Primer. $f(x,y,z) = x^2+y^3+z^4$, $x^2+y^2+z^2 = 4$, $x+y+z=0$.

Doma: gradienta sta lin. neodvisna.

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^3+z^4 - \lambda_1(x^2+y^2+z^2-4) - \lambda_2(x+y+z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 4z^3 - 2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x^2+y^2+z^2-4 = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x+y+z = 0.$$

II. INTEGRALI S PARAMETROM

(Zveznost, odvajanje in integriranje integralov s parametrom)

Za funkcijske vrste smo dokazali izreke tipa: f_n zvezne na $[a,b]$ in vrsta enakomerno konvergira, je $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zvezna na $[a,b]$. Zdaj bi radi Σ zamenjali z $\int$. Kdaj je $x \mapsto \int_\beta^\ell f(x,t)dt$ zvezna na $[a,b]$? (odvedljiva? odvod? ...) Splošneje: spreminjamo še zgornje meje $G(x,u,w) = \int_u^w f(x,t)\,dt$.

Definicija. $X \subset \mathbb{R}^n$ je lokalno zaprta množica, če za $\forall x \in X\ \exists r > 0$, da je $X \cap \overline{K}(x,r)$ zaprta množica v $\mathbb{R}^n$.

Primeri. (a) Vsaka zaprta množica je lokalno zaprta.

(b) Vsaka odprta množica je lokalno zaprta.

(c) $X = Y^{odp} \cap Z^{zap} \Rightarrow X$ je lokalno zaprta

Izrek. Naj bo I enak $[a,b]$ in X lokalno zaprta množica v $\mathbb{R}^n$ in $f : I \times X \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je $G : X \times I \times I \to \mathbb{R}$, definirana kot

$$G(x,u,w) = \int_u^w f(t,x)\,dt,$$

zvezna.

13.11.2003

DOKAZ. Naj bo $(x_0,u_0,w_0) \in X \times I \times I$. Če je tudi $(x,u,w) \in X \times I \times I$, je

$$|G(x,u,w) - G(x_0,u_0,w_0)| = \left|\int_u^w f(t,x)dt - \int_{u_0}^{w_0} f(t,x_0)dt\right| =$$
$$= \left|\int_{u_0}^{w_0} (f(t,x)-f(t,x_0))dt + \int_u^{u_0} f(t,x)dt + \int_{w_0}^{w} f(t,x)dt\right| \le \underbrace{\left|\int_{u_0}^{w_0} (f(t,x)-f(t,x_0))dt\right|}_{A} +$$
$$+ \underbrace{\left|\int_u^{u_0} f(t,x)dt\right|}_{B} + \underbrace{\left|\int_w^{w_0} f(t,x)dt\right|}_{C}.$$

Naj bo $r > 0$, tak da je $X \cap \overline{K(x_0,r)}$ zaprta v $\mathbb{R}^n$.

To gre, ker je X lokalno zaprta. Množica $X \cap \overline{K(x_0, r)}$ je omejena in zaprta v $\mathbb{R}^n$, zato je kompaktna, na njej pa je f zvezna ($I \times [X \cap \overline{K(x_0, r)}]$ omejena in zaprta v $\mathbb{R}^{n+1}$, torej), torej je enakomerno zvezna. Naj bo $\varepsilon > 0$.
$\exists \delta > 0$, $\delta < r$, da za (t', x') in $(t'', x'') \in I \times [X \cap \overline{K(x_0, r)}]$, taka, da je $|t' - t''| < \delta$ in $|x' - x''| < \delta$, velja

$$|f(t'', x'') - f(t', x')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Če je $t = t'$, je $\forall x \in X$, $|x - x_0| < \delta$

$$|f(t, x) - f(t, x_0)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \quad a \leq t \leq b.$$

Potem je $A \leq \left|\int_{u_0}^{w_0} \frac{\varepsilon}{3(b-a)} dt\right| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \left|\int_{u_0}^{w_0} dt\right| = \frac{\varepsilon}{3(b-a)} |w_0 - u_0| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Zaradi kompaktnosti je $f|_{I \times [X \cap \overline{K(x_0, r)}]}$ omejena, t.j. $\exists M < \infty$, da je $|f(t, x)| \leq M$ za $\forall (t, x) \in I \times [X \cap \overline{K(x_0, r)}]$. Če je torej $|u - u_0| < \frac{\varepsilon}{3M}$, je $B \leq \frac{\varepsilon}{3M} M = \frac{\varepsilon}{3}$. Podobno $C \leq M |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{3}$.
Če je $|x - x_0| < \delta$, $|u - u_0|, |w - w_0| < \frac{\varepsilon}{3M}$, je $|G(x, u, w) - G(x_0, u_0, w_0)| < \varepsilon$.
Torej je G res zvezna v (x_0, u_0, w_0). ∎

Posledica. Naj bo X lokalno zaprta podmnožica od $\mathbb{R}^n$ in $f : [a, b] \times X \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj je

$$F(x) = \int_a^b f(t, x)\, dt$$

zvezna funkcija na X.

Izrek. Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ odprt interval, $f : [a, b] \times J \to \mathbb{R}$ zvezna. Naj za $\forall (t, x) \in [a, b] \times J$ obstaja $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ in $(t, x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ zvezna funkcija na $[a, b] \times J$. Tedaj velja:

(a) $x \mapsto F(x) = \int_a^b f(t, x)\, dt$ je v $\mathcal{C}^1(J)$ in je $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, dt$, $(x \in J)$

(b) za poljubni $\alpha, \beta : J \to [a, b]$ je $G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t, x)\, dt$ v $\mathcal{C}^1(J)$ in velja $G'(x) = f(\beta(x), x) \beta'(x) - f(\alpha(x), x) \alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, dt$.

DOKAZ. (a) $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, dt \right| = \left| \frac{1}{h} \int_a^b (f(t, x+h) - f(t, x))\, dt - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, dt \right| =$

$= \left| \int_a^b \left((f(t, x+h) - f(t, x)) \frac{1}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right) dt \right| \quad \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x + \vartheta(h) h) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| dt.$

Pokažemo, da je integrand poljubno majhen, če je h dovolj majhen, in sicer za vse t, x fiksen.

Izberimo $\eta > 0$, da je $[x-\eta, x+\eta] \subset J$. Funkcija $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ je po predpostavki zvezna, torej je zvezna tudi na kompaktni množici $[a,b]\times[x-\eta, x+\eta]$, torej je enakomerno zvezna. $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$, da je za $t', t'' \in [a,b]$, $x', x'' \in [x-\eta, x+\eta]$, $|t'-t''|, |x', x''| < \delta$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t', x') - \frac{\partial f}{\partial x}(t'', x'')\right| < \varepsilon.$$

Torej za $t = t' = t''$ in $|h| < \delta$, $|h| < \eta$ velja

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x+\vartheta(t,h))h - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| < \varepsilon,$$

za $\forall\, t \in [a,b]$, saj je $\vartheta(t,h) \in (0,1)$ in zato $|\vartheta(t,h)h| < |h| < \delta$.

Torej je $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt\right| < \varepsilon\,(b-a)$, če je $|h|<\delta$, $|h|<\eta$.

Potem je $F'(x) = \lim \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$.

Ker je $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ po predpostavki zvezen, je po zgornjem izreku $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$ zvezna na J, torej je F razreda $\mathcal{C}^1(J)$.

(b) Definiramo $H : J \times [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$, $H(x,u,w) = \int_u^w f(t,x)\,dt$.

Po prvem delu je $H(x\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,u,w) = \int_u^w \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$. Po osnovnem izreku int. računa (je $\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x \varphi(t)\,dt = \varphi(x)$ (φ zvezna)) je $\frac{\partial H}{\partial w} = f(w,x)$, $\frac{\partial H}{\partial u} = -f(u,x)$. Vsi ti odvodi so zvezni. Torej je H razreda $\mathcal{C}^1$ na $J\times[a,b]\times[a,b]$. $G(x) = H(x, (x), \beta(x))$, torej je $G'(x) = \frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial u}\alpha'(x) + \frac{\partial H}{\partial w}\beta'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial f/\partial x\,(t,x)\,dt + f(\beta(x),x)\beta'(x) - f(\alpha(x),x)\alpha'(x)$. ■

Posledica. Naj bo G odprta v $\mathbb{R}^n$, $f : [a,b]\times G \to \mathbb{R}$ zvezna. Naj za $\forall$ $(t,x) \in [a,b]\times G$ obstajajo $\frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x)$, $j = 1,\dots,n$ in naj bodo zvezni na $[a,b]\times G$. Tedaj je $x \mapsto F(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$ v $\mathcal{C}^1(G)$ in velja

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x)\,dt, \quad j = 1,\dots,n.$$

Izrek. Naj bo f zvezna na $[a,b]\times[c,d]$ in $F(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$. $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ je zvezna. Tedaj je $\int_c^d F(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d F(t,x)\,dx\right] dt$, t.j.

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(t,x)\,dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(t,x)\,dx\right) dt,$$

kar običajno pišemo: $\int_c^d dx \int_a^b f(t,x)\,dt = \int_a^b dt \int_c^d f(t,x)\,dx$.

<u>Opomba.</u> $\int_c^d [\int_a^b f(t,x)dt]dx = \int_c^d dx [\int_a^b f(t,x)dt]$ in $\int_a^b dt \int_c^d f(t,x)dx$ imenujemo dvakratna integrala. Izrek torej pove, da sta za f, zvezno na zaprtem pravokotniku $[a,b]\times[c,d]$, enake.

DOKAZ. Naj bo $\Phi(y) = \int_a^y F(x)dx$, $g(t,y) = \int_c^y f(t,x)dx$, $\Psi(y) = \int_a^b g(t,y)dt$.

Tedaj je $\Phi'(y) \equiv F(y)$ (osnovni izrek I.R. $- \frac{d}{dy}\int_c^y F(x)dx = F(y)$).

(+) $\frac{\partial g}{\partial y}(t,y) = f(t,y)$ (o. i. I.R.). Ker je $\frac{dg}{dy}$ zvezna (f je zvezna), je po izreku funkcija Ψ razreda $\mathcal{C}^1$, saj je $\Psi'(y) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(t,y)dt$.

$\Psi'(y) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(t,y)dt \overset{(+)}{=} \int_a^b f(t,y)dt = F(y) = \Phi'(y)$ za vse y.

Torej je $\Psi - \Phi$ konstanta. Pri $y=c$, je $\Psi(c)=0$ in $\Phi(c)=0$.

Potem je $\Psi \equiv \Phi$ za vse y. Pri $y=d$ je

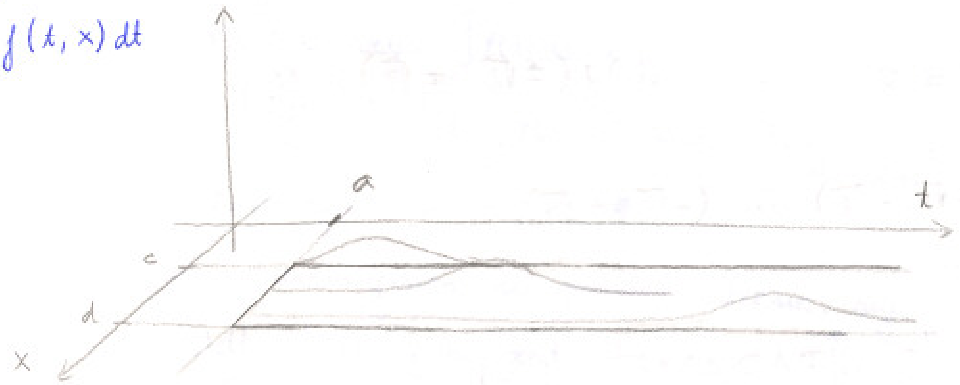
$$\int_c^d F(x)dx = \int_a^b g(t,d)dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dx\right)dt. \qquad \blacksquare$$

Izlimitirani (posplošeni) integrali s parametrom

Ogledali si bomo integrale oblike $\int_a^\infty f(t,x)dt$. Kdaj je zvezen, odvedljiv, kako izračunati odvod?

18. 11. 2003

$\int_a^\infty f(t,x)dt$

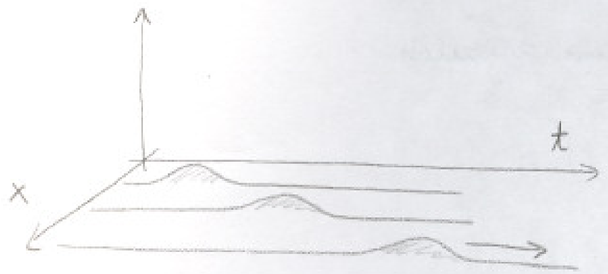


Naj bo X poljubna množica in $f:[a,\infty)\times X \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je za vsak $x\in X$ zvezna v prvi spremenljivki. Naj za vsak $x \in X$ obstaja $\int_a^\infty f(t,x)dt$ $\left(= \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(t,x)dt\right)$. Pravimo, da je $\int_a^\infty f(t,x)dt$ <u>enakomerno konvergenten</u> (na X), če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $b \in [0,\infty)$, da za vsak $c > b$ velja

$$\left|\int_a^\infty f(t,x)dt - \int_a^c f(t,x)dt\right| = \left|\int_c^\infty f(t,x)dx\right| < \varepsilon$$

za vse $x \in X$.

Opomba. Važno je torej, da je mogoče b izbrati neodvisno od x.



Opomba. To je podobno kot pri vrstah. Vrsta $\sum f_n(x)$ enakomerno konvergira k $f(x)$, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$, da je $\left|f(x) - \sum_{n=1}^{m} f_n(x)\right| < \varepsilon$ za $\forall m \geq n_0$, $\forall x \in X$.

Opomba. Pri vrstah smo imeli Weierstrassov M-test za enakomerno konvergenco: če je $|f_n(x)| \leq t_n$, $x \in X$ in če $\sum t_n$ konvergira, tedaj $\sum f_n(x)$ konvergira enakomerno na X.

Izrek. Naj bo X množica, $f: [a,\infty) \times X \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je zvezna za $\forall x \in X$. Naj obstaja $\varphi: [a,\infty) \to \mathbb{R}^+$, zvezna, da je $|f(t,x)| \leq \varphi(t)$, $\forall a, t \leq a < \infty$ in vse $x \in X$. Naj $\int_a^\infty \varphi(t)\,dt$ konvergira. Tedaj $\int_a^\infty f(t,x)\,dt$ konvergira enakomerno na X.

DOKAZ. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker $\int_a^\infty \varphi(t)\,dt$ konvergira, obstaja $b < \infty$, tak da $\forall c > b$ velja $\int_c^\infty \varphi(t)\,dt < \varepsilon$. Torej je $\left|\int_a^\infty f(t,x)\,dt - \int_a^c f(t,x)\,dt\right| = \left|\int_c^\infty f(t,x)\,dt\right| \leq \int_c^\infty \varphi(t)\,dt < \varepsilon$. Torej $\int_a^\infty f(t,x)\,dt$ res enakomerno konvergira za $x \in X$. ■

Opomba. Sama konvergenca ni problematična, saj je $f(t,x) < \varphi(t)$ in $\int_a^\infty \varphi(t)\,dt$ konvergira, zato konvergira $\int_a^\infty |f(t,x)|\,dt$, zato toliko bolj $\int_a^\infty f(t,x)\,dt$.

Izrek. Naj bo $X \in \mathbb{R}^n$ lokalno zaprta množica, naj bo $f: [a,\infty) \times X \to R$ zvezna funkcija in naj integral $\int_a^\infty f(t,x)\,dt$ konvergira lokalno enakomerno na X (t.j. za $\forall y \in X$ obstaja $r > 0$, da $\int_a^\infty f(t,x)\,dt$ konvergira enakomerno na $\{x \in X : |x-y| < r\}$).

Tedaj je $x \longmapsto \int_a^\infty f(t,x)\,dt$ zvezna funkcija na X.

DOKAZ. Naj bo $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Zaradi lokalne enakomerne konvergence obstajata $r > 0$ in $c < \infty$, da je

$$\left| \int_a^\infty f(t,y)\,dt - \int_a^c f(t,y)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

za vse $y \in X$, $|y-x| < r$. Po že dokazanem izreku je $y \longmapsto \int_a^c f(t,y)\,dt$ zvezna funkcija na X, zato obstaja $\sigma > 0$, da je $\left| \int_a^c f(t,y)\,dt - \int_a^c f(t,x)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ za $y \in X$, $|y-x| < \sigma$. Če je torej $|y-x| < \min\{r, \sigma\}$, je

$$\left| \int_a^\infty f(t,y)\,dt - \int_a^\infty f(t,x)\,dt \right| \le \left| \int_a^\infty f(t,y)\,dt - \int_a^c f(t,y)\,dt \right| + \left| \int_a^c f(t,y)\,dt - \int_a^c f(t,x)\,dt \right| +$$
$$+ \left| \int_a^c f(t,x)\,dt - \int_a^\infty f(t,x)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \ \blacksquare$$

Izrek. Naj bo $f : [a,\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Če je integral $F(x) = \int_a^\infty f(t,x)\,dt$ enakomerno konvergenten za $x \in [c,d]$, tedaj je (F zvezna na $[c,d]$) $\int_c^d F(x)\,dx = \int_c^d dx \int_a^\infty f(t,x)\,dt = \int_a^\infty dt \int_c^d f(t,x)\,dx$.

Opomba. Vrstni red integriranja lahko torej zamenjamo.

DOKAZ. Za $\forall b > a$ definirajmo $F_b(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je integral enakomerno konvergenten za $x \in [c,d]$, obstaja $b < \infty$, da je $|F(x) - F_{b'}(x)| < \varepsilon$ za vse $x \in [c,d]$, $b' > b$. To pomeni, da je $\lim_{b\to\infty} F_b(x) = F(x)$, kjer je konvergenca enakomerna na $[c,d]$.

Izberimo zaporedje $b_n \nearrow \infty$. Tedaj je $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_{b_n}(x)$ enakomerna na $[c,d]$. Po znanem izreku je $\lim_{n\to\infty} \int_c^d F_{b_n}(x)\,dx = \int_c^d F(x)\,dx$. Torej je $\int_c^d F(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_c^d F_{b_n}(x)\,dx =$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_c^d dx \int_a^{b_n} f(t,x)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} dt \int_c^d f(t,x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} \left(\int_c^d f(t,x)\,dx \right) dt$$
$$= \int_a^\infty \left(\int_c^d f(t,x)\,dx \right) dt = \int_a^\infty dt \int_c^d f(t,x)\,dx. \ \blacksquare$$

Izrek. Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ odprt interval in funkcija $f : [a,\infty) \times J \to \mathbb{R}$ zvezna. Naj bo f parcialno odvedljiva na x in naj bo $\frac{\partial f}{\partial x} : [a,\infty) \times J \to \mathbb{R}$ zvezna. Naj bo $F(x) = \int_a^\infty f(t,x)\,dt$ in naj konvergira za $\forall x \in J$ in

$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$ lokalno enakomerno konvergira na J. Tedaj je $F \in \mathcal{C}^1(J)$ in velja $F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$.

Opomba. To pomeni $\frac{\partial}{\partial x}\int_a^\infty f(t,x)\,dt = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,x)\,dt$ – analogno izreku o vrstah.

DOKAZ. Naj bo $G(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$, $\forall x \in J$. Naj bo $y \in J$. Zaradi lokalne enakomerne konvergence obstaja okolica od y, v kateri funkcije $G_b(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$ enakomerno konvergirajo k $G(x)$, $b \to \infty$.

$F_b(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$. Vemo: $F_b'(x) = G_b(x)$ $\forall x \in J$. Naj bo $b_n \to \infty$. Vemo: $F_{b_n}(x) \to F(x)$ $\forall x \in J$ in $F_{b_n}'(x) \to (x)$ enakomerno v okolici točke y. Zaporedje $F_{b_n}(x)$ konvergira, $F_{b_n}'(x)$ enakomerno konvergira. Po lani dokazanem izreku o vrstah in zaporedjih je $G(x) = F'(x)$, $\forall x$ v okolici y. Ker je y poljuben, je $G(x) = F'(x)$ $\forall x \in J$, torej je $F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$. ■

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^\infty f(t,x)\,dt = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$$

Posledica. Naj bo G odprta množica v $\mathbb{R}^n$ in $f: [a,\infty) \times G \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Naj obstajajo $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ povsod na $[a,\infty)\times G$ in naj bodo zvezne funkcije, $i = 1, \dots, n$.
$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)\,dt$ konvergira lokalno enakomerno na G za vse i, $1 \le i \le n$, tedaj je $F(x) = \int_a^\infty f(t,x)\,dt$ razreda $\mathcal{C}^1(G)$ in je $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)\,dt$, $i = 1, \dots, n$.

20.11.2003

Eulerjeva funkcija gama

Oglejmo si $F(n) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt$, $n \in \mathbb{N}$. Konvergenca tu ni problem

$$F(n) = \lim_{A\to\infty}\int_0^A t^n e^{-t}\,dt$$

Integriramo per partes: $t^n = u$, $e^{-t}dt = dv$, $nt^{n-1} = du$, $-e^{-t} = v$.

$$\int_0^A t^n e^{-t}\,dt = \left[-t^n e^{-t}\right]_0^A + n\int_0^A t^{n-1}e^{-t}\,dt = -A^n e^{-A} + n\int_0^A t^{n-1}e^{-t}\,dt.$$

Nadaljujemo podobno: $\dots + n(n-1)\cdots 1\int_0^A e^{-t}\,dt \Rightarrow \lim_{A\to\infty}\Big[\underbrace{\cdots -A^n e^{-A}\cdots}_{\text{obstajajo po L'Hospitalu}} + \underbrace{\left[-e^{-t}\right]_0^A}_{\text{obstaja}}\Big]$

torej $\int_0^\infty t^n e^{-t}dt$ obstaja in je $F(n)$ dobro definirana.

$$F(n) = \lim_{A\to\infty}\int_0^A t^n e^{-t}dt = \lim_{A\to\infty}\underbrace{[-t^n e^{-t}]_0^A}_{0} + n\lim_{A\to\infty}\int_0^A t^{n-1}e^{-t}dt =$$

$$= nF(n-1).$$

Torej je $F(n) = nF(n-1)$, $F(0) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}\big|_0^\infty = 1$, $F(1) = 1$, $F(2) = 2, \dots, F(n) = n!$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad (\Gamma(x) = F(x-1))$$

Kot prej ugotovimo, da je F dobro definirana za $x > -1$ in je $F(x) = xF(x-1)$, $x > 0$, $F(x+1) = (x+1)F(x)$, $x > -1$.

<u>Definicija.</u> Za $x > 0$ definiramo Eulerjevo funkcijo gama s predpisom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

<u>Propozicija.</u> (i) $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(0,\infty)$ in $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial x^k}(t^{x-1}e^{-t})dt =$

$$= \int_0^\infty t^{x-1}(\log t)^k e^{-t}dt, \quad \forall x \in (0,\infty)$$

(ii) $\lim_{x\searrow 0}\Gamma(x) = +\infty$

(iii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0$

<u>DOKAZ.</u> (i) Dokažemo, da integral $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ lokalno enakomerno konvergira na $(0,\infty)$. Ogledamo si

$$\int_0^t t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Če je $x \geq a > 0$, je $|t^{x-1}e^{-t}| < t^{a-1}e^{-t}$ za $x \geq a$. Funkcija $t^{a-1}e^{-t}$ je integrabilna na $(0,1)$ (vemo od lani, saj je $a-1 > -1$, funkcija e^{-t} pa je zvezna pri $t=0$). To pomeni, da za $\forall a > 0$ $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ konvergira enakomerno za $x \geq a$. Gotovo torej lokalno enakomerno konvergira na $(0,\infty)$ (ker je a poljuben). Naj bo $b < \infty$, oglejmo si $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. Za $x \leq b$ je $|t^{x-1}e^{-t}| < t^{b-1}e^{-t}$ in ta funkcija je integrabilna na $[1,\infty)$. Zato je $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ ~~lokalno~~ enakomerno konvergenten na $(0,b)$ za $\forall b$. Torej je $\int t^{x-1}e^{-t}dt$

lokalno enakomerno konvergenten na $(0,\infty)$.

Sledi, da je Γ zvezna funkcija na $(0,\infty)$.

Podobno dokažemo, da je za $\forall n$ integral $\int_0^\infty t^{x-1}(\log t)^n e^{-t}\,dt$ lokalno enakomerno konvergenten.

Za $(0,1)$: $x \geq a \geq 0$ $\quad |t^{x-1}(\log t)^n| \leq t^{a-1}(\log t)^n$, ki je integrabilna, saj je za $0<b<a$ $\quad t^{a-1}(\log t)^n \leq t^{b-1}(\log t)^n t^{a-b}$.

Funkcija (za $a-b>0$) $t^{a-b}(\log t)^n$ je omejena v okolici 0 (po L'Hospitalu izračunamo limito in pokažemo, da je 0).

$$|t^{x-1}(\log t)^n e^{-t}| \leq \underbrace{t^{b-1}(\log t)^n t^{(a-b)}\cdot e^{-t}}_{\text{integr.}}, \quad x \geq a.$$

Torej $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n\,dt$ gotovo lokalno enakomerno konvergira.

Za $[1,\infty)$, $x<b$: $|t^{x-1}(\log t)^n e^{-t}| < \underbrace{t^{b-1}(\log t)^n e^{-t}}_{\text{integr.}}$. $\quad (\log t < t,\ t>1)$

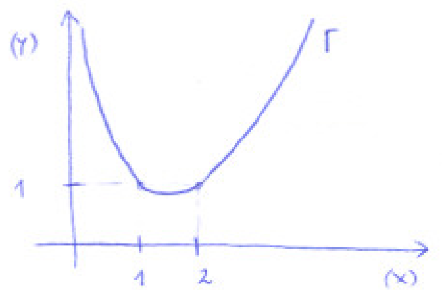
Torej je res $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(0,\infty)$ in velja formula (i).

(iii) Smo že pokazali.

(ii) Oglejmo si $\Gamma(x)$ za $x \searrow 0$: $\Gamma(x)x = \Gamma(x+1)$, torej je $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$. Pri $x\searrow 0$ gre $\Gamma(x+1)\to\Gamma(1)=1$, imenovalec gre proti 0. Torej gre $\Gamma(x)\to\infty$, $x\to 0$. ■

<u>Opomba</u>. Funkcija Γ ima tudi lastnost $\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x) = +\infty$.

$\Gamma(1)=1$, $\Gamma(2)=1$, $\Gamma(3)=2$, $\Gamma(n)=(n-1)!$



<u>Opomba</u>. Z relacijo $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $(x>0)$ definiramo lahko $\Gamma(x)$ tudi za $x<0$. $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, $-1<x<0$, $\quad \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}$, $-2<x<-1, \ldots$

25.11.2003

<u>Opomba</u>. (Eulerjeva funkcija beta)

<u>Definicija</u>. $x,y>0$, $\quad B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

Definicija je dobra, integral za $x,y\geq 1$ obstaja kot običajni, pri $0\leq x\leq 1$ in $0\leq y<1$ pa kot izlimitirani integral.

$B(x,y) = B(y,x)$

Izrek. $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$, $x,y>0$.

III. RIEMANNOV INTEGRAL V $\mathbb{R}^n$

(dvojni, trojni, ..., n-terni integral)

Osvežitev pojmov iz Analize 1

$[a,b]$ interval, f omejena na $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

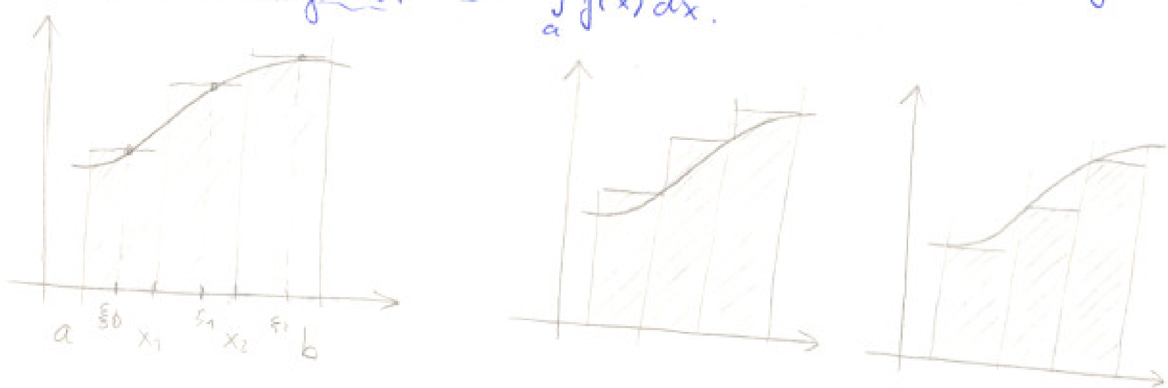
Riemannova vsota $\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$ (pri $f>0$ je to ploščina stopničastega lika pod grafom)

Riemannov integral (določeni integral) f na $[a,b]$:

Če obstaja I z lastnostjo: $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$, da za vsako delitev $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ in vsako izbiro točk $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, pri kateri je $|x_i - x_{i-1}| < \delta \ \forall i$ velja

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - I \right| < \varepsilon,$$

pravimo, da je f integrabilna na $[a,b]$ in I imenujemo njen Riemannov integral. $I = \int_a^b f(x)\,dx$.



Razvili smo še t.i. Darboux-jev integral: Naj bo dana delitev D, $D: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Naj bo $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$, $M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$. $s(D) = \sum m_i l_i$, $S(D) = \sum M_i l_i$.

$s = \sup\{s(D) \mid D \text{ delitev } [a,b]\}$, $S = \inf\{S(D) \mid D \text{ delitev } [a,b]\}$.

Če je $s = S$ rečemo, da je f integrabilna po Darboux-ju in imenujemo Darboux-jev integral. $J = s = S$

Dokazali smo, da je f RI natanko tedaj, ko je f ID, tedaj ...