KOMPLEKSNA ANALIZA

Kompleksna števila in funkcije

Kompleksna števila

$a+bi \quad a,b\in\mathbb{R}$, z oznaka

$Re\,(a+bi)=a$ realni del

$Im\,(a+bi)=b$ imag. del

Konjugiranje $\overline{a+bi}=a-bi$

$Re\,z=\frac{z+\bar z}{2}$

$Im\,z=\frac{z-\bar z}{2i}$

Absolutna vrednost $|z|=\sqrt{z\bar z}$

$|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$

$|zw|=|z|\cdot|w|$ $\qquad |z|=|\bar z|$

$|z+w|\le|z|+|w|$

$|z+w|\ge\big||z|-|w|\big|$

Argument

Naj $z=x+iy$, $r=|z|$

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

θ je argument kompl. števila $z\neq0$ določen je le do 2π natančno. Običajno ga izberemo med 0 in 2π

Pišemo $z=r\cos\theta+ir\sin\theta$

$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

Ker je $\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\dots$

$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\dots$

je torej

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$

$$= e^{i\theta}$$

saj je $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ (o tem kasneje - o vrstah v kompleksni)

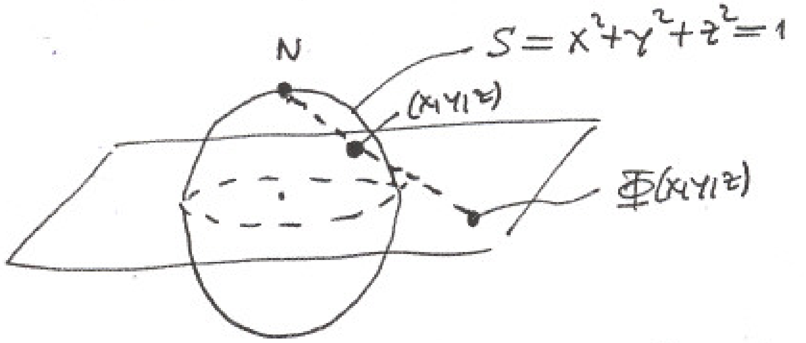
Pišemo torej

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

in zato

$$z = re^{i\theta} = |z| \cdot e^{i \arg z}$$

<u>Riemannova sfera, stereografska projekcija</u>



$N = (0,0,1)$

$$\Phi : S^2 \setminus N \to \mathbb{C} \qquad \Phi(x,y,z) = \frac{1}{1-z}(x+iy)$$

$$\Phi^{-1}(x_1 + ix_2) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2+1}(2x_1, 2x_2, x_1^2+x_2^2-1)$$

Φ je homeomorfizem.

<u>Kompaktificirana ravnina.</u> $\mathbb{C}$ je torej homeomorfna $S \setminus \{N\}$.
Kompaktificirana ravnina $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dodamo neskončno točko.
Želimo, da bi Φ zgoraj razširili do homeomorfizma $S \to \overline{\mathbb{C}}$. Zato za bazne okolice ∞ proglasimo zunanjosti dovolj velikih krogov.
Ravnini $\mathbb{C}$ s tako dodano točko ∞

pravimo kompaktificirana ravnina ali Riemannova sfera.

Nekaj opomb o topologiji

Glede topologije kompleksno ravnino lahko identificiramo z $\mathbb{R}^2$

Razdalja $d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$

Če pišemo $z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

je torej

$$d(z_1,z_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_2-y_1)^2} = d((x_1,y_1),(x_2,y_2))$$

v $\mathbb{R}^2$. $D(a,r)=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|<r\}$, $\overline{D(a,r)}=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|\le r\}$

V posebnem velja torej:

$z=\lim z_n$ če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $n_0>0$, da je $|z-z_n|<\varepsilon$ $(n\geq n_0)$. Če je $z_n=x_n+iy_n$ in $z=x+iy$ je $z=\lim z_n$ natanko tedaj ko je $x=\lim x_n$, $y=\lim y_n$.

Odprta množica $P\subset\mathbb{C}$ je *povezana* če je ne moremo zapisati kot unijo dveh disjunktnih ~~od~~ nepraznih odprtih množic. To je res natanko tedaj, ko lahko poljubni dve točki $z_1,z_2\in P$ povežemo s poligonsko črto, ki vsa leži v P. (dokaz morda na vajah)

Odprto povezano neprazno množico v $\mathbb{C}$ bomo imenovali *območje*.

Če je P poljubna odprta množica, se vsaka maksimalna povezana podmnožica imenuje *komponenta* P. Dve različni komponenti sta vedno disjunktni in največ števno jih je.

Operaciji $-$ in $|\ |$ sta zvezni

Funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je <u>zvezna</u> v $z_0 \in \Omega$ če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, čim je $|z - z_0| < \delta$.

Pišimo $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$. Ker je $\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2}$, $\operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}$ je f zvezna natanko tedaj, ko sta $\operatorname{Re} f$ in $\operatorname{Im} f$ zvezni.

Holomorfne funkcije

<u>Definicija</u> Naj bo Ω odprta množica v $\mathbb{C}$ in $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija. Naj bo $z_0 \in \Omega$ in naj

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

obstaja. Tedaj to limito imenujemo <u>odvod</u> funkcije f v točki z_0, ozn. ga z $f'(z_0)$.
Če $f'(z_0)$ obstaja za vsak $z_0 \in \Omega$, imenujemo f <u>holomorfna funkcija</u> (ali analitična funkcija) na Ω. Družino vseh holomorfnih funkcij na Ω označ. s $\mathcal{H}(\Omega)$.

<u>Opomba</u> Če je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ je $f + g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f \cdot g \in \mathcal{H}(\Omega)$, običajna pravila za odvajanje veljajo.

<u>Opomba</u> Kompozitum holo funkcij je holomorfna funkcija: Če je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(\Omega) \subset \Omega_1$, $g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ in $h = g \circ f$, je $h \in H(\Omega)$. Dokaz doma, kot za realne funkcije (ali za diferenciabilnost kompozita dif. preslikav)

Cauchy-Riemannove enačbe

IZREK Naj bo funkcija f holomorfna na odprti množici Ω. Tedaj, če pišemo

$$f = u + iw$$

$$f(z) = u(x,y) + i\,w(x,y) \qquad x+iy = z$$

imata realni funkciji u in w parcialne odvode 1. reda na Ω in velja

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}}$$

Cauchy-Riemannov sistem enačb.

Dokaz. Naj bo f v točki $z_0 = x_0 + iy_0$ odvedljiva v kompleksnem smislu. Tedaj je za $h \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+ih) - f(z_0)}{ih}$$

torej

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x_0+h,y_0) - u(x_0,y_0)}{h} + i\,\frac{w(x_0+h,y_0) - w(x_0,y_0)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x_0,y_0+h) - u(x_0,y_0)}{ih} + i\,\frac{w(x_0,y_0+h) - w(x_0,y_0)}{ih}\right] \end{aligned}\right\} (*)$$

torej

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial w}{\partial x}(x_0,y_0) =$$

$$= -i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial w}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Sledi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Opomba: Obstoj odvodov $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$ sledi iz obstoja limit $(*)$, ki sta obe enaki $f'(z_0)$.

~~nenciabilnost kompozita diferenciabilnih preslikav)~~

Primeri holo funkcij
$f(z)=c$
$f(z)=z^n \quad n\in\mathbb{N}$ } holo na $\mathbb{C}$
$f(z)=1/z$ je holo v $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Če je torej $f, g\in\mathcal{H}(\Omega)$ in $\Omega_0\subset\Omega$ odprta, kjer je $g(z)\neq 0$ $(z\in\Omega_0)$, je $\frac{f}{g}\in\mathcal{H}(\Omega_0)$.

Vrste s kompleksnimi členi

$z_1+z_2+z_3+\dots \qquad z_i\in\mathbb{C}$

Vrsta konvergira če konv. zap. delnih vsot $s_1=z_1$
$s_2=z_1+z_2$.
$\vdots$

Veljajo enaka pravila kot za vrste z real. členi, z enakimi dokazi:
$$\sum(z_n+w_n)=\sum z_n+\sum w_n$$
$$\sum\lambda z_n=\lambda\sum z_n$$

Vrsta $z_1+z_2+\dots$ se imenuje absolutno konvergentna, če konvergira $\sum|z_n|$. Če vrsta absol. konvergira, tedaj vrsta konvergira in njena vsota ni odvisna od vrstnega reda členov.
Konvergenčne kriterije pri vrstah s kompl. členi uporabljamo za absolutno konvergenco.

Funkcijske vrste

Tudi za funkcijske vrste (skompl. funkcijami) veljajo enaki zakoni kot za vrste z real. funkcijami.

Posebej omenimo:

Če je dana vrsta

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots \qquad (z \in D) \quad (*)$$

in če je $|u_i(z)| < M_i$ $(z \in D)$ za vse i

in če $\sum M_i$ konvergira,

tedaj vrsta $(*)$ enakomerno konvergira na (D).

Potenčne vrste

Kot v realnem, tudi tu velja

IZREK Naj bo dana potenčna vrsta

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots \qquad (1)$$

Obstaja R, $0 \le R \le \infty$, da vrsta (1) konvergira absolutno in enakomerno ~~na~~ vsakem $\overline{D(a,r)}$, $r < R$ in divergira če $z \notin \overline{D(a,R)}$.

Konvergenčni radij R je enak

$$\frac{1}{R} = \limsup |c_n|^{1/n}.$$

Dokaz je enak kot v realnem.

Def. Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ odprta množica in $f: \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija. Pravimo, da je mogoče v okolici $z_0 \in \Omega$ razviti f v potenčno vrsto, če obstajajo $r > 0$ ~~in~~ in $c_0, c_1, \ldots$ ~~da je~~ (seveda odvisni od z_0) da je

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \qquad (z \in D(z_0, r))$$

LEMA Naj bo

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad |z|<r$$

Tedaj je

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot c_n\cdot z^{n-1} \qquad |z|<r.$$

Dokaz. Ker je $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ je
$\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}=\limsup_{n\to\infty}|n\cdot c_n|^{1/n}$ zato
sta konvergenčna polmera vrst $\sum c_n z^n$
in $\sum n c_n\cdot z^{n-1}$ enaka. Torej vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$
gotovo konvergira na $|z|<r$. Označimo njeno
vsoto z $g(z)$. Naj bo $|w|<r$. Izberimo ρ, $|w|<\rho<r$.

Če $z\neq w$ je

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[\frac{z^n-w^n}{z-w}-n\cdot w^{n-1}\right].$$

Pri $n=1$ je izraz [ ] enak 0.

Ker je

$$(z-w)\left[z^{n-2}+2\cdot z^{n-3}w+\dots+(n-2)zw^{n-3}+(n-1)w^{n-2}\right]$$

$$=z^{n-1}+2z^{n-2}w+\dots+(n-2)\cdot z^2w^{n-3}+(n-1)zw^{n-2}$$

$$-z^{n-2}w-2z^{n-3}w^2-$$

$$\dots-(n-2)\cdot zw^{n-2}-(n-1)w^{n-1}$$

$$=z^{n-1}+z^{n-2}w+z^{n-3}w^2+\dots+z\cdot w^{n-2}-(n-1)w^{n-1}$$

$$=z^{n-1}+z^{n-2}w+\dots+zw^{n-2}+w^{n-1}-nw^{n-1}$$

$$=\frac{z^n-w^n}{z-w}-nw^{n-1}$$

Sledi, da je

$$[\;\;] = (z-w)(z^{n-2} + 2z^{n-3}w + \dots + (n-2)zw^{n-3} + (n-1)w^{n-2})$$

Pri $|z| \leq \varrho$ je

$$|z^{n-2} + 2z^{n-3}w + \dots + (n-1)w^{n-2}|$$

$$\leq \varrho^{n-2}(1 + 2 + \dots + (n-1)) = \varrho^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}$$

in zato

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\right| \leq |z-w|\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}|c_n| n(n-1)\varrho^{n-2}$$

Spomnimo se, da originalna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ konvergira na $|z|<r$, ~~Torej za vsak ϱ, $0<\varrho<r$ vrsta konvergira~~ torej konvergira absolutno na $|z|<r$, t.j. $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\varrho^n$ konvergira za vsak ϱ, $0<\varrho<r$. Od Analize pa vemo, da tedaj vrsto lahko členoma odvajamo. Po dvakratnem odvajanju sledi da $\sum_{n=2}^{\infty}|c_n|\cdot n(n-1)\varrho^{n-2}$ konvergira za $0<\varrho<r$.

Torej je

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\right| \leq |z-w|\cdot M$$

kjer je $M = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}|c_n|\cdot n(n-1)\varrho^{n-2}$,

tako da

$$g(w) = \lim_{z\to w}\frac{f(z)-f(w)}{z-w}. \quad ///$$

<u>Opomba</u> Vsota konvergentne potenčne vrste je torej holomorfna funkcija.

<u>POSLEDICA</u> Naj bo f funkcija na odprti množici $\Omega \subset \mathbb{C}$, ki jo je mogoče v okolici vsake $z_0 \in \Omega$ razviti v potenčno vrsto.
Tedaj je f holomorfna na Ω. Dalje, f ima na Ω odvode vseh redov $f^{(k)}$ in vsak odvod je mogoče v okolici vsake $z_0 \in \Omega$ razviti v potenčno vrsto.

<u>Dokaz</u> Zaporedno uporabljamo lemo zgoraj. Najprej na f, nato na f', itd.

<u>POSLEDICA</u>

Če je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (|z-a|<r)$,

je
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n (z-a)^{n-1}$$
$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)(z-a)^{n-2}$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \cdot n(n-1)\cdots(n-k+1)\, c_n (z-a)^{n-k}$$
$$\cdots$$

zato je
$$c_0 = f(a)$$
$$c_1 = \frac{f'(a)}{1!}$$
$$c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$
$$\vdots$$
$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$
$$\vdots$$

torej so z vsoto pot. vrste koeficienti c_n enolično določeni.

Elementarne funkcije v kompleksne

Def. Eksponentna funkcija e^z je def. z vrsto

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Opomba. Vrsta konvergira pri vsakem z

$$\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{1}{n+1} \cdot |z| \to 0 \text{ pri } n \to \infty$$

torej vrsta konv. po kvoc. kriteriju.

Velja $(e^z)' = e^z$

Dokaz

$$\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zaj. členi}}}{=} 1 + \frac{2z}{2!} + \frac{3z^2}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

IZREK Za poljubna $z, w \in \mathbb{C}$ velja

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

Dokaz. Naj bo $f(z) = e^{-z} \cdot e^{z+w}$ za fiksen w.

Tedaj je

$$f'(z) = -e^{-z} e^{z+w} + e^{-z} \cdot e^{z+w} = 0$$

f je holomorfna na $\mathbb{C}$, $f' \equiv 0$. Torej je

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$$

zato je $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$ $\quad \frac{\partial w}{\partial x} \equiv 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ $\quad \frac{\partial w}{\partial y} \equiv 0$

in $u=\text{const}$, $w=\text{const} \Rightarrow f(z)\equiv c$

Torej $e^{-z}e^{z+w}=f(0)=e^{w}$

in zato $e^{z+w}=e^{z}e^{w}$. $\blacksquare$

Def.

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots$$

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots$$

Opomba Obe vrsti konvergirata na $\mathbb{C}$.

Sledi

$$\cos z+i\sin z=e^{iz}$$

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) \quad \sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$$

$$(\sin z)'=\cos z \quad (\cos z)'=-\sin z$$

Če $z=x+iy$ je

$$e^{z}=e^{x}\cdot e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

$$\operatorname{Re} e^{z}=e^{x}\cos y$$

$$\operatorname{Im} e^{z}=e^{x}\sin y$$

$$|e^{z}|=|e^{x}(\cos y+i\sin y)|=\sqrt{(e^{x}\cos y)^2+(e^{x}\sin y)^2}$$

$$=e^{x}=e^{\operatorname{Re} z}$$

$$e^{z}=1 \Rightarrow e^{x}(\cos y+i\sin y)=1$$

$$x=0 \quad y=k\cdot 2\pi$$

$$e^{z}=1 \Leftrightarrow z=2k\pi i \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je neskončno w-jev, da je $e^w = z$. Če je $w = x + iy$ in $z = re^{i\varphi}$ je to mogoče natanko tedaj ko je $e^x = r$ torej $x = \log|z|$ in $y = \varphi + 2k\pi i$. Vsakemu takemu w pravimo logaritem z; $w = \log|z| + i\arg z + 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$. Glavno vejo lahko definiramo na ravnini brez negat. realne osi

$$\log z = \log|z| + i\varphi \qquad \left(z = re^{i\varphi},\ -\pi < \varphi < \pi\right)$$

CAUCHYJEV IZREK

Integrali po poteh

Pot v kompleksni analizi bo odsekoma zvezno odvedljiva preslikava z intervala $[\alpha,\beta]$ v $\mathbb{C}$ torej $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$, kjer sta x in y odsekoma zvezno odvedljivi funkciji na $[\alpha,\beta]$.

Pot je sklenjena, če je $\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$

Zalogo vrednosti poti γ označimo z γ^*.

Definicija Naj bo f zvezna kompleksna funkcija na γ^*. Definiramo

$$\int_\gamma f(z)\,dz \underset{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))(\dot{x}(t)+i\dot{y}(t))\,dt$$

$$= \int_\gamma f\,dx + i f\,dy$$

Opomba Če smer poti obrnemo, se integral pomnoži z -1.

Integral po usmerjeni gladki krivulji L

L parametriziramo z regularno parametrizacijo

$$x = x(t) \qquad \alpha \leq t \leq \beta$$
$$y = y(t)$$
$$z = x + iy = x(t) + iy(t) = \gamma(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

$z(\alpha)$ zač. točka L
$z(\beta)$ konč. točka L

in definiramo

$$\int_L f(z)dz \underset{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta f(x(t)+iy(t))(\dot{x}(t)+i\dot{y}(t))dt$$

Integral je neodvisen od parametrizacije (kot v realnem

Spet je $\int_L f(z)dz = \int_L f dx + i f dy$.

Opomba Vedno velja

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt\right|$$
$$\leq \int_\alpha^\beta \max_{z\in\gamma^*}|f(z)|\cdot|\dot{\gamma}(t)|\,dt$$
$$\leq \max_{z\in\gamma^*}|f(z)|\cdot\int_\alpha^\beta|\dot{\gamma}(t)|dt$$
$$= \quad \cdots\cdots \int_\alpha^\beta\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}(t)^2}\,dt$$
$$= \max_{z\in\gamma^*}|f(z)|\cdot \text{dolžina}(\gamma).$$

<u>Primer</u> poli

$a \in \mathbb{C},\ r > 0$

$\gamma(t) = a + re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

$\gamma'(t) = a' + r(\cos t + i\sin t)'$

$= r(-\sin t + i\cos t)$

$= i(\cos t + i\sin t)$

$= ie^{it}$

Cauchyjev izrek.

IZREK Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ odprta, $F \in \mathcal{H}(\Omega)$. Predpostavimo, da je F' zvezna na Ω. Tedaj je $\int_\gamma F'(z)dz = 0$ za vsako sklenjeno pot γ v Ω.

Dokaz. Naj bo $p: [\alpha,\beta] \to \Omega$ gladka pot.

$$\int_p F'(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} F'(p(t))\cdot p'(t)\,dt$$

Naj bo $F = U + iW$ in $p = p_1 + ip_2$

Tedaj je

$$\frac{d}{dt}F(p(t)) = \frac{d}{dt}\left[U(p_1(t),p_2(t)) + i\,W(p_1(t),p_2(t))\right]$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\cdot p_1'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot p_2'(t)$$

$$+ i\frac{\partial W}{\partial x}\cdot p_1'(t) + i\frac{\partial W}{\partial y}\cdot p_2'(t)]$$

$$= p_1'(t)\cdot\underbrace{\left[\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial x}\right]}_{F'(p(t))} + i p_2'(t)\underbrace{\left[\frac{\partial W}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial x}\right]}_{\substack{F'(p(t)\\ \text{(CR enačbe)}}}$$

$$= F'(p(t))\cdot p'(t)$$

Torej je

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} F'(p(t))p'(t)\,dt = \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{d}{dt}[F(p(t))]\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{osn. izrek}\\ \text{int. rač.}}}{=} F(p(\beta')) - F(p(\alpha')) \quad (*)$$

Če je pot sklenjena, je $p(\beta') = p(\alpha')$, zato

$$\int_p F'(z)\,dz = 0.$$

Če je pot iz nekaj gladkih kosov, sklenjena, potem za vsakega uporabimo (*), seštejemo, in dobimo $\int_\gamma F'(z)\,dz = 0$. ///

<u>Posledica</u> Ker je z^n odvod od $\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$ $(z\in\mathbb{C})$, je

$$\int_\gamma z^n\,dz = 0$$ za vsako sklenjeno pot v $\mathbb{C}$ in za vsak $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Prav tako je

$$\int_\gamma z^n\,dz = 0$$ za vsako sklenjeno pot γ, $\gamma^*\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ in $n = -2,-3,-4,\ldots$

IZREK (Cauchy-jev izrek za trikotnik).

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ odprta in naj bo Δ zaprt trikotnik, ki je vsebovan v Ω. Naj bo $p \in \Omega$ in f zvezna na Ω in holomorfna na $\Omega \setminus \{p\}$. Tedaj je

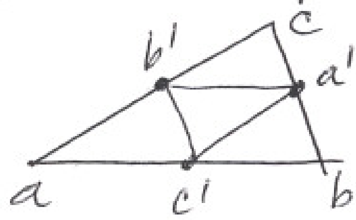
$$\int_{b\Delta} f(z)dz = 0.$$

Opomba Rob je iz treh daljic. Vedno ga pozitivno orientiramo.

Opomba Kasneje bomo videli, da sledi od tod, da je $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Naj bo $J = \int_{b\Delta} f(z)dz$

Dokaz Predpostavimo najprej da $p \notin \Delta$.



Naj bodo a, b, c krajišča in a', b', c' razpolovišča stranic kot na sliki

Oglejmo si sedaj štiri trikotnike

$$\Delta^1 = ac'b'$$
$$\Delta^2 = c'ba'$$
$$\Delta^3 = a'cb'$$
$$\Delta^4 = c'a'b'$$

Sedaj je

$$J = \sum_{j=1}^{4} \int_{b\Delta^j} f(z)dz$$

Absolutna vrednost vsaj enega od integralov $\int_{b\Delta^i} f(z)dz$ je torej vsaj $|J/4|$. Označimo tak trikotnik z Δ_1 in ponovimo proces.
Tako dobimo zaporedje vloženih trikotnikov

$$\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots,$$

da je dolžina $b\Delta_n$ enaka

~~Torej je~~

$$\ell(b\Delta_n) = \frac{1}{2^n} \cdot L \quad , L = \ell(b\Delta).$$

Dalje, obstaja natanko ena točka z_0, ki je vsebovana v vseh trikotnikih.

Kako to vidimo: Vsaj ena taka točka obstaja. Če je ne bi bilo, bi bilo

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \dots \text{ prazno}$$

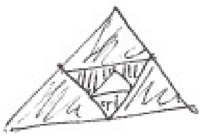
Zato $\Delta_1^{c} \cup \Delta_2^{c} \cup \dots = \mathbb{C}$

torej $\Delta_1^{c} \cup \Delta_2^{c} \cup \dots$ pokrijejo kompaktno množico Δ. To pa pomeni, da je Δ vsebovana zaradi kompaktnosti že v končni družini

$$\Delta \in \Delta_1^{c} \cup \Delta_2^{c} \cup \dots \cup \Delta_n^{c}$$

To pa ne more biti, saj npr.

$$\Delta_{n+1} \not\subset \Delta_1^{c} \cup \Delta_2^{c} \cup \dots \cup \Delta_n^{c}$$



Dveh različnih pa ne more biti, saj gre diam $\Delta_n \to 0$. Če bi bili A, B, ki bi ležali v vseh Δ_n, bi bila $d(A,B)$ poljubno majhna, kar je mogoče le, če je $A=B$

Nadaljevanje dokaza

Postopek tedaj da

$$|J| \leq 4^n \left| \int_{b\Delta_n} f(z)\,dz \right|$$

$$\ell(b\Delta_n) = \frac{L}{2^n}$$

Vemo je $z_0 \in \Delta \subset \Omega$, torej je f odvedljiva v z_0. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstaja torej $r > 0$, da je

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \qquad (*)$$

čim je $|z - z_0| < r$
(to je, ker je $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$).

Seveda obstaja n, da je $|z - z_0| < r$ za vse $z \in \Delta_n$.
Za ta n je $|z - z_0| < 2^{-n} L$ za vse $z \in \Delta_n$
(razdalja od točke v Δ_n do roba je < obsega)

Po korolarju zgoraj je

$$\int_{b\Delta_n} \underbrace{f(z_0)}_{\text{konstanta}}\,dz = 0 \quad , \quad \int_{b\Delta_n} \underbrace{f'(z_0)}_{\text{konstanta}}(z - z_0)\,dz = 0$$

torej je

$$\int_{b\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{b\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\,dz$$

in zaradi $(*)$ sledi

$$\left| \int_{b\Delta_n} f(z)\,dz \right| \leq \varepsilon \cdot \underbrace{\left(\frac{L}{2^n}\right)}_{|z - z_0| < \frac{L}{2^n}} \cdot \underbrace{\left(\frac{L}{2^n}\right)}_{\ell(b\Delta_n) < \frac{L}{2^n}}$$

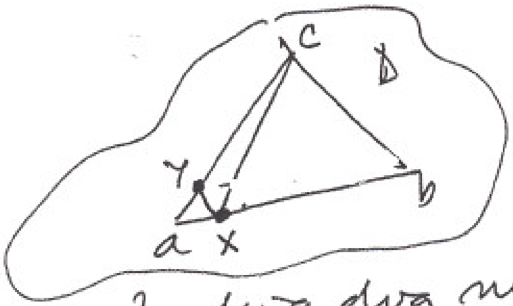
To pomeni, da je

$$|J| \leq 4^n \cdot \varepsilon \cdot \frac{L^2}{4^n} = \varepsilon \cdot L^2$$

Ker je bil ε poljubno majhen, sledi $J=0$, v primeru ko $p \notin \Delta$.

Naj bo sedaj p oglišče ~~pas~~ trikotnika; recimo $p=a$.
Če so a,b,c na isti premici, je $\int_{b\Delta} f(z)dz$ trivialno enak 0, za vsako zvezno f.
Če a,b,c niso na isti premici pa je

$$\int_{b\Delta} = \int_{b(a,x,y)} + \int_{b(x,b,c)} + \int_{b(x,c,y)}$$



Zadnja dva integrala

$$\int_{b\Delta(x,b,c)} f(z)dz = 0$$

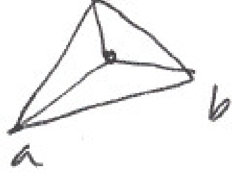
$$\int_{b\Delta(x,c,y)} f(z)dz = 0$$

sta enaka 0 po prvem delu.

Torej je $\int_{b\Delta} = \int_{[a,x]} + \int_{[x,y]} + \int_{[y,a]}$

Ker je f omejena na Δ in ker $[a,x],[x,y],[y,a]$ lahko napravimo poljubno kratke, je $\int_{b\Delta} f(z)dz = 0$.

Končno, če je $p \in \Delta$, uporabimo prej dokazano na trikotnike

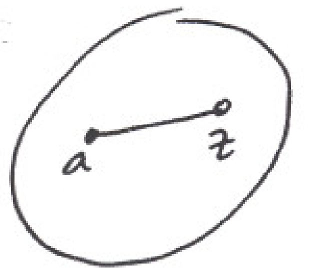


$\Delta(a,b,p)$
$\Delta(b,c,p)$
$\Delta(p,c,a)$

in rezultate seštejemo.

POSLEDICA 1 Naj bo Ω odprta konveksna množica, in f holomorfna funkcija na Ω. Tedaj ima f na Ω primitivno funkcijo, t.j. obstaja F, holo. na Ω, da je $F' \equiv f$.

Dokaz. Fiksirajmo $a \in \Omega$. Ker je Ω konveksna, vsebuje daljico $[a,z]$ od a do z za vsak $z \in \Omega$.



Definirajmo

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta \quad (z \in \Omega).$$

Za vsaka z_0, z trikotnik $\Delta(a,z,z_0)$ leži v Ω. Torej je po trditvi zgoraj.

$$0 = \int_{b\Delta} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{[a,z_0]} + \int_{[z_0,z]} + \int_{[z,a]}$$

$$= F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta - F(z)$$

Sledi $$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

torej

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z-z_0}\Big[\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{[z_0,z]} f(z_0)\,d\zeta\Big]$$

saj je

$$\int_{[z_0,z]} 1\,dz = \int_0^1 1\cdot(z-z_0)\,dt = (z-z_0)\cdot 1 = z-z_0$$

$\gamma(t) = z_0 + t(z-z_0)$ $(0 \le t \le 1$

torej

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)=\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]}[f(\zeta)-f(z_0)]\,d\zeta$$

Ker je f zvezna v z_0, za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$, da je

$$|f(\zeta)-f(z_0)|<\varepsilon \quad \text{če je} \quad |\zeta-z_0|<\delta.$$

Če je torej $|z-z_0|<\delta$, je desna stran

$$\left|\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]}[f(\zeta)-f(z_0)]\,d\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{|z-z_0|}\cdot\max_{\zeta\in[z_0,z]}|f(\zeta)-f(z_0)|\cdot\text{dolžina}[z_0,z]$$

$$=\frac{1}{|z-z_0|}\cdot\varepsilon\cdot|z-z_0|=\varepsilon$$

Torej je

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right|<\varepsilon \quad \text{čim je} \quad |z-z_0|<\delta$$

kar da $F'(z_0)=f(z_0)$, torej v splošnem $F'(z)\equiv f(z)$. ///

Po znanem izreku od tod sledi, da je $\int f(z)\,dz=0$ po vsaki sklenjeni poti v Ω. ///