>DOKAZ</u>. Analogen dokazu za funkcije pri $n=1$. ■

<u>Izrek 2.</u> Naj bo $f: D\to\mathbb{R}^1$ zvezna funkcija v notranji točki $a\in D$. Tedaj je f v tej točki zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej, t.j. če je $a=(a_1,\dots,a_n)$, je $\lambda\mapsto f(\lambda,a_2,\dots,a_n)$ zvezna v $\lambda=a_1$, $\lambda\mapsto f(a_1,\lambda,a_3,\dots,a_n)$ zvezna v $\lambda=a_2$, ...

<u>Opomba</u>. Ker je a notranja točka, obstaja $r>0$, da je $K(a,r)\subset D$, da je $\{(x_1,\dots,x_n);\ \sqrt{(x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2}<r\}\subset D$. Od tu sledi, da je $\{(a_1,\dots,\overset{i}{\lambda},\dots,a_n);\ a_i-r<\lambda<a_i+r\}\subset D$, $i=1,\dots,n$. Torej je vsaka od zgornjih funkcij definirana še na nekem intervalu.

<u>DOKAZ</u>. Naj bo $\varepsilon>0$. Ker je f zvezna v a, obstaja $\delta>0$, da je $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, čim je $|x-a|<\delta$, $x\in D$. Če je torej $\lambda\in(a_1-\delta,a_1+\delta)$, t.j. $|\lambda-a_1|<\delta$, tedaj je $|(\lambda,a_2,\dots,a_n)-(a_1,a_2,\dots,a_n)|=|\lambda-a_1|<\delta$, zato je $|f(\lambda,a_2,\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)|<\varepsilon$. Sledi, da je $\lambda\mapsto f(\lambda,a_2,\dots,a_n)$ zvezna v $\lambda=a_1$. Analogno za ostale smeri. ■

Opomba. Obratno v splošnem ne velja. Primer: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & x^2+y^2>0 \\ 0; & x=y=0 \end{cases}$

Oglejmo si $(0,0)$.

$f(\lambda,0)=0;\ \lambda\neq 0$ in $f(\lambda,0)=0$, $\lambda=0$, enako $f(0,\lambda)=0\ \forall\lambda$.

Oglejmo si točke (t,t), $t>0$. $f(t,t)=\frac{2t^2}{2t^2}=1$.

Torej f poljubno blizu izhodišča zavzame vrednost $1\neq f(0,0)$, zato f ni zvezna v točki $(0,0)$, je pa zvezna v vsaki spremenljivki posebej.

7.10.2003

Primeri. (zveznih funkcij)

(a) konstante $f(x)=3\quad \forall x\in\mathbb{R}^n$

(b) koordinatne funkcije $f(x_1,\dots,x_n)=x_k$ za neki k, $1\le k\le n$.

so zvezne, ker je $|x-a| = |(x_1,\dots,x_n)-(a_1,\dots,a_n)| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2} \geq$

$\geq |x_k-a_k|$ za $\forall k$, $1\le k\le n$.

Če je torej $|x-a|<\varepsilon$, je tudi $|x_k-a_k|<\varepsilon$ $(\delta=\varepsilon)$.

Od tu sledi:

(c) linearne funkcije $f(x_1,\dots,x_n)= a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n+d$, $a_i,d\in\mathbb{R}$ so vedno zvezne na vsem $\mathbb{R}^n$

(d) polinomi v n spremenljivkah so zvezni na vsem $\mathbb{R}^n$

npr. $f(x_1,x_2)=ax_1^2+bx_2^2+cx_1x_2+ex_1+fx_2+g$ na vsem $\mathbb{R}^2$

(e) racionalne funkcije (kvocienti polinomov) so zvezne, kjer imenovalec ni enak 0

npr. $f(x,y,z)=\frac{x^2+2y^2+3z^2}{x^2+y^2+z^2-1}$, imenovalec je 0, če je $x^2+y^2+z^2=1$, kar je cela sfera s polmerom 1 in središčem v $(0,0,0)$

PRESLIKAVE V $\mathbb{R}^m$, $m>1$

$D\subset\mathbb{R}^n$, $f: D\to\mathbb{R}^m$ preslikava, $x\in D$

$f(x)\in\mathbb{R}^m$ je m-terica števil

Zapišimo $f(x)$ kot $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_m(x))$, kjer so $f_1(x),\dots,f_m(x)$ koordinate točke $f(x)$. Sledi: funkcija $f: D\to\mathbb{R}^m$ določa m koordinatnih funkcij.

Obratno: če imamo m številskih funkcij $f_1,\dots,f_m$ na D, te enolično določajo preslikavo $f: D\to\mathbb{R}^m$.

$$f(x) = (f_1(x),\dots,f_m(x)) \qquad (*)$$

Primeri. Posebni primeri

① $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (a_1x_1 + a_2x_2,\ b_1x_1 + b_2x_2) = f(x)$
(linearna preslikava)

② $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2) \longmapsto (x_1^2 - x_2,\ x_1 - x_2,\ x_1 + x_1^3)$

Opomba. Izreda (*) lahko prepišemo v

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),\quad (x_1, \dots, x_n) \in D.$$

Izrek 3. Preslikava $f: D \to \mathbb{R}^m$ je zvezna v $a \in D$, natanko tedaj, ko so v a zvezne vse koordinatne funkcije f_k, $1 \le k \le m$.

DOKAZ. Naj bo f zvezna v a. Iz $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ sledi $\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (f_k(x) - f_k(a))^2} < \varepsilon$ in dalje $|f_k(x) - f_k(a)| < \varepsilon$ za vse $1 \le k \le m$.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Iz zveznosti f v a sledi, da $\exists \delta > 0$, da je $|f_k(x) - f_k(a)| < \varepsilon$, torej je f_k zvezna v a, $1 \le k \le m$.

Naj bodo $f_1, \dots, f_m$ zvezne v $a \in D$. Naj bo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_k > 0$, da je $|f_k(x) - f_k(a)| < \frac{\varepsilon}{m}$, če je $|x - a| < \delta_k$, $x \in D$. Naj bo $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$. Potem je $\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (f_k(x) - f_k(a))^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon^2}{m^2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} < \varepsilon$ brž ko je $|x - a| < \delta$, oz. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ brž ko je $|x - a| < \delta$. Potem je f zvezna v $a \in D$. ■

Posledica. Vsaka linearna preslikava $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zvezna na vsem $\mathbb{R}^n$.

Dokaz: $\mathcal{A}$ je zvezna v izhodišču $x = 0$. Za $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da je $|A(x)| < \varepsilon$, čim je $|x| < \delta$. Naj bo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \ne 0$ in $x' = \frac{\delta}{2|x|} x$. Jasno je $|x'| = \frac{\delta}{2|x|}|x| = \frac{\delta}{2} < \delta$, zato je $|A(x')| < \varepsilon$.
$A(x') = A\left(\frac{\delta}{2|x|} x\right) \overset{\text{lin.}}{=} \frac{\delta}{2|x|} A(x)$, torej $|A(x')| = \frac{\delta}{2|x|}|A(x)|$. Potem je $\frac{\delta}{2|x|}|A(x)| < \varepsilon$ za vse $x \in \mathbb{R}^n$, $x \ne 0$. $\frac{|A(x)|}{|x|} < \frac{2\varepsilon}{\delta}$ za vse $x \in \mathbb{R}^n$, $x \ne 0$.
Če je $\frac{2\varepsilon}{\delta} = M$, smo pokazali, da obstaja $M < \delta$, da je $\frac{|A(x)|}{|x|} < M$ za vse $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, t.j. $|A(x)| \le M|x|$. Pravimo, da je linearna preslikava A omejena na $\mathbb{R}^n$.

Posledica. Vsaka linearna preslikava $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zvezna na vsem $\mathbb{R}^n$. Je tudi omejena, t.j. $\exists M < \infty$, da je $|A(x)|/|x| < M$ za vse $x \in \mathbb{R}^n$, $x \ne 0$.

3. VEKTORSKE FUNKCIJE

Naj bo $n=1$ in $D=I$, I interval. Preslikave $f: I \to \mathbb{R}^m$ imenujemo vektorske funkcije. Spremenljivko $t \in I$ imenujemo običajno <u>parameter</u>. Ko t preteče I, $f(t)$ preteče neko množico v $\mathbb{R}^m$, ki je pri posebnih pogojih (v $\mathbb{R}^2$ jih že poznamo) neka krivulja.

$y = f(t)$, $t \in I$ je <u>parametrična enačba</u> krivulje ($y \in \mathbb{R}^m$)

<u>Primeri</u>. ① t čas, $f(t) \in \mathbb{R}^3$ lega v trenutku t

Koordinatne funkcije f_i so seveda navadne funkcije na I.

② $f(\lambda) = a + \lambda e$, $a, e \in \mathbb{R}^m$, $e \neq 0$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$ ... premica skozi a v smeri e

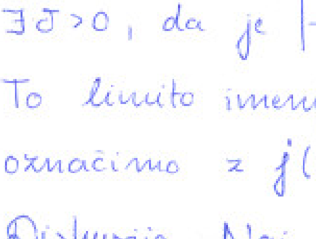
$y = a + \lambda(b-a)$, $-\infty < \lambda < \infty$ ... premica skozi a in b

Naj bo $f: I \to \mathbb{R}^m$ vektorska funkcija in $t_0 \in I$ notranja točka. Denimo, da obstaja limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = A$. To je, da za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, da je $\left|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - A\right| < \varepsilon$, čim je $0 < |h| < \delta$. (Seveda je $A \in \mathbb{R}^m$.)

To limito imenujemo <u>odvod vektorske funkcije</u> f v točki t_0 in jo označimo z $\dot{f}(t_0)$.

<u>Diskusija</u>. Naj bo $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$. Tedaj je $\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} =$
$= \left(\frac{f_1(t_0+h)-f_1(t_0)}{h}, \dots, \frac{f_m(t_0+h)-f_m(t_0)}{h}\right)$ in zato je $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ obstaja natanko tedaj, ko za vsak k, $1 \le k \le m$ obstaja $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f_k(t_0+h)-f_k(t_0)}{h}$, t.j. $\dot{f}(t_0)$ obstaja $\Leftrightarrow \exists\, \dot{f}_1(t_0), \dots, \dot{f}_m(t_0)$ in je $\dot{f}(t_0) = (\dot{f}_1(t_0), \dots, \dot{f}_m(t_0))$. Premisli doma!

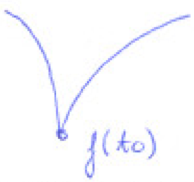
<u>Geometrijski pomen</u> $\dot{f}(t_0)$ (npr. za $f: I \to \mathbb{R}^3$) Recimo, da je $\dot{f}(t_0) \neq 0$. Tedaj za t blizu t_0 $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \neq 0$ ($t = t_0 + h$).



$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ je smerni vektor sekante skozi $f(t_0)$ in $f(t)$.

Limita $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ je smerni vektor tangente na pot $y = f(t)$ v trenutku t_0 (točki $f(t_0)$).

<u>Opomba</u>. Če je $\dot{f}(t_0) = 0$, je situacija lahko veliko bolj komplicirana.



Oglejmo si $f(x_1, a_2, \dots, a_n)$, kjer je $a = (a_1, \dots, a_n)$. To je funkcija ene spremenljivke, definirana na $(a_1 - r, a_1 + r)$.
Podobno je za vsak k, $2 \le k \le n$ funkcija $x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ gotovo definirana na $(a_k - r, a_k + r)$.

<u>Definicija</u>. Naj bo $1 \le l \le n$. Če $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a_1, \dots, a_{l-1}, a_l + h, a_{l+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$ obstaja, t.j. če je funkcija $\lambda \mapsto f(a_1, \dots, \lambda, \dots, a_n)$ odvedljiva pri $\lambda = a_l$, tedaj to limito imenujemo <u>parcialni odvod funkcije f po spremenljivki x_l</u> (po l-ti spremenljivki) v a, in ga označimo $\partial f / \partial x_l (a)$, $f_{x_l}(a)$, $D_l f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_l}(a_1, \dots, a_n)$.

<u>Opomba</u>. Parcialni odvod torej izračunamo tako, da imamo pri odvajanju ostale spremenljivke konstantne (jih ne spreminjamo).

<u>Primer</u>. ① $f(x,y) = x^2 y^3 - \sin(xy)$

Koliko je $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ in $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$?

$$f(x,2) = x^2 \cdot 2^3 - \sin(x \cdot 2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \left[2x \cdot 8 - \cos(2x) \cdot 2\right]\Big|_{x=1} = \underline{16 - 2\cos 2}$$
$$f(1,y) = 1y^3 - \sin y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \left[3y^2 - \cos y\right]\Big|_{y=2} = \underline{12 - \cos 2}$$

<u>Opomba</u>. Zgornja odvoda lahko izračunamo v poljubni točki:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 - y\cos(xy) \text{ in}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2x^2 - x\cos(xy).$$

<u>Primer</u>. ② $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearna (preslikava)

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ $\qquad f(e_1) = A_1$
$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ $\qquad \vdots$
$\dots$
$e_n = (0, \dots, 0, 1)$ $\qquad f(e_n) = A_n$

$x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$
$\Rightarrow f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = x \cdot A$

Vsaka lin. preslikava $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se da zapisati kot $f(x) = A \cdot x$, kjer je A vektor, $A \in \mathbb{R}^n$.

Parcialni odvodi: $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = A_1, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = A_n$. (Ti so neodvisni od točke, v kateri jih računamo.

Definicija. $f: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, je v notranji točki $a \in D$ območja D diferenciabilna, če obstaja taka linearna preslikava $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da je $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h)$, kjer je $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

(t.j. če $\exists A \in \mathbb{R}^n$, da je $f(a+h) = f(a) + A\cdot h + o(h)$)

Opomba 1. L (oz. A) je enolično določen (če obstaja). Recimo, da sta dva: $f(a+h) = f(a) + L_1(h) + o_1(h) = f(a) + L_2(h) + o_2(h)$. $(L_1 - L_2)(h) = \underbrace{(o_1 - o_2)}_{o}(h)$ in $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Delimo z $|h|$ $(L_1 - L_2)\left(\frac{h}{|h|}\right) = \frac{o(h)}{|h|}$. Naj bo $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| = 1$ in $h = tx$, $t > 0$. Tedaj je $\frac{h}{|h|} = x$. Dobimo $(L_1 - L_2)(x) = \frac{o(tx)}{|tx|}$ in pri $t \to 0$ gre $\frac{o(tx)}{|tx|} \to 0$, zato $(L_1 - L_2)(x) = 0$ za $\forall x, |x| = 1$ in $L_1(x) = L_2(x)$ za $\forall x, |x| = 1$. $y = tx$, $|x| = 1$, $t \geq 0$, potem je $L_1(y) = L_1(tx) = t L_1(x) = t L_2(x) = L_2(tx) = L_2(y)$, za $\forall y$. Potem je $L_1 = L_2$.

Opomba 2. Diferenciabilnost pomeni, da je za majhne h

$$f(a+h) \approx f(a) + L(h).$$

Izrek. Naj bo funkcija f v notranji točki $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ diferenciabilna. Tedaj je f v a zvezna in parcialno odvedljiva na vse spremenljivke. Komponente vektorja A so parcialni odvodi

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right),$$

t.j. preslikava L je $L(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n$.

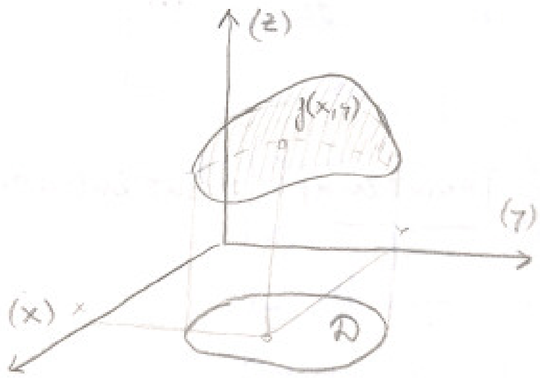
DOKAZ. Naj bo f v a diferenciabilna, t.j. $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h)$, kjer je $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je L linearna preslikava, je zvezna v 0, torej $\exists \delta > 0$, da je $|L(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$, čim je $|h| < \delta$. Po potrebi preidemo na manjši δ, da je tudi $\left|\frac{o(h)}{|h|}\right| < 1$ pri $|h| < \delta$. Torej je $|o(h)| < |h|$ za $|h| < \delta$. Po potrebi δ še zmanjšamo, da bo $|h| < \frac{1}{2}\varepsilon$ za $|h| < \delta$, potem je $|o(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $|h| < \delta$. Potem je $|f(a+h) - f(a)| = |L(h) + o(h)| \leq |L(h)| + |o(h)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ za $|h| < \delta$. To je točno zveznost f v a.

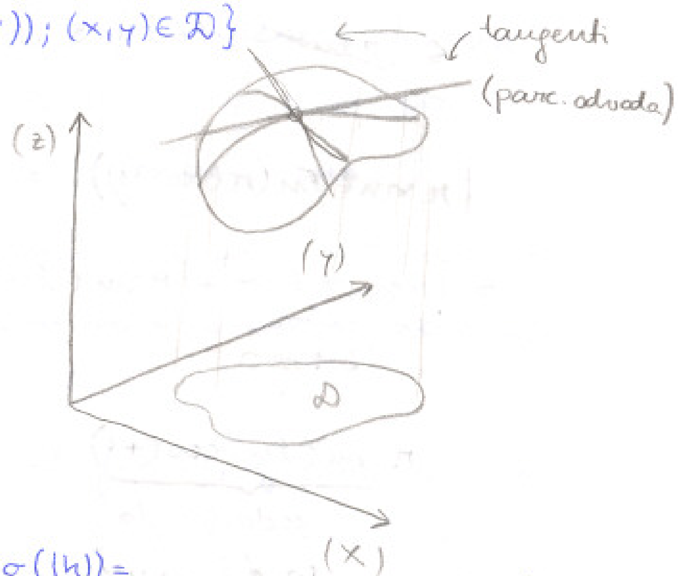
Naj bo $h = (h_1, 0, \dots, 0)$. Tedaj je $|h| = |h_1|$. Če je $L(h) = A \cdot h = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n$, je za zgornji h $L(h) = A_1 h_1$. Torej je $f(a+h) - f(a) = A_1 h_1 + o(h)$ oz. $\frac{f(a+h) - f(a)}{h_1} = A_1 + \frac{o(h)}{h_1}$ oz.

$\dfrac{f(a_1+h_1,\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{h} - A_1 = \dfrac{o(h)}{h_1}$. Dalje je $\left|\dfrac{o(h)}{h_1}\right| = \dfrac{|o(h)|}{|h|} \to 0$ za $h=(h_1,\dots,0)\to 0$. Torej je $\lim\limits_{h_1\to 0} \dfrac{f(a_1+h_1,a_2,\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{h_1} = A_1$. Potem $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ obstaja in je enak A_1. Podobno za ostale parcialne odvode. ∎

<u>Geometrijska ilustracija</u> <u>za $n=2$</u>

f na $\mathcal{D}$, ogledamo si graf $\{(x,y,f(x,y));\ (x,y)\in\mathcal{D}\}$





14.10.2003

$$f((x_0,y_0)+(h_1,h_2)) = f(x_0,y_0) + L(h_1,h_2) + o(|h|) =$$
$$= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2 + o(h)$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(h) \quad \text{za } x=x_0+h_1,\ y=y_0+h_2$$

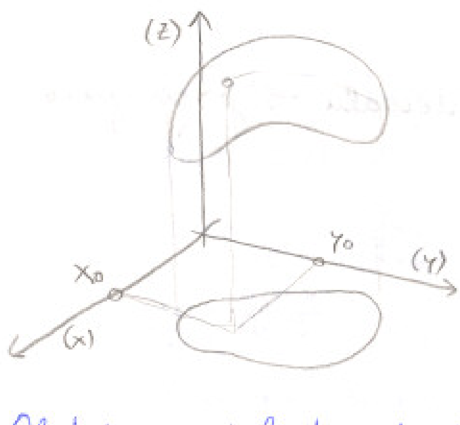
Za (x,y) blizu (x_0,y_0) je

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Blizu $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ lahko torej graf funkcije $z=f(x,y)$ dobro aproksimiramo z grafom linearne funkcije

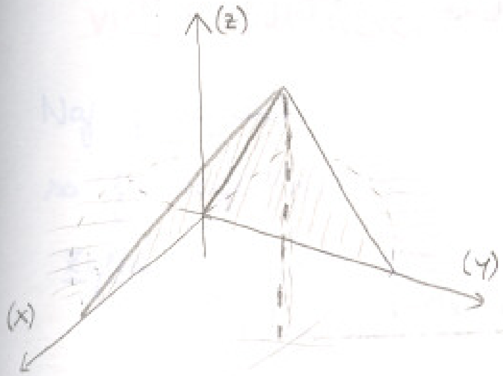
$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

graf je ravnina skozi točko $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$



Linearna funkcija ima v (x_0,y_0) enaka parcialna odvoda kot prvotna funkcija. Ravnina zato vsebuje obe tangenti in se imenuje <u>tangencialna ravnina</u>.

<u>Opomba</u>. Obstoj parcialnih odvodov $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ ni dovolj za diferenciabilnost v (x_0,y_0), tudi če je funkcija v (x_0,y_0) zvezna.



Funkcija je zvezna v $(0,0)$ in $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Izrek. Naj bo funkcija f v okolici točke a odvedljiva na vse spremenljivke in vsi parcialni odvodi naj bodo zvezni v točki a. Tedaj je f v točki a diferenciabilna.

DOKAZ. (samo za funkcije dveh spremenljivk) Ostalo doma!

Naj bo f odvedljiva na x in na y v okolici točke (a,b) in $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$ zvezni v (a,b).

Oglejmo si $I = f(a+h, b+k) - f(a,b)$, kjer sta h in k tako majhna, da sta $a+h$ in $b+k$ v naši okolici (ki naj bo odprt krog s središčem (a,b)).

$I = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a,b)$. Naj bo $\varphi(x) = f(x, b+k)$, je definirana na $[a, a+h]$ in odvedljiva, zato je $f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = \varphi'(x^*)h = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, b+k)$.

lahko obrnjeno, ker sta h in k lahko < 0

Podobno za drugi del, $x^* \in (a, a+h)$, $y^* \in (b, b+k)$. Potem je $I = h\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, b+k) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, y^*)$. Odvod $f_x(x^*, b+k) =$
$= f_x(a,b) + \eta_1$, kjer (zaradi zveznosti odvoda) $\eta_1 \to 0$ ko $h,k \to 0$.

$f_y(a, y^*) = f_y(a,b) + \eta_2$, kjer $\eta_2 \to 0$ ko $h,k \to 0$.

Velja: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da je $|\eta_1| < \varepsilon$ in $|\eta_2| < \varepsilon$ čim je $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$. Naj bo $\sigma(h,k) = h\eta_1 + k\eta_2$. Potem je

$f(a+h, b+k) = f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + \sigma(h,k)$. $(*)$

Jasno je $\frac{\sigma(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} < \frac{\varepsilon|h| + \varepsilon|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 2\varepsilon$ čim je $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$. Torej je $\lim\limits_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0} \frac{\sigma(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$. $(**)$

$(*)$ in $(**)$ skupaj pomenita, da je f diferenciabilna v (a,b). ■

Posledica. Polinomi so diferenciabilni v vsaki točki.

VIŠJI PARCIALNI ODVODI

Naj parcialni odvodi $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ obstajajo povsod na odprti množici D. To so funkcije na D.

<u>Zgled</u>. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^3 + \cos(x_1 x_2) - x_1^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2^3 - x_2 \sin(x_1 x_2) - 4x_1^3 \, , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_1 x_2^2 - x_1 \sin(x_1 x_2).$$

Kolikor teh (če obstajajo) govorimo o parcialnih odvodih teh funkcij.

<u>Primer</u>. $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = -x_2^2 \quad (x_1 x_2) - 12x_1^2$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 3x_2^2 - x_1 x_2 \cos(x_1 x_2) - \sin(x_1 x_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 3x_2^2 - x_1 x_2 \cos(x_1 x_2) - \sin(x_1 x_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = -x_1^2 \cos(x_1 x_2) + 6x_1 x_2$$

<u>Oznake</u>. $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = D_2 D_1 f = f_{x_2 x_1}$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = D_1^2 f = f_{x_1 x_1}$$

Podobno za odvode višjih redov.

<u>Opomba</u>. Parcialni odvodi višjih redov, kjer odvajamo po več kot eni spremenljivki, se imenujejo <u>mešani odvodi</u>. V zgornjem primeru sta bila mešana odvoda enaka. To ni izjema:

<u>Izrek</u>. Naj bosta $D_j f$ in $D_k f$ v okolici točke a zvezna. Obstajata naj $D_k D_j f$ in $D_j D_k f$ na tej okolici in naj bosta v a zvezna. Tedaj sta v a enaka, t.j.

$$(D_k D_j f)(a) = (D_j D_k f)(a).$$

<u>DOKAZ</u>. Dovolj je, da dokažemo za dve spremenljivki, saj so pri odvajanju ostale konstantne. Naj bo f funkcija dveh spremenljivk, odvedljiva po x in po y v nekem krogu s središčem (a,b). Naj bosta f_x, f_y zvezna v tej okolici, f_x odvedljiv po y in f_y odvedljiv po x v tej okolici in f_{xy} in f_{yx} zvezna v (a,b).
Naj bo $J = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a,b)$, h in k takšna, da $(a+h, b+h)$ leži v krogu.

Naj bo $g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$. Potem je $g(a+h) - g(a) = J$. Po predpostavkah je g odvedljiva funkcija spremenljivke x. Po Lagrange-evem izreku je $J = g'(\bar{x})h$, kjer je $\bar{x}$ med a in $a+h$. Torej je $J = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, b)\right]h$. Spet lahko uporabimo Lagrangeov izrek po drugi spremenljivki, ker je f_x odvedljiv po y. $J = f_{yx}(\bar{x}, \bar{y})hk$. (*) $\bar{x}$ je med a in $a+h$, $\bar{y}$ med b in $b+k$.

Naj bo $h(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$. Potem je $J = h(b+k) - h(b)$. Uporabimo Lagrangeov izrek dvakrat in dobimo $J = f_{xy}(x^*, y^*)hk$ (**), kjer je x^* med a in $a+h$ in y^* med b in $b+k$.

Recimo, da sta h in k oba različna od 0. Iz (*) in (**) sledi $f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) = f_{xy}(x^*, y^*)$. Sedaj $h, k \to 0$. Tedaj $(\bar{x}, \bar{y}) \to (a, b)$ in $(x^*, y^*) \to (a, b)$. Zaradi zveznosti f_{yx} je $\lim_{h,k\to 0} f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) = f_{yx}(a, b)$, zaradi zveznosti f_{xy} v (a, b) je $\lim_{h,k\to 0} f_{xy}(x^*, y^*) = f_{xy}(a, b)$. Sledi

$$f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b). \blacksquare$$

<u>Posledica</u>. Če so vsi parcialni odvodi do vključno reda k funkcije f na odprti množici D zvezni, so mešani odvodi reda k ali manj odvisni le od spremenljivk, po katerih odvajamo, nič pa od vrstnega reda odvajanja.

<u>Zgled</u>. $$\frac{\partial^9 f}{\partial x_7 \partial x_2^5 \partial x_1^3} = \frac{\partial^9 f}{\partial x_7 \partial x_2^4 \partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_1}$$

<u>Opomba</u>. Naj bo D odprta množica. Oglejmo si funkcije, ki imajo vse parcialne odvode prvega reda, $\mathcal{F}$.

$\frac{\partial}{\partial x_k}$ je preslikava, ki funkcijo iz $\mathcal{F}$ preslika v $\frac{\partial f}{\partial x_k}$,

$f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}$, $D_k : f \mapsto D_k f$.

- $D_k(f_1 + f_2) = D_k f_1 + D_k f_2$
- $D_k(\lambda f) = \lambda D_k(f)$

D_k so linearni operatorji.

Naj bo $n \in \mathbb{N}$. $C^{(n)}(\mathcal{D}) = C^{(n)}(D)$ je množica vseh funkcij na D, ki so zvezne skupaj s parcialnimi odvodi vseh redov do vključno n. Operatorji D_k med seboj komutirajo.

5. DIFERENCIABILNOST PRESLIKAV Z $D\subset \mathbb{R}^n$ V $\mathbb{R}^m$

Definicija. Preslikava $f: D\to\mathbb{R}^m$ je v notranji točki $a\in D$ diferenciabilna, če obstaja linearna preslikava $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, da je
$$f(a+h)=f(a)+A(h)+o(h),$$
kjer je $\lim_{h\to 0}\frac{|o(h)|}{h}=0$.

$(o(h)\in\mathbb{R}^m,\ h\in\mathbb{R}^n)$

Opomba. Podobno kot pri funkcijah dokažemo, da je A, če obstaja, en sam. Imenujemo ga diferencial preslikave f v točki a ali odvod preslikave f v točki a. Označimo $A=(Df)(a)=(Df)_a$.

Poseben primer so diferenciabilne funkcije, t.j. preslikave v $\mathbb{R}^1$.

16.10.2003

$$f(a+h)=f(a)+(Df)(a)(h)+o(h)$$

Opomba. Če je diferenciabilna v a, je pri majhnih h
$$f(a+h)\approx f(a)+(Df)(a)(h),$$
t.j razliko $f(x)-f(a)$ dobro aproksimiramo z linearno preslikavo $(Df)(a)(x-a)$ oz. $f(a)+(Df)(a)(h)$ je dober približek za $f(a+h)$.

Opomba. V standardni bazi se $A=(Df)(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ izraža z matriko
$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{m1}&\cdots&A_{mn}\end{bmatrix}.$$
Če je $h=\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$, je $A(h)=Ah=\begin{bmatrix}A_{11}h_1+\cdots+A_{1n}h_n\\ \vdots\\ A_{m1}h_1+\cdots+A_{mn}h_n\end{bmatrix}$.

Naj ima preslikava $f:D\to\mathbb{R}^m$, $D\subset\mathbb{R}^n$ koordinatne funkcije $f_1,\dots,f_m$, t.j. $f=(f_1,\dots,f_m)$ oz. $f(x)=(f_1(x),\dots,f_m(x))$. Če je torej $f(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_m)$, je $y_k=f_k(x_1,\dots,x_n)$.

Naj bo f diferenciabilna v notranji točki $a\in D$, t.j. $f(a+h)=f(a)+A(h)+o(h)$, kjer je $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ in $|o(h)|/|h|\xrightarrow[h\to 0]{}0$. Označimo še $o(h)=(o_1(h),\dots,o_m(h))^T$.
Potem je $A(h)=\begin{bmatrix}A_{11}h_1+\cdots+A_{1n}h_n\\ \vdots\\ A_{m1}h_1+\cdots+A_{mn}h_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1\cdot h\\ \vdots\\ A_m\cdot h\end{bmatrix}$, kjer je A_j j-ta vrstica. Prepišemo v koordinatne funkcije: $f_k(a+h)=f_k(a)+A_k\cdot h+o_k(h)$, $k=1,\dots,m$. Gotovo je $|o_k(h)|\le\sqrt{o_1(h)^2+\cdots+o_m(h)^2}=|o(h)|$ za $\forall k$, $1\le k\le m$. Potem je $\frac{|o_k(h)|}{|h|}\le\frac{|o(h)|}{|h|}\to 0$ za $h\to 0$. Potem je f_k diferenciabilna v a za $\forall k$, $1\le k\le m$.

Izrek. Naj bo $f:D\to\mathbb{R}^m$ preslikava in $a\in D$ notranja točka množice D. f je diferenciabilna v a $\Leftrightarrow$ v a so diferenciabilne vse koordinatne funkcije f_k, $1\le k\le m$.

DOKAZ. V eno smer smo dokazali zgoraj. Naj bodo zdaj vse f_k, $1 \le k \le m$ diferenciabilne v a, t.j.

$$f_k(a+h) = f_k(a) + A_k \cdot h + o_k(h), \qquad (*)$$

kjer $|o_k(h)|/|h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ za $\forall k$, $1 \le k \le m$.

Naj bo A matrika z vrsticami A_k, $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & \\ \vdots & & A_{mn} \end{bmatrix}$,

in naj bo $o(h) = (o_1(h), \dots, o_m(h))^T$.

Enačbe $(*)$ prepišemo v obliko

$$\begin{bmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_1(h) \\ \vdots \\ o_m(h) \end{bmatrix}, \text{ t.j.}$$

$$f(a+h) = f(a) + Ah + o(h).$$

Ker je $|o(h)| = \sqrt{o_1(h)^2 + \dots + o_m(h)^2}$ in $\lim_{h\to 0} |o_k(h)|/|h| = 0$ za $\forall k$,

je tudi $\lim_{h\to 0} \frac{|o(h)|}{|h|} = 0$.

Potem je f diferenciabilna v a. ■

Diskusija. Matriko $A = (Df)(a)$ smo sestavili iz vrstic $A_k = (Df_k)(a)$.

Za funkcije vemo: ker je f_k diferenciabilna v a, je f_k parcialno odvedljiva na vse spremenljivke $x_1, \dots, x_n$ in je $A_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a)\right)$. Sledi:

$$(Df)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \qquad (**)$$

Torej: če je $f: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ diferenciabilna v notranji točki $a \in D$, je $f(a+h) = f(a) + (Df)(a)(h) + o(h)$ in $(**)$.

Diskusija. Če parcialni odvodi funkcije f obstajajo v okolici a in so zvezni v a, je f diferenciabilna.

Posledica. Naj bo $f: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, preslikava in naj v neki okolici notranje točke $a \in D$ obstajajo vsi parcialni odvodi vseh koordinatnih funkcij in naj bodo zvezni v a. Tedaj je f diferenciabilna v a.

Izrek. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$, $D' \subset \mathbb{R}^m$ in $f: D \to \mathbb{R}^m$ diferenciabilna v $a \in D$. Naj bo $f(a) = b \in D'$ notranja točka D' in $g: D' \to \mathbb{R}^p$ diferenciabilna v b.

Tedaj je $F = g \circ f$ diferenciabilna v a in velja

$$(DF)(a) = (Dg)(f(a)) \circ (Df)(a).$$

Torej je odvod kompozicije enak kompoziciji odvodov.

Označimo še:

$$(Dg)(b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(b) \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(b) \end{bmatrix} \text{ in } (Df)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

$$(DF)(a) = (Dg)(f(a))\cdot(Df)(a).$$

Opomba. $(Df)(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(Dg)(f(a)): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, $(DF)(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

DOKAZ. Ker je g diferenciabilna v b, je $g(b+k) = g(b) + (Dg)(b)(k) + o(k)$, kjer $\frac{|o(k)|}{|k|} \to 0$ za $k \to 0$. $f(a+h) = f(a) + (Df)(a)h + o(h)$, kjer $\frac{|o(h)|}{|h|} \to 0$, pri $|h| \to 0$. $b = f(a)$, $b+k = f(a+h)$, $k = f(a+h) - f(a)$.

Potem je $g(f(a+h)) = g(f(a)) + (Dg)(f(a))[f(a+h)-f(a)] + o(f(a+h)-f(a))$
$= g(f(a)) + (Dg)(b)[(Df)(a)(h) + o(h)] + o(f(a+h)-f(a)) = g(f(a)) +$
$+ (Dg)(b)Df(a)(h) + (Dg)(b)o(h) + o((Df)(a)h + o(h))$ oz.

$F(a+h) = F(a) + (Dg)(b)Df(a)h + (Dg)(b)o(h) + o((Df)(a)h + o(h))$.

Izračunamo $|(Dg)(b)o(h)| \leq c|o(h)|$ za neki c (neodvisen od h), ker je $(Dg)(b)$ linearna. Podobno je $|(Df)(a)(h)| \leq d|h|$.

Pogledamo še $o((Df)(a)h + o(h))$. Vemo, če je $(Df)(a)h + o(h) \neq 0$, je $\frac{o(Df(a)h + o(h))}{|Df(a)h + o(h)|} \to 0$. $\frac{o((Df)(a)h + o(h))}{h} = \underbrace{\frac{o((Df)(a)h + o(h))}{|Df(a)h + o(h)|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{Df(a)h + o(h)}{h}}_{\text{omejena}}$

$= \frac{o((Df)(a)h + o(h))}{|(Df)(a)h + o(h)|} \cdot \frac{c|h| + |o(h)|}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Če je $(Df)(a)h + o(h) = 0$, je ostanek 0. Potem je

$$F(a+h) = F(a) + (Dg)(b)(Df)(a)h + o(h), \text{ kjer je}$$
$\frac{|o(h)|}{|h|} \to 0$ pri $h \to 0$. To je diferenciabilnost F v a,

$$(DF)(a) = (Dg)(f(a))(Df)(a). \quad \blacksquare$$

Posledica. ($p=1$) Naj bo g diferenciabilna funkcija na $D' \overset{odp}{\subset} \mathbb{R}^m$, $g = g(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}$, in naj bo vsaka od funkcij $u_1, \ldots, u_m$ diferenciabilna funkcija $u_k = u_k(x_1, \ldots, x_n)$ na $D \overset{odp}{\subset} \mathbb{R}^n$, kjer je $u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, \ldots, x_n) \in D'$ za $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in D$. Tedaj je funkcija $F(x_1, \ldots, x_n) = g(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, \ldots, x_n))$ diferenciabilna na D in za $\forall a \in D$ velja:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial g}{\partial u_1}(u(a))\frac{\partial u_1}{\partial x_k}(a) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial u_m}(u(a))\frac{\partial u_m}{\partial x_k}(a), \quad 1 \leq k \leq n.$$

DOKAZ. Ker je $F = g \circ u$, $u: D \to D'$, $g: D' \to \mathbb{R}$, je $(DF)(a) = (Dg)(u(a))(Du)(a)$.

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(a)\right] = \left[\frac{\partial g}{\partial u_1}(u(a)), \ldots, \frac{\partial g}{\partial u_m}(u(a))\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}(a) & & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$