$$B(x,y) = B(y,x)$$

Izrek. $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$, $x,y>0$.

III. RIEMANNOV INTEGRAL V $\mathbb{R}^n$

(dvojni, trojni, ..., n-terni integral)

Osvežitev pojmov iz Analize 1

$[a,b]$ interval, f omejena na $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Riemannova vsota $\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$ (pri $f>0$ je to ploščina stopničastega lika pod grafom)

Riemannov integral (določeni integral) f na $[a,b]$:

Če obstaja I z lastnostjo: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, da za vsako delitev $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ in vsako izbiro točk $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, pri kateri je $|x_i - x_{i-1}| < \delta\ \forall i$ velja

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - I \right| < \varepsilon,$$

pravimo, da je f integrabilna na $[a,b]$ in I imenujemo njen Riemannov integral. $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

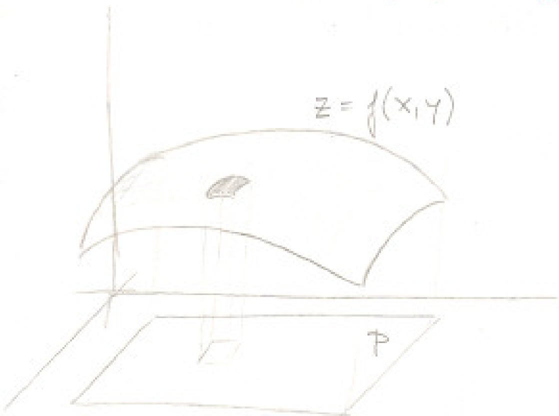
Razvili smo še t.i. Darboux-jev integral: Naj bo dana delitev D, $D: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Naj bo $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$, $M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$. $s(D) = \sum m_i l_i$, $S(D) = \sum M_i l_i$.

$s = \sup\{s(D) \mid D \text{ delitev } [a,b]\}$, $S = \inf\{S(D) \mid D \text{ delitev } [a,b]\}$.

Če je $s = S$ rečemo, da je f integrabilna po Darboux-ju in $J = s = S$ imenujemo Darboux-jev integral.

Dokazali smo, da je f RI natanko tedaj, ko je f ID, tedaj je $I = J$.

Motiv za uvedbo dvojnega integrala



Nad pravokotnikom P je dana pozitivna zvezna funkcija $f(x,y)$.

$P = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$

Radi bi določili prostornino telesa, omejenega z $z=0, x=a, x=b, y=c, y=d$ in $\{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in P\}$.

P razdelimo na male pravokotnike $P_1, \dots, P_n$ s ploščinami $p(P_1), p(P_2), \dots, p(P_n)$. V vsakem P_i izberemo točko (ξ_i, η_i) in izračunamo $f(\xi_1,\eta_1)\,p(P_1) + \dots + f(\xi_n,\eta_n)\,p(P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\,p(P_i)$. To je približek za našo prostornino: je prostornina stopničastega telesa, ki aproksimira naše telo.

To je Riemannova vsota, integral bo limita takih vsot.

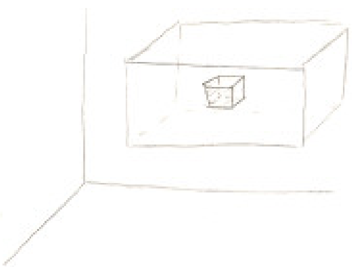
Če obstaja I z lastnostjo $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall D : P_1, \dots, P_n$, kjer so dolžine vseh stranic P_i manjše od δ in $\forall$ izbiro točk (ξ_i, η_i) velja

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot p(P_i) - I \right| < \varepsilon,$$

pravimo, da je f integrabilna na P. I imenujemo njen Riemannov integral.

$$I = \iint_P f(x,y)\,dx\,dy.$$

Motiv za uvedbo trojnega integrala



P kvader v $\mathbb{R}^3$, $P = \{(x,y,z) \mid a_1 \le x \le a_2,\ b_1 \le y \le b_2,\ c_1 \le z \le c_2\}$

Na P je $f(x,y,z)$ gostota, zvezna funkcija treh spremenljivk.

Razdelimo ga z ravni, vzporednimi koordinatnim ravninam, na manjše kvadre $P_1, \dots, P_n$. V vsakem izberemo točko $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in P_i$. Masa i-tega delčka je $v(P_i) f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Masa celote je $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v(P_i)$.

Maso dobimo v limiti, ko je delitev vedno finejša.

Pravimo, da je omejena funkcija f na P integrabilna, če $\exists I$ z lastnostjo: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, da je $\left|\sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v(P_i) - I\right| < \varepsilon$ za vsako delitev P na kvadre, katerih dolžine vseh stranic so $< \delta$ in za vsako izbiro točk (ξ_i, η_i, ζ_i) v P_i.

I je tedaj trojni integral f po P.

$$I = \iiint_P f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Kvadri v $\mathbb{R}^n$

Naj bo $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$. Kartezični produkt $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in [a_i, b_i] \ \forall i = 1, \ldots, n\}$ imenujemo (zaprt) kvader v $\mathbb{R}^n$.

$P = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ je odprt kvader v $\mathbb{R}^n$.

- odprt kvader je odprta množica v $\mathbb{R}^n$
- zaprt kvader je zaprta množica v $\mathbb{R}^n$
- $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ je množica vseh notranjih točk od $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$

Definicija. Volumen (prostornina) kvadra $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ je produkt dolžin stranic $(b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$.

Diskusija. Če vsako stranico $[a_i, b_i]$ razdelimo $a_i = x_0^i < \cdots < x_{m_i}^i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $m_i \in \mathbb{N}$, razdelimo ves kvader na $m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ kvaderčkov:

$$[x_{j_1-1}^1, x_{j_1}^1] \times \cdots \times [x_{j_n-1}^n, x_{j_n}^n] \quad 0 \le j_i \le m_i, \quad 1 \le i \le n$$

Delitev kvadra P je družina vseh teh kvaderčkov.

Oznaka. Naj bo f omejena funkcija na kvadru P. Pišemo
$m(f, P) = \inf\{f(x_1, \ldots, x_n) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in P\} = \inf\{f(x) \mid x \in P\}$ in
$M(f, P) = \sup\{f(x) \mid x \in P\}$.

Definicija. Naj bo f omejena funkcija na kvadru D in $\mathcal{D}$ delitev kvadra D na $P_1, P_2, \ldots, P_m$, t.j. $\mathcal{D} = \{P_1, \ldots, P_m\}$. Vsoto $s(f, \mathcal{D}) = \sum_{P \in \mathcal{D}} m(f, P) v(P)$ imenujemo spodnja (Darboux-jeva) vsota, prirejena delitvi $\mathcal{D}$ in funkciji f.

Vsoto $S(f,\mathcal{D}) = \sum_{P\in\mathcal{D}} M(f,P)\,v(P)$ imenujemo zgornja Darboux-jeva) vsota, prirejena delitvi $\mathcal{D}$ in funkciji f.

Definicija. Naj bosta $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ delitvi kvadra P. $\mathcal{D}'$ je finejša od $\mathcal{D}$, če je vsak kvader, ki pripada $\mathcal{D}'$, vsebovan v nekem kvadru $\mathcal{D}$.

Opomba. Če je $P' \subset P$, je $\sup\{f(x) \mid x\in P'\} \leq \sup\{f(x) \mid x\in P\}$ in $\inf\{f(x) \mid x\in P'\} \geq \inf\{f(x) \mid x \in P\}$. Sledi:
če je $\mathcal{D}'$ finejša od delitve $\mathcal{D}$ in f omejena funkcija na D, je $s(f,\mathcal{D}) \leq s(f,\mathcal{D}')$ in $S(f,\mathcal{D}') \leq S(f,\mathcal{D})$.

Posledica. Za poljubni delitvi $\mathcal{D}'$ in $\mathcal{D}''$ kvadra D velja:
$s(f,\mathcal{D}'') \leq S(f,\mathcal{D}')$, t.j. vsaka spodnja vsota je manjša ali enaka od vsake zgornje vsote.

DOKAZ. Naj bo $\mathcal{D}$ delitev, ki je hkrati finejša od $\mathcal{D}'$ in $\mathcal{D}''$. Potem je $s(f,\mathcal{D}'') \leq s(f,\mathcal{D})$, $S(f,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}')$.
Po sami definiciji je $s(f,\mathcal{D}) < S(f,\mathcal{D})$. Torej je $s(f,\mathcal{D}'') \leq S(f,\mathcal{D}')$. ∎

Opomba. Torej so spodnje vsote navzgor omejene in zgornje vsote navzdol omejene.

27.11.2003

Obstajata $s = \sup\{s(f,\mathcal{D}) \mid \mathcal{D}$ poljubna delitev$\}$,
$S = \inf\{S(f,\mathcal{D}) \mid \mathcal{D}$ poljubna delitev$\}$.

Opomba. Včasih imenujemo S zgornji (Darboux-jev) integral funkcije f po P, s pa spodnji (D.) integral f po P.

Definicija. Omejena funkcija f na kvadru P je integrabilna, če je $s = S$. Število $I = s = S$ imenujemo integral funkcije f po kvadru P in pišemo

$$I = \int_P f = \int_P f(x)\,dx = \underbrace{\int\!\!\int_P \cdots \int}_{n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n .$$

Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ neprazna, omejena množica in naj bo f omejena funkcija, definirana na A. Kaj bi pomenilo, da je f integrabilna?

A je omejena, zato je vsebovana v nekem kvadru P. Funkcijo f razširimo z A na ves P:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \in P - A. \end{cases}$$

Definicija. Omejena funkcija f je integrabilna na A, če je $\tilde{f}$ integrabilna na P in definiramo

$$\int_A f = \int_P \tilde{f}.$$

Opomba. Preprosto se vidi, da integrabilnost in integral nista odvisna od tega, kakšen kvader izberemo, pomembno je le, da je $A \subset P$.

Izrek. Naj bo f omejena funkcija na kvadru $P \subset \mathbb{R}^n$. Tedaj so ekvivalentne naslednje trditve:

(a) funkcija f je integrabilna (v zgornjem smislu) in njen integral je enak I

(b) obstaja I, da za $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da za vsako delitev kvadra P na $P_1, \dots, P_N$ z robovi, krajšimi od δ in za poljubne $x_1 \in P_1, \dots, x_N \in P_N$ velja

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(P_i) - I \right| < \varepsilon.$$

(c) $\forall \varepsilon > 0$ obstaja taka delitev D_ε kvadra P, da je $S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) < \varepsilon$.

Opomba. $\sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(P_i)$ imenujemo Riemannova vsota, prirejena delitvi $D = \{P_1, \dots, P_m\}$ in izbiri točk $x_i \in P_i$.

Opomba. Pogoju (b) bi lahko rekli integrabilnost po Riemannu in I iz (b) imenovali Riemannov integral. Dobimo:

Definicija. f je na P integrabilna, če $\exists I$, da za $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da za vsako delitev P na P_i, z robovi krajšimi od δ, in vsako izbiro $x_i \in P_i$ velja $\left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(P_i) - I \right| < \varepsilon$.

Število I imenujemo integral funkcije f po P in pišemo $I = \int_P f$.

DOKAZ. (a) $\Rightarrow$ (c) $I = s = S = \int_P f(x)dx$. Ker je $I = S = \inf\{S(f,D) \mid D \text{ delitev } P\}$, lahko za $\forall \varepsilon > 0$ najdemo D_ε', da je $S(f, D_\varepsilon') < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Podobno obstaja D_ε'', da je $s(f, D_\varepsilon'') > I - \frac{\varepsilon}{2}$.

Naj bo D_ε hkrati finejša od D_ε' in D_ε'' (vemo, da obstaja).

$I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, D_\varepsilon'') \leq s(f, D_\varepsilon) \leq S(f, D_\varepsilon) < S(f, D_\varepsilon') < I + \frac{\varepsilon}{2}$.

Zato je $S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Pokažemo, da je I iz (b) enak s in S. Naj bo $\varepsilon > 0$. Po (b) obstaja $\delta > 0$, da za poljubno delitev P na $P_1, \dots, P_N$ s stranicami, krajšimi od δ in poljubne $x_i \in P_i$

$$\left| \sum_{i=1}^N f(x_i) v(P_i) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Po definiciji suprema lahko v vsakem P_i izberemo x_i, da je $\left| f(x_i) - \sup_{x \in P_i} f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2N v(P_i)}$. Potem je $\left| S(f,D) - \sum_{i=1}^N f(x_i) v(P_i) \right| =$

$$= \left| \sum_{i=1}^N \left[\sup_{x\in P_i} f(x)\right] v(P_i) - \sum_{i=1}^N f(x_i) v(P_i) \right| \leq \sum_{i=1}^N \left| \left(\sup f(x) - f(x_i)\right) \right| v(P_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon}{2N v(P_i)} v(P_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potem je $|S(f,D) - I| \leq \varepsilon$, ker je

$$|S(f,D) - I| \leq \underbrace{\left| S(f,D) - \sum f(x) v(P_i) \right|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left| \sum f(x) v(P_i) - I \right|}_{\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Za $\forall \varepsilon > 0\ \exists D : |S(f,D) - I| < \varepsilon$. Podobno $\forall \varepsilon > 0\ \exists D' : |(f, D') - I| < \varepsilon$.

To pomeni, da so zgornje vsote poljubno blizu I in spodnje poljubno blizu I. Sledi $s = S = I$. ($S = \inf\{S(f,D)\} \leq I$ in $s = \sup\{s(f,D)\} \geq I$ in $s \leq S$, torej $S = I = s$).

(c) $\Rightarrow$ (a) Če (c), $\forall \varepsilon > 0\ \exists D_\varepsilon$, da je $0 \leq S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) < \varepsilon$. Ker je $s(f, D_\varepsilon) < s \leq S \leq S(f, D_\varepsilon)$, je $S - s < \varepsilon$. Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, sledi $s = S$.

(a) $\Rightarrow$ (b) ...

Lema. Naj bo D delitev $P \subset \mathbb{R}^n$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, da velja:

$\forall$ delitev D' s stranicami kvadrov $P_1, \dots, P_n$, krajšimi od δ je skupni volumen kvadrov delitve D', ki niso celi v kakšnem od kvadrov delitve D, manjši od ε.

DOKAZ. Naj bo skupni $(n-1)$-razsežni volumen mej med kvadri delitve D T. Naj bo $\delta = \frac{\varepsilon}{T}$. Ogledamo si skupni volumen vseh kvadrov delitve D' s stranicami, krajšimi od $\frac{\varepsilon}{T} = \delta$, ki niso celi v kakšnem kvadru delitve D.

Pri $\mathcal{D}'$ se vsak P', ki ni v celoti v kakšnem kvadru $\mathcal{D}$, seka vsaj z dvema različnima kvadroma (sosednjima $\sim$).
Če z $A(P')$ označimo $(n-1)$-volumen preseka meje med kvadri delitve $\mathcal{D}$ in P', velja: $v(P') \leq A(P')\delta$.

2.12.2003

Na istem mestu se sekata meje nikoli dva kvadra, zato je vsota vseh prostornin $A(P') < T$. Potem je skupna prostornina vseh kvadrov manjša od $\delta \cdot$ vsota $(n-1)$-volumnov, torej manjša od $\delta \cdot T = \frac{\varepsilon}{T} T = \varepsilon$. ∎

(a) $\Rightarrow$ (b)

Naj bo $\varepsilon > 0$. f je omejena, zato $\exists M < \infty$, da je $|f(x)| < M$ $(x \in P)$.
Po (a) obstajata delitvi $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$, da je $I - s(f, \mathcal{D}_1) \geq 0$ in $< \frac{\varepsilon}{2}$ in $S(f, \mathcal{D}_2) - I < \frac{\varepsilon}{2}$ in ≥ 0. Naj bo $\mathcal{D}$ finejša od $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$.
Potem je $0 \leq I - s(f, \mathcal{D}) < \frac{\varepsilon}{2}$ in $0 \leq S(f, \mathcal{D}) - I < \frac{\varepsilon}{2}$. $(*)$
Po lemi obstaja $\delta > 0$, da je za vsako delitev $\mathcal{D}'$ kvadra P s stranicami, krajšimi od δ, vsota volumnov tistih kvadrov, ki niso vsi v kakšnem kvadru delitve $\mathcal{D}$, manjši od $\frac{\varepsilon}{2M}$.
Naj bo $\mathcal{D}'$ taka delitev in $P_1, P_2, \ldots, P_N$ kvadri delitve $\mathcal{D}'$.
Naj bodo $P_1, P_2, \ldots, P_k$ tisti kvadri, ki v celoti ležijo v kvadrih delitve $\mathcal{D}$, $P_{k+1}, \ldots, P_N$ pa ostali.

Če je P_i vsebovan v kvadru Q delitve $\mathcal{D}$, je $\sup\limits_Q f \geq \sup\limits_{P_i} f$. Poleg tega je vsota volumnov vseh teh P_i manjša od volumna Q.
Za $P_{j_1}, \ldots, P_{j_\ell}$ v Q je $\sum\limits_{k=1}^{\ell} f(x_{j_k}) v(P_{j_k}) \leq \sum\limits_{k=1}^{\ell} \sup\limits_{x \in Q} f(x) v(P_{j_k}) \leq$

$$\leq \sup_{x \in Q} f(x) \sum_{k=1}^{\ell} v(P_{j_k}) \leq \sup_{x \in Q} f(x)\, v(Q).$$

Zato je $\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i) v(P_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} f(x_i) v(P_i) + \sum\limits_{j=k+1}^{N} f(x_i) v(P_i) \leq S(f, \mathcal{D}) + M \sum\limits_{j=k+1}^{N} v(P_i)$

$$S(f, \mathcal{D}) + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = S(f, \mathcal{D}) + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(*)}{<} I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = I + \varepsilon.$$

Isto sklepanje za spodnje vsote da

$$\sum_{k=1}^{N} f(x_i) v(P_i) \geq s(f, \mathcal{D}) - M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} > I - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = I - \varepsilon.$$

Potem je $\left|\sum\limits_{k=1}^{N} f(x_i) v(P_i) - I\right| < \varepsilon$ za vsako delitev, kjer so vse dolžine stranic manjše od δ in vsako izbiro točk. To je ravno (b). ∎

V $\mathbb{R}^n$ bomo integrirali po splošnejših množicah kot po kvadrih.
Najprej definirajmo volumen množice.

__Definicija.__ Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$. __Karakteristična funkcija__ množice A, $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definirana:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \;; & x \in A \\ 0 \;; & x \notin A . \end{cases}$$

__Definicija.__ Omejena množica $A \subset \mathbb{R}^n$ __ima volumen__, če je χ_A integrabilna.

$$v(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A .$$

(t.j. $\int_P \chi_A$, kjer je P tako velik kvader, da je $A \subset P$)

__Opomba.__ Če ima množica A volumen, pravimo, da je A __Jordanovo merljiva__.
Če je P odprt kvader $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, je njegov volumen enak volumnu njegovega zaprtja $[a_1, b_1] \ldots [a_n, b_n]$, t.j. $(b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$.

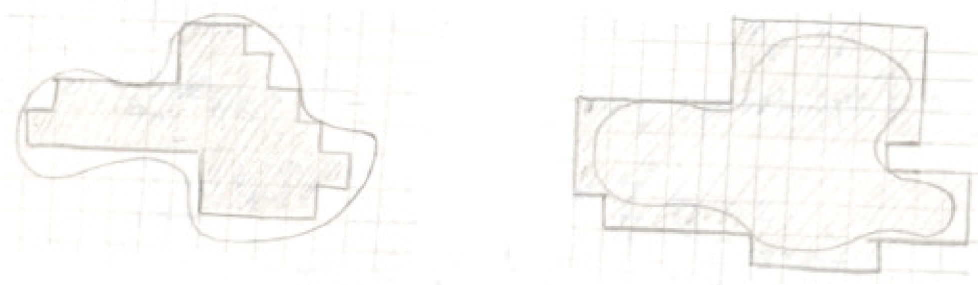
Razdelimo $\mathbb{R}^n$ na kocke K_i^m z dolžino stranice $\frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$. Volumen take kocke je $(\frac{1}{m})^n$. __Zunanji volumen__ množice A definiramo kot

$$V^+(A) = \inf \Big\{ \sum_{i : K_i^m \cap A \neq \emptyset} v(K_i^m) \;;\; m \in \mathbb{N} \Big\} .$$

Notranji volumen definiramo kot

$$V^-(A) = \sup \Big\{ \sum_{K_i^m \subset A} v(K_i^m) \;;\; m \in \mathbb{N} \Big\} .$$

Dolomich, Integral v $\mathbb{R}^n$



Vsaka omejena množica ima zunanji in notranji volumen. Če je $V^+(A) = V^-(A)$ pravimo, da ima A volumen. Tedaj je $V(A) = V^+(A) = V^-(A) = \int \chi_A$.

__Definicija.__ Omejena množica $A \subset \mathbb{R}^n$ ima __volumen 0__, če je $V(A) = 0$ (t.j. če ima volumen in je ta enak 0).

Ne mimo omejena $A \subset \mathbb{R}^n$ ima mero 0, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$

pokritje A s kvadri $P_1, P_2, \dots$ katerih vsota volumnov je manjša od ε, t.j.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_1, P_2, \dots : \ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \ \text{ in } \ \sum_{i=1}^{\infty} v(P_i) < \varepsilon.$$

<u>Primer</u>. Naj bo S števna množica, vsebovana in povsod gosta v kvadru P. Tedaj ima S mero 0, volumna pa nima.

$S = \{a_1, a_2, \dots\}$, $\varepsilon > 0$ Jb

Izberimo kvadre $a_i \in P_i$, $v(P_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$.

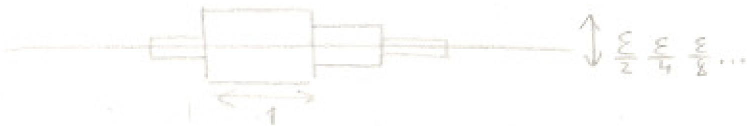
$\sum_{i=1}^{\infty} v(P_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \dots = \varepsilon$ in $S \in \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$.

$X_S(x) = \begin{cases} 1; x \in S \\ 0; x \notin S \end{cases}$ X_S ni integrabilna: ker je S gosta v P, vsak kvader, vsebovan v P, vsebuje točke iz S in točke, ki niso v S. Torej za vsako delitev lahko izberemo točke tako, da bo $\sum f(x_i) v(P_i) = v(P)$ ali $\sum f(x_i) v(P_i) = 0$. Torej ni integrabilnosti.

Omejena A ima volumen 0 natanko tedaj, ko $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ <u>končno</u> pokritje A s kvadri, katerih skupni volumen ne presega ε. Doma!

Interval $[a, b]$ ima volumen $(b-a)$ kot podmnožica $\mathbb{R}^1$ in 0 kot podmnožica $\mathbb{R}^2$.

x-os ima mero 0 v $\mathbb{R}^2$.



<u>Propozicija</u>. Števna unija množic z mero 0 v $\mathbb{R}^n$, je množica z mero 0.

<u>DOKAZ</u>. Naj bo $\varepsilon > 0$ in A_j, $j \in \mathbb{N}$ množice z mero 0. Za $\forall j$ lahko A_j pokrijemo s kvadri $P_{j1}, P_{j2}, \dots$, da je $\sum_{i=1}^{\infty} v(P_{ji}) < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Družina $\{P_{jk} \mid j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ je števna in

$$\sum_{j,k \in \mathbb{N}} v(P_{jk}) = \sum_{\in \mathbb{N}} \sum_{\in \mathbb{N}} v(P_{jk}) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

<u>Propozicija</u>. V definiciji množice z mero 0, lahko uporabimo tako odprte kot zaprte kvadre.

<u>DOKAZ</u>. Naj bo $A \subset \bigcup P_i$, P_i odprti, $\sum v(P_i) < \varepsilon$. Ker je $v(\overline{P_i}) = v(P_i)$, je $A \subset \bigcup \overline{P_i}$ in $\sum v(\overline{P_i}) < \varepsilon$.

Naj bo $\varepsilon > 0$ in $A \subset \bigcup Q_i$, Q_i zaprti kvadri, $\sum v(Q_i) < \frac{\varepsilon}{2^n}$, n dimenzija prostora. Vsak Q_i nadomestimo z $2\times$ večjim odprtim kvadrom R_i, $Q_i \subset R_i$. Jasno je $v(R_i) = 2^n v(Q_i)$ in $A \subset \bigcup R_i$, $\sum v(R_i) = \sum 2^n v(Q_i) = 2^n \sum v(Q_i) < 2^n \cdot \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$. ∎

Opomba. Če ima A volumen 0, ima mero 0. Če je A kompaktna v $\mathbb{R}^n$ in ima mero 0, ima volumen 0.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker ima A mero 0, obstajajo odprti kvadri, da je $A \subset \bigcup Q_i$ in $\sum v(Q_i) < \varepsilon$. Ker je kompaktna, iz odprtega pokritja lahko izberemo končno podpokritje: $A \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_N$ in $\sum_{i=1}^{N} v(Q_i) < \varepsilon$.

Potem ima A volumen 0.

4.12.2003

Izrek. (Lebesgue) Naj bo P kvader in f omejena funkcija na P. Tedaj je f integrabilna na P natanko tedaj, ko ima množica točk nezveznosti funkcije f mero 0.

Posledica. Omejena množica $A \subset \mathbb{R}^n$ ima volumen natanko tedaj, ko ima njen rob volumen 0.

DOKAZ. Naj bo A omejena množica.

Spomnimo se, da ima A volumen $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A$ obstaja, torej ko za kvader P, ki vsebuje A obstaja $\int_P \chi_A$, kjer je χ_A karakteristična funkcija. Nezveznosti so natanko točke bA. Torej po izreku ta integral obstaja $\Leftrightarrow$ mera bA enaka 0. Ker je A omejena, je bA zaprta, omejena množica, torej kompaktna in je $\text{mera}(bA) = 0 \Leftrightarrow V(bA) = 0$. ■

Posledica. Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena in naj ima A volumen. Omejena funkcija $f: A \to \mathbb{R}$ s končno ali števno točkami nezveznosti je integrabilna na A.

DOKAZ. Vložimo A v kvader P in definiramo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \in P - A. \end{cases}$

Vemo, da je f integrabilna na $A \Leftrightarrow \tilde{f}$ integrabilna na P in je $\int_A f = \int_P \tilde{f}$.

Naj bo N množica točk nezveznosti f, ki je končna ali števno neskončna. Tedaj je $M \subset N \cup bA$. Ker ima A volumen, ima bA mero 0. N je števna in ima mero 0.

Potem ima $N \cup bA$ mero 0 in zato ima $\underline{\text{množica točk}}$ $M \equiv \underline{\text{nezveznosti}}\ \tilde{f}$, ki je vsebovana v $N \cup bA$, tudi mero 0.

$\int_P \tilde{f}$ torej obstaja. ■

DOKAZ. (Lebesgue)

Brez izgube splošnosti predpostavimo, da je P zaprt kvader.

Definicija. Naj bo h definirana v okolici točke x_0. Oscilacija funkcije h v točki x_0 je

$$O(h, x_0) = \inf \{ \sup\{|h(x_1)-h(x_2)| : x_1, x_2 \in U \cap P\}, U \text{ ok. } x_0 \}.$$

Jasno je vedno $O(h, x_0) \geq 0$.

Propozicija. $O(h, x_0) = 0 \iff h$ je zvezna v x_0.

DOKAZ. Naj bo $O(h, x_0) = 0$. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ok. za x_0 U_{x_0} ($= U_{x_0}' \cap P$), da je $\sup\{|h(x_1)-h(x_2)|, x_1, x_2 \in U_{x_0}\} < \varepsilon$. Torej je $|h(x_1)-h(x_2)| < \varepsilon$ za poljubna $x_1, x_2 \in U_{x_0}$, t.j. $|h(x_1)-h(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x_1 \in U_{x_0}$. Potem je h zvezna v x_0.

Naj bo $O(h, x_0) \neq 0$. Tedaj $\exists \varepsilon > 0$, da je za vse okolice U_{x_0} za x_0 $\sup\{|h(x_1)-h(x_2)|, x_1, x_2 \in U_{x_0}\} \geq \varepsilon$. Sledi, da v vsaki okolici U_{x_0} obstaja $x \in U_0 \cap P$, da je $|h(x_0)-h(x)| \geq \frac{\varepsilon}{3}$. (Če takega x ne bi bilo, bi $\forall x_1, x_2 \in U_0 \cap P$ $|h(x_1)-h(x_2)| < \frac{2\varepsilon}{3}$)

To pomeni, da f ni zvezna v x_0. ∎

(nadaljevanje dokaza)

Naj bo N množica točk nezveznosti funkcije f na P in predpostavimo, da ima N mero 0. Dokažemo, da je f integrabilna.

$\forall \varepsilon > 0$, naj bo $N_\varepsilon = \{x \in P : O(f, x) \geq \varepsilon\}$. Pokažemo, da je N_ε kompaktna. Ker je $N_\varepsilon \subset P$ in P omejena, je N_ε omejena. Naj bo x_0 stekališče N_ε. ($x_0 \in P$, ker je P zaprt). Vsaka okolica U_{x_0} vsebuje točke iz N_ε. Po definiciji oscilacije je $\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|, x_1, x_2 \in U\} \geq \varepsilon$ in zato $O(f, x_0) = \inf\{\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|, x_1, x_2 \in U \cap P\} \text{ ok. od } x_0\} \geq \varepsilon$. Torej je $x_0 \in N_\varepsilon$. Potem je N_ε zaprta.

$\forall \varepsilon > 0$, $N_\varepsilon \subset N = \{x \in P, O(f, x) > 0\}$. Ker ima N mero 0, ima tudi N_ε mero 0. Ker je kompaktna, ima volumen 0.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Pokažemo, da obstaja delitev D kvadra P, da je $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$. Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, bo po izreku f integrabilna.

Ker ima N_ε volumen 0, jo je mogoče pokriti s končno odprtimi kvadri $P_1, \ldots, P_N$, da je $N_\varepsilon \in \bigcup_{i=1}^{N} P_i$ in $\sum_{i=1}^{N} V(P_i) < \varepsilon$. (*)

$P \setminus P$ je zaprta in omejena, torej kompaktna in ne seka

kompaktne množice N_ε. Razdalja med $P \setminus \mathcal{P}$ in N_ε je pozitivna, označimo jo z δ. Razdelimo P na kvadre s stranicami, krajšimi od $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$. Naj bo $\mathcal{D}_1$ družina tistih kvadrov te delitve, ki sekajo N_ε in so v celoti vsebovani v $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{N} P_i$, ki pokriva N_ε.
(Če tak kvader seka N_ε, so vse njegove točke od N_ε oddaljene za manj kot $\sqrt{\cdots + (\frac{\delta}{\sqrt{n}})^2} = \delta$, vse točke izven $\mathcal{P}$ pa za več kot δ.)
Naj bo $\mathcal{D}_2$ družina tistih te delitve, ki ne sekajo N_ε.
Naj bo $Q' \in \mathcal{D}_2$ zaprt kvader, ki ne seka N_ε. Za $\forall x \in Q'$ je zato $O(f,x) < \varepsilon$. Torej $\forall x \in Q'$ obstaja odprta okolica U_x (npr. kockica) s središčem v x, da je $\sup\{f(y), y \in U_x\} - \inf\{f(y), y \in U_x\} < \varepsilon$. (**)
Že končno takih okolic pokrije Q', saj je Q' zaprt kvader, torej kompakten. Preidimo sedaj na še finejšo delitev kvadra P, pri kateri je za $\forall Q'$ vsak kvaderček te delitve vsebovan v eni od omenjenih odprtih kockic. Dobimo delitev $\mathcal{D}$ kvadra P, kjer je vsak kvad iz $\mathcal{D}_2$ vsebovan v neki odprti kockici U_x, kjer velja (**).

$$S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) \leq \sum_{R \in \mathcal{D}_1} \left[\sup\{f(y) \mid y \in R\} - \inf\{f(y) \mid y \in R\}\right] +$$

$$+ \sum_{R \in \mathcal{D}_2} \left[\sup\{f(y) \mid y \in R\} - \inf\{f(y) \mid y \in R\}\right] \leq$$

$$\leq \sum_{R \in \mathcal{D}_1} 2\sup\{f(y) \mid y \in R\} v(R) + \sum_{R \in \mathcal{D}_2} \varepsilon v(R) \leq 2\sup\{f\} \cdot \sum_{R \in \mathcal{D}_1} v(R) + \varepsilon v(P) =$$

(Vsi R iz prve vsote so v $\mathcal{P}$, torej je skupni volumen $< \varepsilon$. (*))

$$= \varepsilon(2\sup|f| + v(P)).$$

Sledi, da je $S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D})$ lahko poljubno majhna. To pomeni, da je f integrabilna. ■ ($\Leftarrow$)

9.12.2003

($\Rightarrow$) Naj bo f integrabilna na kvadru Q. Množica točk nezveznosti je enaka množici točk, v kateri ima f oscilacijo, večjo od 0. Označimo z N množico točk nezveznosti.
Potem je $N = N_1 \cup N_{\frac{1}{2}} \cup N_{\frac{1}{3}} \cup \cdots$, kjer je $N_{\frac{1}{n}} = \{x \mid O(f,x) \geq \frac{1}{n}\}$ naraščajoče zaporedje množic. Ker je f integrabilna, za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ delitev $\mathcal{D}_\varepsilon$ kvadra Q, da je $\varepsilon > S(f,\mathcal{D}_\varepsilon) - s(f,\mathcal{D}_\varepsilon) =$ ⊕

$$= \sum_{P \in \mathcal{D}} \sup\{f(x), x \in P\} v(P) - \sum_{P \in \mathcal{D}} \sup(\{f(x), x \in P\} v(P) =$$

$$= \sum_{P \in \mathcal{D}} \left[\sup\{f(x), x \in P\} - \inf\{f(x), x \in P\}\right] v(P).$$

Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in $N_{\frac{1}{k}} = \{x \in N_{\frac{1}{k}}, x$ na robu kalupa $P\} \cup \{x \in N_{\frac{1}{k}}$, x v notranjosti$\} = S_1 \cup S_2$. Množica S_1 ima volumen 0. (v $\mathbb{R}^n$)
Naj bo $\mathcal{C}$ družina vseh tistih kvadrov delitve D_ε, ki imajo nek element $N_{\frac{1}{k}}$ v svoji notranjosti. Potem je $S_2 \subset \bigcup_{P \in \mathcal{C}} P$.
Če je $P \in \mathcal{C}$, je notranjost P okolica neke točke iz $N_{\frac{1}{k}}$ in je zato $\sup\{f(x), x \in P\} - \inf\{f(x), x \in P\} \geq \frac{1}{k}$. Iz $\oplus$ sledi:

$$\frac{1}{k} \sum_{P \in \mathcal{C}} v(P) \leq \sum_{P \in \mathcal{C}} [\sup\{f(x)\} - \inf\{f(x)\}]\, v(P) \leq$$

$$\leq \sum_{P \in D} [\sup\{f(x)\} - \inf\{f(x)\}]\, v(P) < \varepsilon.$$

Sledi: $\sum_{P \in \mathcal{C}} v(P) < k\varepsilon$ in kvadri iz $\mathcal{C}$ pokrivajo S_2. Za $\forall \varepsilon > 0$ lahko S_2 pokrijemo s končno kvadri, katerih vsota volumnov je $\leq k\varepsilon$. Ker ima S_1 volumen 0, je lahko $\forall \varepsilon > 0$ pokrijemo s končno kvadri z vsoto volumnov $< \varepsilon$.
Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Za $\forall \varepsilon > 0$ lahko $N_{\frac{1}{k}}$ pokrijemo s končno kvadri z vsoto volumnov $< (k+1)\varepsilon$. Torej ima $N_{\frac{1}{k}}$ volumen 0. Zato ima mero 0. N je števna unija $N_{\frac{1}{k}}$ z mero 0, zato ima mero 0. ■

<u>Izrek.</u> Naj bo A omejena množica in $f: A \to \mathbb{R}$ (omejena) integrabilna funkcija.

(a) Če ima A mero 0, je $\int_A f(x)\,dx = 0$.

(b) Če je $f \geq 0$ in $\int_A f = 0$, ima $\{x \in A \mid f(x) > 0\}$ mero 0.

<u>DOKAZ</u> (a) Naj bo $A \subset P$, P kvader, $|f(x)| < M$, $x \in A$. Razširimo f na P: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x); & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$. Integrabilnost pomeni, da je razširjena $\tilde{f}$ integrabilna na P. Če je χ_A karakteristična funkcija $\chi_A = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases}$, je $\tilde{f} = \tilde{f} \cdot \chi_A$. Naj bo D delitev P. Tedaj je $s(\tilde{f}, D) = \sum_{i=1}^{N} \inf\{\tilde{f}(x), x \in P_i\}\, v(P_i) = \sum_{i=1}^{N} \inf\{\tilde{f}(x)\chi_A(x), x \in P_i\}\, v(P_i) \leq M \sum_{i=1}^{N} \inf\{\chi_A(x)\ x \in P_i\}\, v(P_i)$. Če je za nek P_i $\inf\{\chi_A(x); x \in P_i\} \neq 0$, je $\chi_A(x) = 1$ za vse $x \in P_i$, torej $P_i \subset A$, kar ne gre, ker ima A mero 0. Torej je $\inf\{\chi_A(x), x \in P_i\} = 0$ $\forall i$. Sledi: $s(\tilde{f}, D) \leq 0$. Ker je $\sup\{f(x), x \in P_i\} = -\inf\{-f(x), x \in P_i\}$, sledi: $S(\tilde{f}, D) = \sum_{i=1}^{N} \sup\{\tilde{f}(x), x \in P_i\}\, v(P_i) = -s(-\tilde{f}, D) \geq 0$.

Za vsako delitev je $s(\tilde{f}, \mathcal{D}) \leq 0 \leq S(\tilde{f}, \mathcal{D})$. Potem je $\int_A f(x)\,dx =$
$= \inf\{S(\tilde{f}, \mathcal{D})\} = \sup\{s(\tilde{f}, \mathcal{D})\} = 0$.

(b) Naj bo $f \geq 0$ in $\int_A f = 0$.

Naj bo $A_m = \{x \in A;\ f(x) \geq \frac{1}{m}\}$. Pokažemo, da ima vsaka A_m mero 0.

Ker je $\{x \in A;\ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, bo sledilo, da ima ta množica mero 0.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $\int_A f = 0$, obstaja delitev kvadra P, da je $S(\tilde{f}, \mathcal{D}) < \frac{\varepsilon}{m}$. Naj bodo $P_1, \dots, P_k$ tisti kvadri delitve $\mathcal{D}$, ki se sekajo z A_m. Tedaj je $\sup \tilde{f} \geq \frac{1}{m}$ na vsakem od P_i, $i = 1, \dots, k$.
Zato je $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{k} v(P_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \sup\{\tilde{f}(x), x \in P_i\} v(P_i) \overset{f \geq 0}{\leq} \sum_{i=1}^{N} \sup\{\tilde{f}(x), x \in P_i\} v(P_i)$
$= S(\tilde{f}, \mathcal{D}) < \frac{\varepsilon}{m}$. Sledi: $\sum_{i=1}^{k} v(P_i) < \varepsilon$. Za $\forall m$ smo znali A_m pokriti s končno kvadri z vsoto prostornin $< \varepsilon$. Torej ima A_m volumen 0, torej mero 0. ∎

Dokaži, da je $f(x,y) = \begin{cases} \sin x + \sin \frac{1}{y}; & y \neq 0 \\ \sin x; & y = 0 \end{cases}$ integrabilna na $A = \{(x,y);\ x^2 + y^2 < 1\}$.
Nezveznosti so na x-osi in na krožnici.

Lastnosti integrala

__Izrek.__ Naj bosta A, B omejeni v $\mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ in $f, g : A \to \mathbb{R}$ (omejeni) integrabilni funkciji. Tedaj je

1. $f+g$ integrabilna na A in $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$
2. cf integrabilna na A in $\int_A cf = c \int_A f$
3. $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in A \Rightarrow \int_A f \leq \int_A g$
4. $x \mapsto |f(x)|$ je integrabilna na A in $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$
5. Če ima A volumen in $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in A$, je $m\,v(A) \leq \int_A f \leq M\,v(A)$
6. Če je f zvezna na A in A kompaktna povezana množica z volumnom, obstaja $x_0 \in A$, da je $\int_A f = f(x_0)\,v(A)$.
7. Naj bo $f: A \cup B \to \mathbb{R}$ funkcija, $A \cap B$ naj ima mero 0 in naj bodo $f|_A$, $f|_B$ in $f|_{A \cap B}$ integrabilne. Tedaj je f integrabilna na $A \cup B$ in je $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

__Opomba.__ Seveda vse velja v posebnem primeru, ko je A kvader.