21. 10. 2003

Zgled. $f(u,w) = u^2 + 2u^3 w + \sin(uw)$

$u = 3x - 2y + z$, $w = 4x + 3y^2 - 3z$

$F(x,y,z) = f(u(x,y,z), w(x,y,z))$

$\frac{\partial F}{dx}, \frac{\partial F}{dy}, \frac{\partial F}{\partial z} = ?$

$\frac{\partial F}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}, \ \ldots$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left[2u + 6u^2 w + w\cos(wu)\right]\cdot 3 + \left[2u^3 + u\cos(wu)\right]\cdot 4 =$$

$$= 6u + 18u^2 w + 3w\cos(uw) + 8u^3 + 4u\cos(uu) =$$

$$= 6u + 18u^2 w + 8u^3 + \cos(wu)(3w + 4u) = 6(3x-2y+z) + 18(3x-2y+z)^2\cdot \ldots$$

6. IZREK O INVERZNI PRESLIKAVI IN IZREK O IMPLICITNIH FUNKCIJAH

Izrek 1. (O inverzni preslikavi) Naj bo Ω odprta množica v $\mathbb{R}^n$ in $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ preslikava razreda $\mathcal{C}^1$ (t.j. vsi parcialni odvodi prvega reda vseh koordinatnih funkcij od f so zvezni na Ω). Naj bo $a \in \Omega$ in naj bo $(Df)(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izomorfizem. Tedaj obstajata okolica U točke a in W točke $f(a)$, da je $f|_U : U \to W$ difeomorfizem (t.j. taka bijektivna preslikava, da je $(f|_U)^{-1}$ diferenciabilen v vsaki točki množice W.

Opomba. $(Df)(a)$ je izomorfizem, če je $\det((Df)(a)) \neq 0$.

Opomba. Naj bo $f = L$ linearna preslikava (poseben primer $\mathcal{C}^1$ preslikave). Tedaj je $(Df)(a) = L$. Enačba $f(x) = y$ je rešljiva enolično za vsak $y \in \mathbb{R}^n$ natanko tedaj, ko je $\det L \neq 0$, t.j. ko je $(Df)(a)$ obrnljiv. Postavimo lahko $U = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je bijekcija.

Opomba. Formula za odvod inverza $(f|_U)^{-1}$.

$(f|U)(f|U)^{-1} = id_V$

Odvod od id je id (enotska matrika). Odvajamo na obeh straneh:

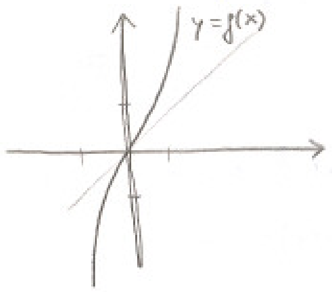
$$D(f|U)(\underbrace{x}_{f^{-1}(y)}) \circ D((f|U)^{-1})(\underbrace{f(x)}_{y}) = id_V \Rightarrow D((f|U)^{-1})(y) = \left[D(f|U)(f^{-1}(y))\right]^{-1}$$

$y = f(x)$ $\quad D((f|U)^{-1})(y) = \left[D(f|U)(x)\right]^{-1}$

Sledi, da je $(f|U)^{-1}$ razreda $\mathcal{C}^1$. Zakaj?

Ker je f^{-1} diferenciabilna v vsakem $y \in W$, je $y \mapsto f^{-1}(y)$ zvezna funkcija od y. Narediti inverz $A^{-1}(w)$, kjer je $w \mapsto A(w)$ zvezna, pa je spet zvezna operacija. Premisli doma! (Inverz matrike s poddeterminantami)

<u>DOKAZ.</u> (ideja dokaza za $n=1$, $a=f(a)=0$, $f'(a)=1$)



Naj bo $g(x)=f(x)-x$. Jasno je $g'(0)= f'(0)-1 = 1-1=0$. Ker je $g'(x)$ po predpostavki zvezen, obstaja okolica $W=\{x;\ |x|<r\}$ točke 0, da je $|g'(x)|<\frac{1}{2}$, $x\in W$. Če sta tedaj $x,y\in W$, je po Lagrangeu

$g(x)-g(y) = g'(\xi)(x-y)$, torej $|g(x)-g(y)| \le \frac{1}{2}|x-y| \ge |\underbrace{f(x)-x}_{g(x)}-\underbrace{f(y)+y}_{g(y)}|$ $\ge |x-y|-|f(x)-f(y)|$, torej je $|f(x)-f(y)| \ge \frac{1}{2}|x-y|$,

torej je f <u>injektivna</u> na W. Kako izračunati za dani y $f^{-1}(y)$?

Z iteracijo: $x_n = y-g(x_{n-1})$. Če recimo x_n konvergirajo k x, bo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = y-\lim\limits_{n\to\infty} g(x_{n-1}) = y-\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = y-f(x)+x$, sledi $y=f(x)$.

Kako dosežemo konvergenco? Uporabimo $|g(x)-g(y)|\le\frac{1}{2}|x-y|$.

$x_n = y-g(x_{n-1})$, $x_{n+1}=y-g(x_n)$, zato je $|x_{n+1}-x_n| = |g(x_n)-g(x_{n-1})| \le$ $\le \frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$. Če je to res za vse n, je $\{x_n\}$ Cauchy-jevo (gl. dokaz Ban. skrč. načela), zato bo konvergiralo. Zato je treba poskrbeti, da bo $x_n\in W$. To dosežemo tako, da se omejimo na $y<\frac{r}{2}$ in $x_0=0$. Potem je $x_1=y$, $|x_1|<\frac{r}{2}$, $|x_2-x_1|\le\frac{1}{2}|x_1-x_0|$, $x_1,x_0\in W$, $\Rightarrow |x_2|\le |x_2-x_1|+|x_1| \le \frac{r}{2}+\frac{r}{4}<r, \ldots$

(Dokaz izreka) S translacijo dosežemo, da je $a=f(a)=0$. S tem ne izgubimo na splošnosti. Ker je $A=(Df)(a)$ izomorfizem $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, našo preslikavo f zamenjamo z $A^{-1}\circ f$. Odvod te v a je $A^{-1}\circ A = I$. Torej ne izgubimo na splošnosti ob predpostavki $(Df)(a)=I$.

Definiramo $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ kot $g(x)=f(x)-x$. Jasno je $(Dg)(0) =$ $=(Df)(0)-I = I-I=0$. Če je $x,y\in\Omega$ in daljica od x do y vsa v Ω, je funkcija $t\mapsto \psi(t) = g(x+t(y-x))$ zvezno odvedljiva vektorska funkcija na $[0,1]$ (je kompozicija dveh $\mathcal{C}^1$ preslikav: $t\mapsto x+t(y-x)$ in g). Torej za $\forall j$, $1\le j\le n$ velja:

$$g_j(y)-g_j(x) = \psi_j(1)-\psi_j(0) = \int_0^1 \psi_j'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (Dg_j)(x+t(y-x))(y-x)\,dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x+t(y-x))(y_k-x_k)\,dt.$$

Ker je $(Dg)(0)=0$, so vsi parcialni odvodi prvega reda vseh koordin. funkcij v točki 0 enaki 0. Ker so zvezni, lahko najdemo tako majhen $r>0$, da bo $\frac{\partial g_j}{\partial x_k} < \frac{1}{2n}$ za $\forall x, |x|<r, \forall j, 1\le j\le m, \forall k, 1\le k\le n$. kroglica $|x|<r$ je v Ω

Če je $|x|<r$ in $|y|<r$, je daljica od x do y gotovo v Ω, zato je

$$|g_j(y)-g_j(x)| \le \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|\cdot 1 \le \frac{1}{2n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}\cdot\sqrt{n}. \quad \sum \xi_j\eta_j \le \sqrt{\sum \xi_j^2}\sqrt{\sum \eta_j^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\|y-x\|.$$

$|g(y)-g(x)|^2 = \sum(g_j(y)-g_j(x))^2 \le m\cdot\frac{1}{4|n|}|y-x|^2 = \frac{1}{4}|y-x|^2$, potem je

$|g(y)-g(x)| \le \frac{1}{2}|y-x|$.

Torej: $|g(y)-g(x)|\le\frac{1}{2}|y-x|$, če je $|x|\le r$ in $|y|\le r$. Naj bo $|y|<\frac{r}{2}$.

Postavimo $x_0=0$. Rešujemo $x_n = y-g(x_{n-1})$. $x_1 = y-g(0)=y$, zato je $|x_1|<\frac{r}{2}$. $x_2-x_1 = [y-g(x_1)]-[y-g(x_0)]$, zato je $|x_2-x_1| =$

$= |g(x_1)-g(x_0)| \le \frac{1}{2}|x_1-x_0| = \frac{1}{2}|x_1| < \frac{r}{4}$, torej je $|x_2|\le|x_2-x_1|+|x_1-x_0|<$

$<\frac{r}{2}+\frac{r}{4}, \dots$ Nadaljujemo: $|x_n|\le\frac{r}{2}+\frac{r}{4}+\dots+\frac{r}{2^n}\le r$ in $|x_1-x_0|<\frac{r}{2}$, Doma! (Banach)

$|x_2-x_1|<\frac{r}{4}, \dots, |x_n-x_{n-1}|<\frac{r}{2^n}$. Od tu sledi, da $\{x_n\}$ konvergira.

Obstaja torej $x=\lim_{n\to\infty}x_n$, $|x|\le r$, da je $x = y-g(x)$, t.j.

$x = y-f(x)+x$, t.j. $y=f(x)$.

Za $\forall y, |y|<\frac{r}{2}$ obstaja x, da je $y=f(x)$. Tak x je en sam. Če sta dva, $x=y-g(x)$ in $\tilde{x}=y-g(\tilde{x})$, potem je $|\tilde{x}-x| = |g(\tilde{x})-g(x)|\le$

$\le\frac{1}{2}|\tilde{x}-x| \Rightarrow x=\tilde{x}$.

Ker lahko r zamenjamo z $\rho<r$, sledi: $\forall\rho, 0<\rho<r$ in $y, |y|<\frac{\rho}{2}$, obstaja $\exists!\, x, |x|<\rho$, da je $f(x)=y$.

23. 10. 2003

Opomba. $|x_1|<\frac{r}{2}, |x_2-x_1|<\frac{r}{4}, \dots$ Od tu sledi $|x|<r$. Torej velja: $\forall y, |y|<\frac{r}{2}$ obstaja natanko en x, $|x|<r$, da je $f(x)=y$.

Za $\forall\rho, 0<\rho\le r$ je: $\forall y, |y|<\frac{\rho}{2}$ obstaja $\exists!\, x, |x|<\rho$, da je $f(x)=y$.

$V=\{y;\, |y|<\frac{r}{2}\}$, $U=\{x;\, |x|<r, f(x)\in V\}$, U je odprta okolica od x. Vemo že, da je $f|_U: U\to V$ bijekcija.

Še diferenciabilnost inverza. Naj bo $\varphi = (f|U)^{-1}$. Vemo: če je $|y|<\frac{\rho}{2}$, je $\varphi(y)$ ($f(x)=y$), je $|\varphi(y)|<\rho$. Sledi:

$$|\varphi(y)|\le 2|y| \quad \text{za } \forall y, |y|<\frac{r}{2}. \quad (*)$$

Ker je f diferenciabilna v 0, je $f(x)=f(0)+(Df)(0)(x)+\eta(x)$, kjer je $\frac{|\eta(x)|}{|x|}\to 0$ pri $|x|\to 0$, zato $f(x)=x+\eta(x)$. Torej je $y=$

$=f(\varphi(y))=\varphi(y)+\eta(\varphi(y))$, torej $\varphi(y)=y-\eta(\varphi(y))$, kjer je zaradi $(*)$

$\frac{\eta(\varphi(y))}{\varphi(y)} \leq \frac{\eta(\varphi(y))}{|\varphi(y)|} \cdot \frac{|\varphi(y)|}{|y|} \leq 2\,\frac{\eta(\varphi(y))}{\varphi(y)}$. Ko gre $y \to 0$, gre iz $(*)$ $|\varphi(y)| \to 0$. Torej $\varphi(y) = y + \eta(\varphi(y))$, kjer $\frac{\eta(\varphi(y))}{|y|} \to 0$ pri $|y| \to 0$.

Zato je φ diferenciabilna v $y=0$ in $(D\varphi)(0) = I$. Torej je $(f|U)^{-1}$ diferenciabilna v $y=0$ in je $D(f(U)^{-1})(0) = I$.

Dokazali smo: če je $(Df)(a)$ nesingularen (in f iz $\mathcal{C}^1$ v okolici a), tedaj obstajata okolica U a in W od $f(a)$, da je $f|U : U \to W$ bijekcija in $(f|U)^{-1}$ diferenciabilna v $f(a)$.

Da dokažemo diferenciabilnost v drugih točkah, zmanjšamo U tako, da je $(Df)(a')$ nesingularen za vse $a' \in U$ in nato dokaz ponovimo za a' namesto a. Dobili smo diferenciabilnost $(f|U)^{-1}$ na vsem W. ∎

<u>Izrek o implicitni funkciji – (trivialni) linearni primer.</u>

n_2 homogenih linearnih enačb z n_1+n_2 neznankami:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n_1}x_{n_1} + \beta_{11}y_1 + \dots + \beta_{1n_2}y_{n_2} &= 0\\
\alpha_{21}x_1 + \dots + \alpha_{2n_1}x_{n_1} + \beta_{21}y_1 + \dots + \beta_{2n_2}y_{n_2} &= 0\\
&\vdots\\
\alpha_{n_21}x_1 + \dots + \alpha_{n_2n_1}x_{n_1} + \beta_{n_21}y_1 + \dots + \beta_{n_2n_2}y_{n_2} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Kdaj sistem lahko enolično razrešimo na $y_1, \dots, y_{n_2}$, t.j. kdaj za vsake $x_1, \dots, x_{n_1}$ obstaja $\exists!$ n_2-terica $y_1, \dots, y_{n_2}$, da velja $(*)$? – To je natanko tedaj, ko je matrika

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n_21} & \cdots & \beta_{n_2n_2} \end{bmatrix}$$

nesingularna, t.j. $\det \beta \neq 0$.

$$[\alpha]X + [\beta]Y = 0 \Rightarrow Y = -[\beta]^{-1}[\alpha]X.$$

Lahko sistem dopolnimo:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n_1}x_{n_1} + \beta_{11}y_1 + \dots + \beta_{1n_2}y_{n_2} &= 0\\
&\vdots\\
\alpha_{n_21}x_1 + \dots + \alpha_{n_2n_1}x_{n_1} + \beta_{n_21}y_1 + \dots + \beta_{n_2n_2}y_{n_2} &= 0\\
x_1 \qquad\qquad &= x_1\\
x_2 \qquad\qquad &= x_2\\
\vdots \qquad\qquad &\\
x_{n_1} &= x_{n_1}
\end{aligned} \quad (**)$$

Če je $\det[\beta] \neq 0$, je $\det\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ I & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ in zato za vsako desno stran v $(**)$ obstaja natanko ena $(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2})$, ki izpolnjuje $(**)$.

Definicija. Naj bosta Ω_1 in Ω_2 odprti v $\mathbb{R}^{n_1}$ in $\mathbb{R}^{n_2}$ in $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^p$ preslikava razreda $\mathcal{C}^1$.
Naj bo $(a,b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Definirajmo $g: \Omega_2 \to \mathbb{R}^p$ kot $g(y) = f(a,y)$. Linearno preslikavo $(dg)(b): \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^p$ imenujemo parcialni odvod preslikave f v (a,b) na drugo spremenljivko $(y \in \Omega_2)$ in ga označimo z $(D_2 f)(a,b)$.
Podobno definiramo $h: \Omega_1 \to \mathbb{R}^p$ kot $h(x) = f(x,b)$ in $(dh)(a) = (D_1 f)(a,b)$.

Diskusija. Če je $f(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}) = (f_1(x_1, \ldots), \ldots, f_p(x_1, \ldots))$, je

$$(D_1 f)(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n_1}}(a,b) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{n_1}}(a,b) \end{bmatrix} \text{ in}$$

$$(D_2 f)(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{n_2}}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_{n_2}}(a,b) \end{bmatrix},$$

torej je

$$(Df)(a,b) = \Bigg[\underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b), & \cdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a,b) & \cdots \end{matrix}}_{(D_1 f)(a,b)} \Bigg| \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b), & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{n_2}}(a,b) \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a,b), & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_{n_2}}(a,b) \end{matrix}}_{(D_2 f)(a,b)} \Bigg]$$

Doma premisli za $n_1 = n_2 = 1$ in $p = 1$.

Izrek. (O implicitni funkciji) Naj bo Ω_1 odprta v $\mathbb{R}^{n_1}$ in Ω_2 odprta v $\mathbb{R}^{n_2}$ in f $\mathcal{C}^1$ preslikava $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^{n_2}$. Naj bo $(a,b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ in $f(a,b) = 0$. Naj bo $(D_2 f)(a,b)$ nesingularen (t.j. izomorfizem $\mathbb{R}^{n_2}$, t.j. $\det (D_2 f)(a,b) \neq 0$). Tedaj obstaja okolica $U_1 \times U_2$ od (a,b), vsebovana v $\Omega_1 \times \Omega_2$, da za $\forall x \in U_1$ $\exists! \, y = y(x)$ v U_2, da je $f(x, y(x)) = 0$. Preslikava $x \mapsto y(x)$, $U_1 \to U_2$ je razreda $\mathcal{C}^1$.

Diskusija. Izrek torej pove: naj bo n_2 funkcij $n_1 + n_2$ spremenljivk $f_1, \ldots, f_{n_2}$. f je $(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}) \mapsto (f_1(\cdots), \ldots, f_{n_2}(x_1, \ldots, y_{n_2}))$. Rešujemo torej ($f(x,y) = 0$, t.j.) sistem enačb

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, y_{n_2}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{n_2}(x_1, \ldots, y_{n_2}) &= 0 \end{aligned} \qquad (+)$$

na spremenljivke $y_1, \ldots, y_{n_2}$ (ki jih želimo enolično izraziti z $x_1, \ldots, x_{n_1}$).

Naj bodo vse $f_1,\dots,f_{n_2}$ iz $\mathcal{C}^1$ v okolici $(a_1,\dots,a_{n_1},b_1,\dots,b_{n_2})$.

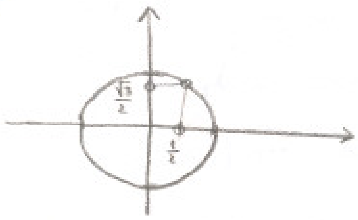
Naj bo
$$f_1(a_1,\dots,b_{n_2})=0$$
$$\vdots$$
$$f_{n_2}(a_1,\dots,b_{n_2})=0$$

in matrika
$$\left((D_2 f)(a,b)=\right)\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a_1,\dots,b_{n_2}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{n_2}}(a_1,\dots,b_{n_2})\\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n_2}}{\partial y_1}(a_1,\dots,b_{n_2}) & \cdots & \frac{\partial f_{n_2}}{\partial y_{n_2}}(a_1,\dots,b_{n_2})\end{bmatrix}$$

nesingularna. Tedaj obstajata okolica U_1 točke $(a_1,\dots,a_{n_1})\in\mathbb{R}^{n_1}$ in okolica U_2 $(b_1,\dots,b_{n_2})$ v $\mathbb{R}^{n_2}$, da za $\forall\,(x_1,\dots,x_{n_1})\in U_1$ obstaja $\exists!\,(y_1,\dots,y_{n_2})\in U_2$, da velja (+). Tako dobljene funkcije $y_1(x_1,\dots,x_{n_1}),\dots,y_{n_2}(x_1,\dots,x_{n_1})$ imajo zvezne parcialne odvode na U_1.

Primer. $n_1=n_2=1$. Naj bo $f(x,y)$ $\mathcal{C}^1$ v okolici $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $f(a,b)=0$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$. Tedaj obstajajo U_1 a v $\mathbb{R}$, okolica U_2 b v $\mathbb{R}$ in $\varphi: U_1\to U_2$, da je $(x,y)\in U_1\times U_2$ in $f(x,y)=0$ natanko tedaj, ko je $x\in U_1$ in $y=\varphi(x)$, t.j. na $U_1\times U_2$ je enačba $f(x,y)=0$ ekvivalentna $y=\varphi(x)$.

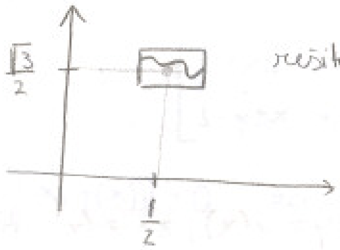
Ilustracija. $x^2+y^2-1=0$



$f(x,y)=x^2+y^2-1$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$

$(a,b)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}\neq 0$

$f(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=0$



rešitev $x^2+y^2-1=0$ je $y=\varphi(x)$ (graf ene funkcije)
$y=\sqrt{1-x^2}$

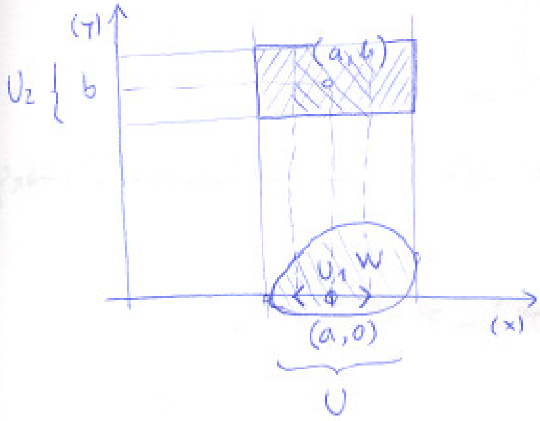
DOKAZ. Najprej si oglejmo primer $n_1=n_2=1$. Gre za reševanje enačbe $f(x,y)=0$, $f(a,b)=0$ v okolici (a,b). Če je $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$, $\exists\, U_1\times U_2$ od (a,b), da $\forall x\in U_1\ \exists!\, y\in U_2$, $y=\varphi(x)$, da je $f(x,\varphi(x))=0$, to pomeni, da za $(x,y)\in U_1\times U_2$ velja $f(x,y)=0 \Leftrightarrow$ ko je $y=\varphi(x)$.
$(D_2 f)(a,b)\,h=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,h$.

(Ideja dokaza) Ogledamo si preslikavo $F(x,y)=(x,f(x,y))$, torej $(x,y)\mapsto \begin{pmatrix}x\\ f(x,y)\end{pmatrix}$. Odvod $(DF)(a,b)=\begin{bmatrix}1&0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)&\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\end{bmatrix}$.

Naj bo $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$. Tedaj je $(DF)(a,b)$ nesingularna. Uporabimo lahko za F že dokazani izrek o inverzni funkciji.

$(\det(DF)(a,b) \neq 0)$ F : okolice (a,b) v $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, odvod nesingularen. 28. 10. 2003

Po izreku obstajata okolici $U \times U_2$ od (a,b) in W od $(a,0) = F(a,b)$, da je $F : U \times U_2 \to W$ difeomorfizem $\mathcal{C}^1$ (t.j. bijekcija, katere inverz je $\mathcal{C}^1$).



Naj bo $\varphi : W \to U \times U_2$ inverz preslikave $F|_{U \times U_2}$. $\varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$, $\varphi_1(x,y) \equiv x$ (ker F ne spremeni prve koordinate, je tudi $F|_{U \times U_2} = \varphi$ ne). $\varphi(x,y) = (x, \varphi_2(x,y))$

Ker je W odprta in vsebuje $(a,0)$, obstaja okolica U_1 od a v $\mathbb{R}$, da je $(x,0) \in W$, če je $x \in U_1$.

Funkcija φ_2 je $\mathcal{C}^1$. Definiramo $y(x) = \varphi_2(x,0)$. $(x \in U_1)$. Sedaj je $x \in U_1$, $y \in U_2$, $f(x,y) = 0$ natanko tedaj ko je $(x,y) \in U_1 \times U_2$ in $F(x,y) = (x,0)$, torej $(x,y) = \varphi(x,0) = (x, \varphi_2(x,0))$, t.j. ko je $y = \varphi_2(x,0) =$
$= y(x)$. ∎

Dokaz v splošnem primeru gre po istem vzorcu. Doma!

<u>Formula za odvod izračunane implicitne funkcije</u>

Naj bo vse kot v prejšnjem izreku in $A(x) = (D_2 f)(x, y(x))$ in $B(x) = (D_1 f)(x, y(x))$. Če je U dovolj majhna okolica od a, je $A(x)$ izomorfizem za vse $x \in U$ (ker je preslikava $\mathcal{C}^1$) in velja

$$(Dy)(x) = -A(x)^{-1} B(x).$$

<u>DOKAZ</u>. Isto kot pri $f(x,y) = 0$.

$f(x, y(x)) = 0$ za x blizu a, torej je

$D[f(x, y(x))] = 0$ za x blizu a. $\left(D[x \mapsto f(x, y(x))](x) = 0 \right)$

Po verižnem pravilu je

$$(D_1 f)(x, y(x)) + (D_2 f)(x, y(x)) (Dy)(x) = 0$$

$$\boxed{(Dy)(x) = -\frac{(D_1 f)(x, y(x))}{(D_2 f)(x, y(x))}}. \qquad (*)$$

<u>Diskusija</u>. Formula $(*)$ pomaga dokazati tudi:

Če je preslikava f razreda $\mathcal{C}^k$, je tudi y razreda $\mathcal{C}^k$.

V $(*)$ so izraženi parcialni odvodi funkcij y po spremenljivkah x. Na desni nastopajo le funkcije $y(x)$.

Še ena formulacija izreka o implicitni funkciji:

<u>Izrek.</u> Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta in $F: \Omega \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda $\mathcal{C}^1$, kjer je $m<n$. Naj bo $F(a)=0$ in rang $(DF)(a)=m$. (največji možen). Tedaj obstajajo $p_1, p_2, \dots, p_{n-m}$ in $q_1, q_2, \dots, q_m$, $p_i \neq q_j$ za $\forall i,j$. Naj bo še $p_1 < p_2 < \dots < p_{n-m}$ in $q_1 < \dots < q_m$, in funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici $(a_{p_1}, \dots, a_{p_{n-m}})$, da je v neki okolici U točke a $F(x)=0$ ekvivalentno enačbam

$$x_{q_1} = \varphi_1(x_{p_1}, \dots, x_{p_{n-m}})$$
$$\vdots$$
$$x_{q_m} = \varphi_m(x_{p_1}, \dots, x_{p_{n-m}})$$

(t.j. v okolici a je mogoče sistem $F(x)=0$ enolično razrešiti na $x_{q_1}, \dots, x_{q_m}$.

<u>DOKAZ.</u> Spremenljivke med seboj zamenjamo tako, da so tiste, ki v $(DF)(a)$ pokažejo rang na desnem koncu matrike in po zgornjem izreku sistem razrešimo na te spremenljivke.

<u>Primer 1.</u> $F(x,y)=0$, $F(a,b)=0$

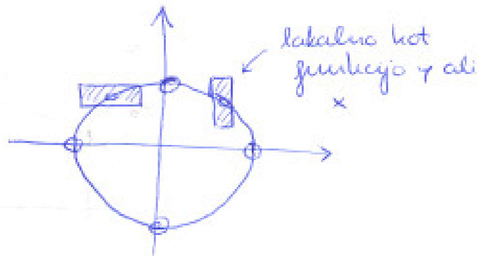
F razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici (a,b)

$$(DF)(a,b) = \left[\frac{\partial F}{\partial x}(a,b), \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right]$$

Če je rang $(DF)(a,b)=1$ je $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) \neq 0$ ali pa $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

V drugem primeru lahko enačbo enolično rešimo na y, v prvem na $x = x(y)$.

$F(x,y) = x^2+y^2-1 \Rightarrow x^2+y^2-1=0$



Lahko razrešimo na y povsod, razen v okolici $(1,0)$, $(-1,0)$. Na x lahko, razen v $(0,1)$ in $(0,-1)$.

$\left(\frac{\partial F}{\partial y} = 2y\right.$ in je 0 v gornjih dveh točkah, $\left.\frac{\partial F}{\partial x} = 2x = 0 \text{ v } (0,1), (0,-1)\right)$

<u>Primer 2.</u> $F(x,y) = x^2+y^2$

$x^2+y^2=0 \Rightarrow (a,b)=(0,0)$ je edina točka

$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$, izreka ne moremo uporabiti

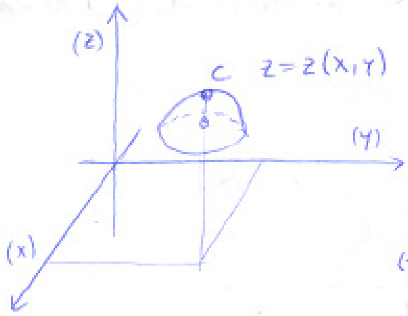
<u>Primer 3.</u> (Ploskve v $\mathbb{R}^3$)

$F(x,y,z)=0$, $F(a,b,c)=0$, rang$(DF)(a,b,c)=1$, F razreda $\mathcal{C}^1$ pri (a,b,c)

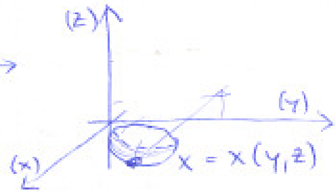
$$(DF)(a,b,c) = \left[\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c), \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)\right]$$

To pomeni, da je vsaj eden od odvodov različen od 0.

(a) $\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$, enačbo lahko enolično razrešimo na $z = z(x,y)$



(b) $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) \neq 0$, lahko razrešimo na x



(c) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) \neq 0$, lahko razrešimo po y

Doma. $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

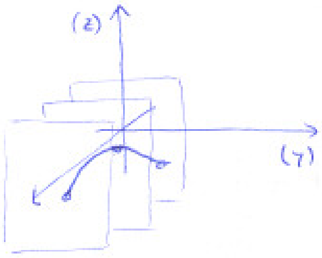
Primer 4. (Krivulje v prostoru)

$F(x,y,z) = 0 = G(x,y,z)$, $F(a,b,c) = G(a,b,c) = 0$, $f = (F,G)$

$\text{rang}\,(Df)(a,b,c) = 2$.

$$(Df)(a,b,c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c), & \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c), & \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(a,b,c), & \frac{\partial}{\partial y}(a,b,c), & \frac{\partial G}{\partial z}(a,b,c) \end{bmatrix}$$

(a) $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial G}{\partial z}(a,b,c) \end{bmatrix} \neq 0$ Po izreku lahko razrešimo na y in z enolično.



(b) & (c) podobno - razrešimo na druga dva para

30.10.2003

Primer 5. (Krivulje v prostoru kot tiri poti v prostoru)

$x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, f, g, h razreda $\mathcal{C}^1$ je gladka pot.

Naj bo $\alpha \leq t_0 < \beta$. Kdaj je mogoče z gotovostjo reči, da je košček tira $\{x(t), y(t), z(t) : t_0 - \delta < t < t_0 + \delta\}$ košček gladke krivulje (podobno kot v prejšnjem primeru). $x(t_0) = x_0, \ldots$

Naj bo $\dot{f}(t_0) \neq 0$. Tedaj je to mogoče. Naj bo npr. $\dot{x}(t_0) \neq 0$. Tedaj je mogoče v okolici točke (t_0, x_0) enačbo $x = f(t)$ razrešiti na t, torej $t = \Psi(x)$ (x blizu x_0, t blizu t_0). Potem je $y = g(\Psi(x))$, $z = h(\Psi(x))$, x v okolici x_0. Zato košček poti lahko zapišemo kot $x = x$, $y = g(\Psi(x))$, $z = h(\Psi(x))$ za x v okolici x_0, kar je gladka krivulja. Podobno, če je $\dot{y}(t_0) \neq 0$ ali $\dot{z}(t_0) \neq 0$.

Primer 6. (Ploskve v prostoru – parametrično dane)

Naj bo $x = f(u,w)$, $y = g(u,w)$, $z = h(u,w)$, kjer so f, g in h gladke funkcije na odprtem dif. območju $D \subset \mathbb{R}^2$. Naj bo $(u_0, w_0) \in D$. Kdaj je mogoče reči, da bo košček $\{(f(u,w), g(u,w), h(u,w));\ (u,w) \text{ v okolici } (u_0,w_0)\}$ košček neke ploskve v prostoru (primer 3). $x_0 = f(u_0,w_0), \dots$

Primer: Zemlja – $x = R\cos\vartheta \sin\varphi$, $y = R\cos\vartheta\sin\varphi$, $z = R\sin\vartheta$, ϑ širina, φ dolžina

Oglejmo si odvod preslikave $(u,w) \mapsto (f(u,w), g(u,w), h(u,w))$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,w_0) & \frac{\partial f}{\partial w}(u_0,w_0) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u_0,w_0) & \frac{\partial g}{\partial w}(u_0,w_0) \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u_0,w_0) & \frac{\partial h}{\partial w}(u_0,w_0) \end{bmatrix}.$$

Če ima ta matrika maksimalen rang (2), je to mogoče.

Naj bo npr. $\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u_0,w_0) & \frac{\partial g}{\partial w}(u_0,w_0) \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u_0,w_0) & \frac{\partial h}{\partial w}(u_0,w_0) \end{bmatrix}$

nesingularna. Tedaj je mogoče sistem $y = g(u,w)$, $z = h(u,w)$ enolično razrešiti na u, w za (y,z) v okolici (y_0, z_0) in (u,w) v okolici (u_0,w_0), t.j. obstajata gladki funkciji $\varphi(y,z)$ in $\psi(y,z)$, da je $u = \varphi(y,z)$, $w = \psi(y,z)$.

Ko to vstavimo v $x = f(u,w)$, dobimo $x = f(\varphi(y,z), \psi(y,z)) = F(y,z)$. Potem je $x = F(y,z)$, za $(y,z) \approx (y_0,z_0)$ in $x \sim x_0$. To je kos ploskve v prostoru.

Pojem mnogoterosti

Krivulje v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, ploskve v $\mathbb{R}^3$ so posebni primeri mnogoterosti.

Definicija. Naj bo $U \subset \mathbb{R}^n$ odprta, $F: U \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda $\mathcal{C}^1$.
Pravimo, da ima F v točki $a \in U$ rang r, če ima matrika $(DF)(a)$ rang r.

Definicija. Naj bo $1 \le r \le n$, neprazna množica $M \subset \mathbb{R}^n$ je gladka mnogoterost dimenzije r, če za $\forall u_0 \in M$ obstajajo
- okolica točke u_0 (odprta) $\mathcal{U}$ v $\mathbb{R}^n$
- funkcije $F_1, F_2, \dots, F_{n-r}$ razreda $\mathcal{C}^1$ na $\mathcal{U}$

n...

mnogote...

je dimenzija n...

Lokalno je sistem ...

r spremenljivk izberem ...

določenih.

Opomba: Če je r = n, ni nobene enač...

imamo n enačb.

Lokalno je množica skupnih ...

(M je diskretna množica točk).

Najpreprostejši primer r-dimenzionalne ...

... × {(0, ..., 0)} ⊂ $\mathbb{R}^n$. Enačbe so:

$x_{r+1} = 0$

⋮

$x_{r+r} = 0$

...ilane $\Phi : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{n-r}$ v $\mathbb{R}^n$ je množica ...

ki zadoščajo:

$x_{r+1} = \Phi_1(x_1, \dots, x_r)$

⋮

$x_n = \Phi_{n-r}(x_1, \dots, x_r)$,

..., $x_r) - x_{r+1} = 0$, oz. množica

..., $\Phi_{n-r}(x_1, \dots, x_r)))$; $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^n \}$

...tivat) vsaka r-dimenzionalne

..., $a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ dvodi...

...jan: spremen...

... x (a...

Oglejmo si gladke poti skozi a, t.j. funkcije $t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = X(t)$, kjer je $X(0) = a$, ki so vsebovane v M. Ker je $X(t) \in M$ ($t \in I$, interval s središčem 0), je seveda

$$X(t) = (x(t), y(t), \Phi(x(t), y(t))),$$

t.j. $z(t) = \Phi(x(t), y(t))$. Izračunajmo vektor hitrosti $\dot{X}(0)$ (v trenutku 0, t.j. ko letimo skozi a).

$$\dot{X}(t) = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t), y(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x(t), y(t))\dot{y}(t)\right)$$

$$\dot{X}(0) = \left(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(a_1, a_2)\dot{x}(0) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(a_1, a_2)\dot{y}(0)\right) =$$

$$= \dot{x}(0)\left(1, 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(a_1, a_2)\right) + \dot{y}(0)\left(0, 1, \frac{\partial \Phi}{\partial y}(a_1, a_2)\right)$$

To pomeni, da so vsi tangentni vektorji na gladke poti v M, ki potekajo skozi a v trenutku 0, v ravnini, napeti na vektorja

$$\left(1, 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(a_1, a_2)\right), \quad \left(0, 1, \frac{\partial \Phi}{\partial y}(a_1, a_2)\right).$$

Temu prostoru rečemo <u>tangentni prostor</u> na M v točki a, označimo s $T_a M$. (V tem primeru je dvodimenzionalen in poteka skozi izhodišče).

<u>Opomba.</u> Dostikrat rečemo <u>tangentna ravnina</u> ravnini, ki poteka skozi (a_1, a_2, a_3) in je vzporedna $T_a M$.

Enako sklepanje velja v splošnem primeru: v okolici U točke $a \in \mathbb{R}^n$ je r-dimenzionalna mnogoterost (po zamenjavi spremenljivk) oblike

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_r, \Phi_1(x_1, \dots, x_r), \dots, \Phi_{n-r}(x_1, \dots, x_r);$$
$$(x_1, \dots, x_r) \in V, V \text{ okolica } (a_1, \dots, a_r) \text{ v } \mathbb{R}^r\}.$$

Če je $t \mapsto x(t)$ ($t \in I$) gladka pot v M, $x(0) = a$, je $(x_1(t), \dots, x_r(t), \Phi_1(x_1(t), \dots, x_r(t)), \dots, \Phi_{n-r}(\cdots))$. Tangentni vektor v a (pri $t = 0$) je

$$\left(\dot{x}_1(0), \dots, \dot{x}_r(0), \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_r)\dot{x}_1(0) + \dots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_r}(a_1, \dots, a_r)\dot{x}_r(0), \dots\right),$$

in je vedno vsebovan v r-dimenzionalnem podprostoru, napetem na vektorje:

$$\left(1, 0, \dots, 0, \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_r), \dots, \frac{\partial \Phi_{n-r}}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_r)\right)$$
$$\vdots$$
$$\left(0, \dots, 0, 1, \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_r}(a_1, \dots, a_r), \frac{\partial \Phi_{n-r}}{\partial x_r}(a_1, \dots, a_r)\right).$$

Temu prostoru pravimo tangentni prostor v M v točki a: T_aM.

7. TAYLORJEVA FORMULA, EKSTREMI FUNKCIJ VEČ SPREMENLJIVK

Če je f $(n+1)$-krat odvedljiva na intervalu s krajiščema a in x, je

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kjer je ξ med a in x ($\xi = a + \vartheta(x-a)$, $\vartheta \in (0,1)$).

To bi želeli posplošiti na več spremenljivk.

4. 11. 2003

V $\mathbb{R}^2$: naj bo $G \subset \mathbb{R}^2$ odprta in $f \in \mathcal{C}^{r+1}(G)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, da daljica med (a,b) in (h,k) leži v G.

Definiramo $F(t) = f(a+th, b+tk)$, potem je $F(0) = f(a,b)$, $F(1) = f(a+h, b+k)$.

Po Taylorjevem izreku:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \dots + \frac{1}{r!}F^{(r)}(0) + \frac{1}{(r+1)!}F^{(r+1)}(\vartheta), \quad \vartheta \in [0,1]$$

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d(a+th)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d(b+tk)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk)k$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th, b+tk)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th, b+tk)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th, b+tk)k^2$$

$$F'''(t) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}kh^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3$$

...

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{(r+1)!}\left(\frac{\partial^{r+1} f}{\partial x^{r+1}}(a+\vartheta h, b+\vartheta k)h^{r+1} + \dots\right)$$

Označimo $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

<u>Izrek.</u> Naj bo $G \subset \mathbb{R}^n$ odprta, f $(r+1)$-krat zvezno odvedljiva ($f \in \mathcal{C}^{r+1}(G)$), $a \in G$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, da je $a + th = (a_1 + th_1, \dots, a_n + th_n) \subset G$ za $\forall t \in [0,1]$. Tedaj obstaja ϑ, $0 < \vartheta < 1$, da je

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}\left(\left(\sum_{j=1}^n h_j D_j\right) f\right)(a) + \frac{1}{2!}\left(\left(\sum_{j=1}^n h_j D_j\right)^2 f\right)(a) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{r!}\left(\left(\sum_{j=1}^n h_j D_j\right)^r f\right)(a) + \frac{1}{(r+1)!}\left(\left(\sum_{j=1}^n h_j D_j\right)^{r+1} f\right)(a + \vartheta h)$$

<u>DOKAZ.</u> $F(t) = f(a+th)$; $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $A = h_1 D_1 + \dots + h_n D_n$.

Z indukcijo pokažemo, da je $F^{(k)}(t) = (A^k f)(a+th)$.

$k = 0$ $F(t) = f(a+th)$ ✓ Naj velja za $k \leq p$.

Definiramo $g = A^k f$, $g(a+th) = F^{(k)}(t)$ po i.p..

Odvajamo: $F^{(k+1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} D_j g(a+th) h_j = \sum_{j=1}^{n} h_j D_j \sum_{i=1}^{n} (h_i D_i)^k f(a+th) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} (h_j D_j)^{k+1} f(a+th) = A^{(k+1)} f(a+t). \quad \blacksquare$$

Posledica. Če je vse kot v izreku:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^{n} h_j D_j \right)^k f(a) + O(|h|^{r+1})$$

$\leftarrow$ množica omejeno, če delimo s $|h|^{r+1}$

oz. $o(|h|^r)$ $\leftarrow$ gre proti 0, če delimo z $|h|^r$

$$|h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$$

DOKAZ.

$$R_n = \underbrace{\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_{n+1}=1}^{n} D_{i_1} D_{i_2} \cdots D_{i_{n+1}} f(a+\vartheta h)}_{< M} h_{i_1} \cdots h_{i_{n+1}}$$

in $|h_j| \leq |h|$, zato je $R_n \leq M |h|^{n+1}$. $\blacksquare$

Taylorjeva vrsta za $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ lahko zapišemo

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_{l=1}^{n} h_l D_l \right)^r f(a) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{i_1+\dots+i_n=r} D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} f(a)(x_1-a_1)^{i_1} \cdots (x_n-a_n)^{i_n}$$

Definiramo: če Taylorjeva vrsta v okolici a konvergira in je njena vrsta enaka $f(x)$, se imenuje f (realno) analitična.

Ekstremi funkcij več spremenljivk

Definicija. Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ množica in $f: K \to \mathbb{R}$ funkcija. f ima v $a \in K$ lokalni maksimum, če obstaja okolica U za a v $\mathbb{R}^n$, da je $f(x) \leq f(a)$ za $\forall x \in U \cap K$, in ima lokalni minimum v $b \in K$, če obstaja okolica V za b v $\mathbb{R}^n$, da je $f(x) \geq f(b)$ za $\forall x \in V \cap K$.

Lokalne maksimume in minimume imenujemo lokalne ekstreme.

Izrek. Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ množica, $f: K \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj ima f lokalni ekstrem v notranji točki $a \in K$. Naj bo f diferenciabilna v a. Tedaj so vsi parcialni odvodi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ za $i = 1, \dots, n$.

Opomba. t.j. $(D_j f)(a) = 0$.

DOKAZ. Definiramo $f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Vsi f_i imajo lokalni ekstrem za $t = a_i$. Zaradi diferenciabilnosti f v a je f_i odvedljiva v $t = a_i$ in njen odvod je torej 0.

$$f_i'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_i) = 0. \quad \blacksquare$$

Opomba. (definicija) Točke a, v katerih je $(Df)(a) = 0$, imenujemo kritične točke.

Naj bo G odprta v $\mathbb{R}^n$ in $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Naj bo $a \in G$ kritična točka za f. Po Taylorjevi formuli je:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}\Big(\Big(\sum_{j=1}^{n} h_j D_j\Big) f\Big)(a) + \frac{1}{2!}\Big(\Big(\sum_{j=1}^{n} h_j D_j\Big)^2 f\Big)(a+\vartheta h) =$$

$$= f(a) + \frac{1}{2}\Big(\Big(\sum_{j=1}^{n} h_j D_j\Big)^2 f\Big)(a+\vartheta h) = f(a) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (D_j D_k f)(a+\vartheta h) h_j h_k.$$

Ker so drugi odvodi zvezni, velja: $(D_j D_k f)(a+\vartheta h) = (D_j D_k f)(a) + \eta_{jk}$, $\eta_{jk} \longrightarrow 0$ z $h \to 0$. Sledi:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} (D_j D_k f)(a) h_j h_k + \sum_{j,k=1}^{n} \eta_{jk} h_j h_k.$$

Označimo $A_{jk} = (D_j D_k f)(a)$, $A_{jk} = A_{kj}$ (simetrične matrike zaradi zveznosti v $\mathcal{C}^2$).

Izraz $\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk} h_j h_k = Q(h)$ $(= h^T A h$ - kvadratne forme$)$,

$Q = \langle Ah, h\rangle$. Q se imenuje pozitivno definitna, če je $Q(h) > 0$, $h \neq 0$ (isto kot $A > 0$). Q se imenuje negativno definitne, če je $Q(h) < 0$, $h \neq 0$ (isto kot $A < 0$).

Izrek. Naj bo $f \in \mathcal{C}^2(G)$, G odprta v $\mathbb{R}^n$. Naj bo $a \in G$ kritične točka za f, t.j. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ $\forall i$.

Če je $Q(h) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) h_j h_k$ (Hesse-jeva forma f v točki a) pozitivno definitna, ima f v a lokalni minimum. Če je $Q(h)$ negativno definitne, ima f v a lokalni maksimum (strogi ~). Lokalnega ekstrema ni, če Q ni definitna (zavzame tako pozitivne kot negativne vrednosti).

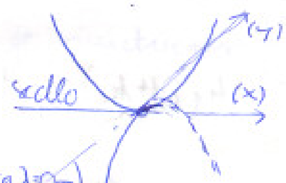
6.11.2003

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{df(a)h}_{\substack{0 \\ a \text{ kritične}}} + \frac{1}{2}Q(h) + \underbrace{\eta(h)}_{\text{ostanek}}, \quad \eta(h) = \sum \eta_{jk}(h) h_j h_k,$$

$\lim_{h\to 0} \eta_{jk}(h) = 0$ oz. $\eta(h) = o(|h|^2)$

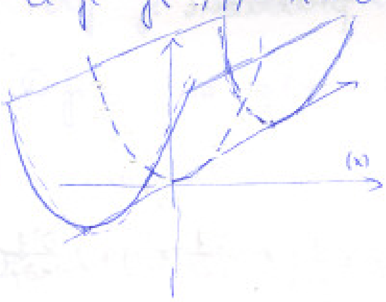
Primer. $n = 2$. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\frac{1}{2}Q(h_1,h_2) = h_1^2 - h_2^2 = f(h_1,h_2)$

Ni ekstrema.



$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ ... pospl. sedla (za $\lambda > 0$ $\cup$, za $\lambda < 0$ $\cap$, za $\lambda = 0$ —)

Če je $f(x,y)=x^2+0\cdot y^2$



→ v smeri y je premica, v x parabola, ekstrema ni

DOKAZ. Predpostavimo, da je $Q(h)$ pozitivno definitna.

$h=(h_1,\dots,h_n)=r\cdot y$, kjer je $r=\sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2}=|h|$, $y=\frac{h}{|h|}=$
$=(y_1,\dots,y_n)$, $|y|^2=y_1^2+\dots+y_n^2=1$ (y leži na enotski sferi v $\mathbb{R}^n$).

$$f(a+h)=f(a)+\tfrac{1}{2}Q(ry)+\sum \eta_{jk}(ry)\,ry_j\,ry_k=$$
$$=f(a)+\underbrace{r^2}_{>0 \text{ za } h\neq 0}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}Q(y)}_{\geq\frac{m}{2}}+\sum_{j,k=1}^{n}\eta_{jk}(ry)\,y_ky_j\Big).$$

Ker je Q pozitivno definitna, je $Q(y)$ pozitivna za $\forall y$ v enotni sferi. Označimo $m=\min\limits_{|y|=1}Q(y)>0$, ker je sfera kompaktna (ni 0, ker zavzame funkcija na k.m. max. in min.)

Ko gre $r\to 0$, gre $\eta(ry)\to 0$. $\left|\sum\eta_{jk}(ry)y_jy_k\right|\leq$ ← trikotniška neenakost

$\left|\sum\eta_{jk}(ry)\right|\left|y_jy_k\right|\leq$ (≤ 1 na sferi) $\left|\sum\eta_{jk}(ry)\right|<\frac{m}{4}$, če je $r>0$ dovolj majhen (ker $\eta_{jk}(ry)\to 0$).

Potem je $\frac{1}{2}Q(y)+\sum\eta_{jk}(ry)y_ky_j\geq\frac{m}{4}$ za dovolj majhen $|h|$.

Za vse take h je potem $f(a+h)-f(a)\geq\frac{m}{4}\cdot r^2=\underbrace{\frac{m}{4}}_{>0}\underbrace{|h|^2}_{>0}$,

kjer je $m=\min\limits_{|y|=1}G(y)>0$ in je $f(a+h)-f(a)>0$. Zato ima f lokalni minimum v a.

Dokaz za negativno definitno $Q(h)$ je analogen.

Opomba. Z linearno zamenjavo koordinat lahko Hesse-ovo formo $Q(h)$ diagonaliziramo.

sk. pr. v $\mathbb{R}^n$, B Hesse-jeva matrika

$Q(h)=\langle Bh,h\rangle$, kjer je $B=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(a)\right]_{j,k=1,\dots,n}$ $n\times n$ matrika.

Naj bo $h=A\cdot y$, kjer je A neka $n\times n$ matrika, $y=(y_1,\dots,y_n)$.

$Q(h)=\langle Bh,h\rangle=\langle BAy,Ay\rangle=\langle A^TBAy,y\rangle$. B je simetrična matrika, iz LA vemo, da se da diagonalizirati: $\exists A$, da je $A^TBA=\Lambda$ diagonalna $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}$, λ_j lastne vrednosti B in $\lambda_j\in\mathbb{R}$.

Torej je $Q(h) = \langle \Lambda y, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2$.

Definiramo $g(y) := f(a + \underbrace{Ay}_{h}) = f(a) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 + \text{ostanek}$.

Kako vidimo, kdaj je $Q(h)$ pozitivno (negativno) definitna?

__Lema.__ Kvadratična forma $Q(h,k) = \alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2$ z matriko $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$ je pozitivno definitna natanko tedaj, ko je $\alpha > 0$ in $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ in je negativno definitna natanko tedaj, ko je $\alpha < 0$ in $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$. Če je $\alpha\gamma - \beta^2 < 0$, ima forma eno pozitivno in eno negativno lastno vrednost.

__DOKAZ.__ $Q(h,k) = \alpha\left(h + \frac{\beta}{\alpha}k\right)^2 + \underbrace{\left(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)}k^2$

$$Q(h,k) = \alpha\left(h + \frac{\beta}{\alpha}k\right)^2 + (\alpha\gamma - \beta^2)k^2 \cdot \frac{1}{\alpha}$$

Recimo, da je $\alpha > 0$ in $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$, potem je $Q(h,k) > 0$, za $(h,k) \neq (0,0)$.

Naj bo $Q(h,k) > 0$ za $\forall (h,k) \neq (0,0)$. Izberemo $k = 0, h = 1$. Potem je $Q(1,0) = \alpha > 0$ in za $h = -\frac{\beta}{\alpha}, k = 1$ $Q(h,k) =$

$$= \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\alpha} > 0 \text{ in } \alpha > 0, \text{ torej } \alpha\gamma - \beta^2 > 0.$$

Ogledamo si še primer $\alpha = 0$. $Q(h,k) = k(2\beta h + \gamma k)$ in $Q(h,0) = 0$, torej Q ni definitna. ∎

__Posledica.__ Če ima C^2 funkcija $f(x,y)$ kritično točko (a,b), potem velja:

(1) če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ in $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2}_{D\ \text{(Hesse-jeva det.)}}$, ima f lokalni minimum v (a,b)

(2) če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ in $D > 0$, ima f lokalni maksimum v (a,b)

(3) če je $D < 0$, ekstrema ni

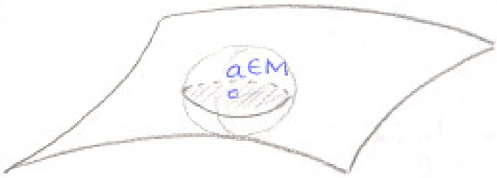
__Opomba.__ Namesto $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ lahko vzamemo tudi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

V več spremenljivkah:

$$n\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n}(a,b) & \\ & & \ddots \end{bmatrix}}_{n}\right. \quad \text{Hesse-jeva matrika}$$

Če so vsi glavni minorji pozitivni, je pozitivno definitna (brez dokaza).

VEZANI EKSTREMI



ploskev M v $\mathbb{R}^3$ (ali v $\mathbb{R}^n$)

f funkcija razreda $\mathcal{C}^2$, definirana na neki odprti množici, ki vsebuje dano ploskev

Iščemo točke $a \in M$, v katerih ima funkcija $f|_M$ lokalni ekstrem v a.

Definicija. $f|_M$ ima lokalni minimum v točki $a \in M$, če obstaja taka (majhna) krogla $U \subset \mathbb{R}^n$, da velja: $f(x) \geq f(a)$ $\forall x \in M \cap U$.

Podobno definiramo strogi l.m. in oba maksimuma.

Pravimo, da ima f v $a \in M$ vezani ekstrem, t.j. x je "vezana" na ploskev M.

Definicija. Podmnožica $M \subset \mathbb{R}^n$ je podmnogoterost dimenzije $m (\leq n)$, če za $\forall$ točko $a \in M$ obstaja krogla U v $\mathbb{R}^n$ s središčem v a in funkcije $g_1, g_2, \dots, g_d$ na U, kjer je $d = n - m$, ki imajo linearno neodvisne diferenciale (gradiente) v vsaki točki iz U, da je $M \cap U = \{x \in U \mid g_i(x) = 0 \ \forall i = 1, \dots, d\}$.

g_i imenujemo lokalne definicijske funkcije M.

Primeri. ① $g_1, \dots, g_d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearni funkcionali, lin. neodvisni. Množica skupnih ničel je neki linearen podprostor dimenzije $n - d = m$.

② Sfera v $\mathbb{R}^3$: $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $d = 1$,

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ... def. funkcija sfere

$\nabla g \neq 0$ v vsaki točki iz M, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$

GRADIENT g v x: $\nabla g(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x)\right)$.

$dg(x)h = \nabla g(x) \cdot h$ (sk. prod.)

11. 11. 2003

Če je N mnogoterost, $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, a točka, potem je vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ gradient funkcije f v točki a in je pravokoten na tangentni podprostor $T_a N$.

M, ki je lokalno določena z $g_i(x_1, \dots, g_n) = 0$, $i = 1, \dots, m$ je mnogoterost, če ima maksimalen rang

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

t.j. da so gradienti funkcij $g_1, \dots, g_m$ linearno neodvisni.

Če bi vzeli pot Ψ v M skozi a, bi morali za pogoj na $\Psi'(0)$ ponoviti prejšnje sklepanje za $g_1, \dots, g_m$, in bi dobili, da je $\Psi'(0)$ hkrati pravokoten na vse gradiente $(\operatorname{grad} g_1)(a), \dots, (\operatorname{grad} g_m)(a)$.

T_aM bo torej podprostor v $\mathbb{R}^n$, pravokoten hkrati na vse gradiente.

<u>Propozicija.</u> Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ in naj bo $P \subset \mathbb{R}^n$ linearen podprostor. Naj velja: $x \perp P \Rightarrow x \perp a$. Tedaj je $a \in P$.

<u>DOKAZ.</u> Pišimo $a = a_P + \tilde{a}$, kjer je $a_P \in P$, $\tilde{a} \perp P$. (po izreku o projekciji). Tedaj je $\tilde{a} \perp P$, torej $\tilde{a} \perp a$.

algebra (naredis Gram-Schmidt-a)

$\langle \tilde{a}, a \rangle = \langle \tilde{a}, a_P \rangle + \langle \tilde{a}, \tilde{a} \rangle \Rightarrow \langle \tilde{a}, \tilde{a} \rangle = 0 \Rightarrow \tilde{a} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = a_P \Rightarrow a \in P$. ■

Iščemo lokalni ekstrem gladke funkcije $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ pri dodatnih pogojih $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ $(*)$, kjer so funkcije $g_1, \dots, g_m$ gladke (razreda $\mathcal{C}^1$).

<u>Primer.</u> Poišči kandidate za točke, v katerih nastopi lokalni ekstrem funkcije $f(x, y, z) = x^2 - 3xy^3 + y^4 - yz^2$ pri pogoju $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Zanima nas, kdaj ima f lokalni ekstrem v $a \in \mathbb{R}^n$ ob pogoju $(*)$, t.j. $g_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = g_m(a_1, \dots, a_n) = 0$.

<u>Opomba.</u> f ima <u>vezani lokalni minimum</u>, če $\exists \delta > 0$, da je $f(x) \geq f(a)$ za vse $x = (x_1, \dots, x_n)$ za katere je $|x - a| < \delta$ in $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

<u>Izrek.</u> Naj ima $\mathcal{C}^1$ funkcija $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ vezan lokalni ekstrem ob pogojih $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ $(*)$ v točki a, kjer so $g_1, \dots, g_m$ gladke $\mathcal{C}^1$ funkcije v okolici a (in seveda $g_i(a) = 0$, $i = 1, \dots, m$), take da so $(\operatorname{grad} g_1), \dots, (\operatorname{grad} g_m)$ linearno neodvisni v tej okolici (t.j. $(*)$ podaja mnogoterost). Tedaj obstajajo $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, da je a stacionarna točka funkcije $F = f - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_m g_m$.

<u>DOKAZ.</u> $(*)$ določa mnogoterost M, t.j. če je naša okolica $\mathcal{U}$, je
$M = \{ x \mid g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0, x \in \mathcal{U} \}$ mnogoterost.

Naj bo h poljuben vektor iz T_aM. Tedaj obstaja gladka pot $t \mapsto \psi(t) \in M$, da je $\psi(0) = a$ in $\psi'(0) = h$. Ker je v a lokalni ekstrem funkcije $f|_M$, ima funkcija $t \mapsto f(\psi(t))$ lokalni ekstrem pri $t = 0$. Zato je $\frac{d}{dt}\left(f(\psi(t))\right)_t = 0$, t.j.
$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\psi(t)) \cdot \psi_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\psi(t))\, \psi_n'(t)\right)_t = 0$, t.j.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n = 0,$$

$$\langle (\operatorname{grad} f)(a), h \rangle = 0.$$

Dobili smo: za $\forall h \in T_aM$ je $h \perp (\operatorname{grad} f)(a)$.

Ker je T_aM natanko podprostor vseh vektorjev, pravokotnih na $(\operatorname{grad} g_1)(a), \dots, (\operatorname{grad} g_m)(a)$, sledi: $h \perp (\operatorname{grad} g_j)(a)\ \forall j \Rightarrow h \perp \operatorname{grad} f$. Po propoziciji sledi, da je $(\operatorname{grad} f)(a)$ linearna kombinacija $(\operatorname{grad} g_1)(a), \dots, (\operatorname{grad} g_m)(a)$, t.j.

$$(\operatorname{grad} f)(a) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\operatorname{grad} g_j)(a),$$

oz.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(a) = 0, \quad 1 \le k \le n,$$

torej je a res kritična točka funkcije $F = f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$. ∎

<u>Opomba</u>. Premislek ne velja, če gradienti niso linearno neodvisni. Tedaj je množica skupnih rešitev $(*)$ lahko zelo grda.

Števila $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ imenujemo Lagrange-ovi multiplikatorji.

<u>Lagrange-ova metoda za iskanje kandidatov</u>: tvorimo $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \dots - \lambda_m g_m$ in poiščemo stacionarne točke F. $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ $(1 \le i \le n)$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i = 0$ $(1 \le i \le m)$.
Dobimo $n+m$ enačb za $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Če je $(a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ rešitev, je $(a_1, \dots, a_n)$ kand. za lokalni ekstrem za F pri $(*)$.

<u>Primer</u>. $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2$ pri $x + y = 1$.

$g(x,y) = x + y - 1 = 0$, $(\operatorname{grad} g) = (1,1) \neq 0$

$F(x,y) = F(x,y,\lambda) = -x^2 - y^2 + 2 - \lambda x - \lambda y + \lambda$

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -2x - \lambda \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y - \lambda \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x - y + 1$

$$\left.\begin{array}{l} -2x - \lambda = 0 \\ -2y - \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \tfrac{1}{2} = y \text{ je edini kandidat.}$$

Primer. $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$, $x^2+y^2+z^2 = 4$, $x+y+z=0$.

Doma: gradienta sta lin. neodvisna.

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^3+z^4 - \lambda_1(x^2+y^2+z^2-4) - \lambda_2(x+y+z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 4z^3 - 2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x^2+y^2+z^2-4 = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x+y+z = 0.$$

II. INTEGRALI S PARAMETROM

(Zveznost, odvajanje in integriranje integralov s parametrom)

Za funkcijske vrste smo dokazali izreke tipa: f_n zvezne na $[a,b]$ in vrsta enakomerno konvergira, je $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zvezna na $[a,b]$. Zdaj bi radi Σ zamenjali z $\int$. Kdaj je $x \mapsto \int_p^q f(x,t)dt$ zvezna na $[a,b]$? (odvedljiva? odvod? ...) Splošnje: spreminjamo še zgornje meje $G(x,u,w) = \int_u^w f(x,t)\,dt$.

Definicija. $X \subset \mathbb{R}^n$ je lokalno zaprta množica, če za $\forall x \in X \ \exists r > 0$, da je $X \cap \bar{K}(x,r)$ zaprta množica v $\mathbb{R}^n$.

Primeri. (a) Vsaka zaprta množica je lokalno zaprta.

(b) Vsaka odprta množica je lokalno zaprta.

(c) $X = Y^{odp} \cap Z^{zap} \Rightarrow X$ je lokalno zaprta

Izrek. Naj bo I enak $[a,b]$ in X lokalno zaprta množica v $\mathbb{R}^n$ in $f: I \times X \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je $G: X \times I \times I \to \mathbb{R}$, definirana kot

$$G(x,u,w) = \int_u^w f(t,x)\,dt,$$

zvezna.

13.11.2003

DOKAZ. Naj bo $(x_0,u_0,w_0) \in X \times I \times I$. Če je tudi $(x,u,w) \in X \times I \times I$, je $|G(x,u,w) - G(x_0,u_0,w_0)| = \left| \int_u^w f(t,x)dt - \int_{u_0}^{w_0} f(t,x_0)dt \right| =$

$$= \left| \int_{u_0}^{w_0} (f(t,x) - f(t,x_0))dt + \int_u^{u_0} f(t,x)\,dt + \int_{w_0}^{w} f(t,x)\,dt \right| \leq \left| \int_{u_0}^{w_0} \underbrace{(f(t,x)-f(t,x_0))dt}_{A} \right| +$$

$$+ \underbrace{\left| \int_u^{u_0} f(t,x)dt \right|}_{B} + \underbrace{\left| \int_w^{w_0} f(t,x)\,dt \right|}_{C}.$$

Naj bo $r > 0$, tak da je $X \cap \overline{K(x_0,r)}$ zaprta v $\mathbb{R}^n$.