Za vsako delitev je $s(\tilde{f}, D) \leq 0 \leq S(\tilde{f}, D)$. Potem je $\int_A f(x)\,dx =$
$= \inf\{S(\tilde{f}, D)\} = \sup\{s(\tilde{f}, D)\} = 0$.

(b) Naj bo $f \geq 0$ in $\int_A f = 0$.

Naj bo $A_m = \{x \in A;\ f(x) \geq \frac{1}{m}\}$. Pokažemo, da ima vsaka A_m mero 0.
Ker je $\{x \in A;\ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, bo sledilo, da ima ta množica mero 0.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $\int_A f = 0$, obstaja delitev kvadra P, da je $S(\tilde{f}, D) < \frac{\varepsilon}{m}$. Naj bodo $P_1, \dots, P_k$ tisti kvadri delitve D, ki se sekajo z A_m. Tedaj je $\sup \tilde{f} \geq \frac{1}{m}$ na vsakem od P_i, $i = 1, \dots, k$.
Zato je $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{k} v(P_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \sup\{\tilde{f}(x), x \in P_i\}\, v(P_i) \overset{f \geq 0}{\leq} \sum_{i=1}^{N} \sup\{\tilde{f}(x), x \in P_i\}\, v(P_i)$
$= S(\tilde{f}, D) < \frac{\varepsilon}{m}$. Sledi: $\sum_{i=1}^{k} v(P_i) < \varepsilon$. Za $\forall m$ smo znali A_m pokriti s končno kvadri z vsoto prostornin $< \varepsilon$. Torej ima A_m volumen 0, torej mero 0. ■

Dokaži, da je $f(x,y) = \begin{cases} \sin x + \sin \frac{1}{y}; & y \neq 0 \\ \sin x; & y = 0 \end{cases}$ integrabilna na $A = \{(x,y);\ x^2 + y^2 < 1\}$.
Nezveznosti so na x-osi in na krožnici.

Lastnosti integrala

Izrek. Naj bosta A, B omejeni v $\mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ in $f, g : A \to \mathbb{R}$ (omejeni) integrabilni funkciji. Tedaj je

1. $f + g$ integrabilna na A in $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$
2. cf integrabilna na A in $\int_A cf = c \int_A f$
3. $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in A \Rightarrow \int_A f \leq \int_A g$
4. $x \mapsto |f(x)|$ je integrabilna na A in $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$
5. Če ima A volumen in $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in A$, je $m v(A) \leq \int_A f \leq M v(A)$
6. Če je f zvezna na A in A kompaktna povezana množica z volumnom, obstaja $x_0 \in A$, da je $\int_A f = f(x_0) v(A)$.
7. Naj bo $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ funkcija, $A \cap B$ naj ima mero 0 in naj bodo $f|_A$, $f|_B$ in $f|_{A \cap B}$ integrabilne. Tedaj je f integrabilna na $A \cup B$ in je $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

Opomba. Seveda vse velja v posebnem primeru, ko je A kvader.

DOKAZ. 1. Naj bosta f, g integrabilni na A. $A \subset P$, $B \subset P$, P kvader. Razširimo f in g v $\tilde{f}$ in $\tilde{g}$ na P. $\tilde{f}$ in $\tilde{g}$ sta integrabilni na P. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $\tilde{f}$ integrabilna na P, $\exists \delta' > 0$, da za vse delitve $\mathcal{D}'$ na kvadre z dolžinami stranic $< \delta'$ in vse izbire $x_i' \in P_i'$ velja $\left|\sum_{i=1}^{N'} \tilde{f}(x_i') v(P_i') - \int_A f\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. (1) Podobno $\exists \delta'' > 0$, da za $\mathcal{D}''$ velja $\left|\sum_{i=1}^{N''} \tilde{g}(x_i'') v(P_i'') - \int_A g\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. (2) Naj bo $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Tedaj $\forall \mathcal{D}$, kjer so dolžine stranic kvadrov $< \delta$ velja:

$$\left| \sum (\tilde{f}(x_i) + \tilde{g}(x_i)) v(P_i) - \left[\int_A f + \int_A g\right] \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum (\tilde{f}(x_i)) v(P_i) - \int_A f \right| + \left| \sum \tilde{g}(x_i) v(P_i) - \int_A g \right| < \varepsilon.$$

Potem je $\tilde{f} + \tilde{g}$ integrabilna na P, torej $f + g$ integrabilna na A in $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$.

3. Naj bo $f(x) \leq g(x)$, $x \in A$. Sledi $\tilde{f}(x) \leq \tilde{g}(x)$, $x \in P$. Če je $\mathcal{D}$ delitev P, je $\tilde{f}(x) \leq \tilde{g}(x)$, sledi $S(\tilde{f}, \mathcal{D}) \leq S(\tilde{g}, \mathcal{D})$, zato je $\int_P \tilde{f} = \inf_{\mathcal{D}} S(\tilde{f}, \mathcal{D}) \leq \inf_{\mathcal{D}} S(\tilde{g}, \mathcal{D}) = \int_P \tilde{g}$, torej $\int_A f \leq \int_A g$.

4. Ker je f integrabilna na A, je $\tilde{f}$ integrabilna na P. Torej po Lebesgue-ovem izreku ima množica točk nezveznosti $\tilde{f}$ mero 0. Vsaka točka nezveznosti $x \mapsto |\tilde{f}(x)|$ je nujno nezveznost $\tilde{f}$. Torej je množica nezveznosti $|f|$ vsebovana v množici točk nezveznosti f, ki ima mero 0. Torej ima množica točk nezveznosti $|\tilde{f}|$ mero 0 in je integrabilna. Potem je $|f|$ integrabilna na A. Iz $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ sledi: $-\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int |f| \Rightarrow \left|\int_A f\right| \leq \int |f|$.

5. Ker je $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in A$, je $\int_A m \leq \int_A f \leq \int_A M$. Integral $\int_A m$ obstaja, ker ima A volumen, torej ∂A ima volumen 0 (t.j. $\int_P \chi_A$ obstaja, imenujemo ga volumen), $\int_A m = \int_A m\chi_A = m\int_A \chi_A = m v(A)$. Potem je $m v(A) \leq \int_A f \leq M v(A)$.

11.12.2003

7. $f_1 = f\chi_A$, $f_2 = f\chi_B$, $f_3 = f\chi_{A\cap B}$. Po predpostavki so vse te funkcije integrabilne na $A \cup B$. $\int_{A\cup B} f_1 = \int_A f$, $\int_{A\cup B} f_2 = \int_B f$, $\int_{A\cup B} f_3 = \int_{A\cap B} f$. Na $A \cup B$ velja: $f = f_1 + f_2 - f_3$ $(\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \chi_{A\cup B})$. Potem je

$$\int_{A\cup B} f = \int_{A\cup B} f_1 + \int_{A\cup B} f_2 - \int_{A\cup B} f_3 = \int_A f + \int_B f - \overbrace{\int_{A\cap B} f}^{0,\ \text{ker je mera } A\cap B = 0} = \int_A f + \int_B f.$$

6. To je posledica (5). Zvezna funkcija f na kompaktni množici doseže svoj maksimum in svoj minimum, $M = \max_{x \in A} f(x)$, $m = \min_{x \in A} f(x)$. Ker je A povezana, je $R_f = [m, M]$. Iz (5) je $m\,v(A) \leq \int_A f \leq M\,v(A)$, torej $m \leq \frac{1}{v(A)} \int_A f \leq M$. Ker f zavzame vse vrednosti med m in M, obstaja $x_0 \in A$, da je $\frac{1}{v(A)} \int_A f = f(x_0)$. ∎

Opomba. $\frac{1}{v(A)} \int_A f$ imenujemo povprečna vrednost funkcije f na A.

Fubini-jev izrek

To bo izrek, ki bo povedal, kdaj lahko n-terni integral zapišemo kot zaporedno integriranje po eni spremenljivki in $(n-1)$-ternega integrala.

Izrek. (Fubini) Naj bosta $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ kvadra in naj bo (omejena) funkcija f definirana in integrabilna na $A \times B$ (t.j. kvader v $\mathbb{R}^{n+m}$). Označimo $f(x,y)$, $x \in A, y \in B$. Za $\forall x \in A$ definirajmo $f_x : B \to \mathbb{R}$ kot $f_x(y) = f(x,y)$ in $\forall y \in B$ $f_y : A \to \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x,y)$.

Če je f_x integrabilna za $\forall x \in A$, je $\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx$.

Če je f_y integrabilna za $\forall y \in B$, je $\int_{A\times B} f = \int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx \right) dy$.

DOKAZ. Naj bo $g(x) = \int_B f(x,y)\,dy = \int_B f_x(y)\,dy$, $\forall x \in A$ naj bo torej f_x integrabilna na B. Dokazati moramo, da je g integrabilna na A in $\int_A g = \int_{A\times B} f$.

Naj bo $A_1, \dots, A_p$ delitev A, $B_1, \dots, B_r$ delitev B. Kvadri P_{ij}, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq r$ tvorijo delitev $A \times B$, imenujmo jo D, $P_{ij} = A_i \times B_j$.

Definiramo: $m_{ij} = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in P_{ij}\}$, $M_{ij} = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in P_{ij}\}$. Po predpostavki je $y \mapsto f_x(y)$ integrabilna za $\forall x \in A$. Torej, če je $c_i \in A_i$, je $g(c_i) = \int_B f(c_i,y)\,dy = \sum_{j=1}^{r} \int_{B_j} f(c_i,y)\,dy$.

Če je $c_i \in A_i$ in $y \in B_j$, je $m_{ij} \leq f(c_i,y) \leq M_{ij}$ (ker je $(c_i,y) \in P_{ij}$).

Torej je $m_{ij}\,v(B_j) \leq \int_{B_j} f(c_i,y)\,dy \leq M_{ij}\,v(B_j)$. (5) Pomnožimo z $v(A_i)$ in upoštevamo $v(A_i)\,v(B_j) = v(P_{ij})$ in seštejemo po j.

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, v(P_{ij}) \le \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \Big(\int_{B_j} f(c_i,y)\,dy \Big)}_{g(c_i)} v(A_i) \le \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, v(P_{ij}).$$

Seštejemo še po i:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, v(P_{ij})}_{s(f,D)} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{p} g(c_i)\, v(A_i)}_{\substack{\text{Riemannova vsota}\\ \text{za } g \text{ na } A \text{ ob delitvi}\\ \text{na } A_i \text{ in izbiri } c_i}} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, v(P_{ij})}_{S(f,D)}.$$

Ker je f integrabilna na $A\times B$, sta leva in desna vsota poljubno blizu, če je delitev dovolj fine, in blizu $\int_{A\times B} f$. Od tu sledi: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, da za $\{A_1,\dots,A_p\}$ delitev A na kvadre z dolžinami stranic $<\delta$ (in $B_1,\dots,B_r$ delitev B na kvadre s stranicami $<\delta$) in $c_i\in A_i$, $i=1,\dots,p$, je Riemannova vsota $\left|\sum_{i=1}^{p} g(c_i)v(A_i) - \int_{A\times B} f\right| < \varepsilon$. Torej je g integrabilna na A in $\int_A g = \int_{A\times B} f$. ■

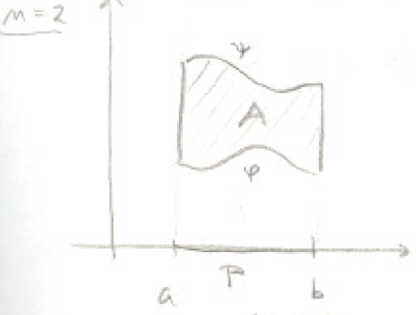
Posledica. Naj bosta $A\subset\mathbb{R}^n$, $B\subset\mathbb{R}^m$ kvadra in $f: A\times B\to\mathbb{R}$ omejena, zvezna funkcija. (Če sta A,B zaprta, omejenost sledi iz zveznosti). Tedaj je $\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \Big(\int_B f(x,y)\,dy\Big)dx = \int_B \Big(\int_A f(x,y)\,dx\Big)dy$.

Posledica. Naj bo P zaprt kvader v $\mathbb{R}^{n-1}$ in $\varphi,\psi: P\to\mathbb{R}$ zvezni funkciji, za katere je $\varphi(x)\le\psi(x)$, $x\in P$. Naj bo $A\subset\mathbb{R}^n$ definirana:

$$A=\{(x,y),\ x\in P,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$$

in $f: A\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je

$$\int_A f = \int_P \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\Big)dx.$$



$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\Big)dx$$

DOKAZ. • A je omejena in zaprta, f pa zvezna, torej je f omejena.

• φ in ψ sta zvezni na zaprtem kvadru P, zato sta omejeni. $Q = P\times[c,d]$

Izberimo kvader $P\times[c,d]$, da bo $A\subset P\times[c,d]$ (torej $\psi\le d$, $\varphi\ge c$). Ker sta φ in ψ zvezni, je mogoče vsakega od grafov $\{(x,\varphi(x))\mid x\in P\}$ in $\{(x,\psi(x))\mid x\in P\}$, pokriti s končno mnogo kvadri s poljubno majhno vsoto volumnov. To je zato, ker sta φ in ψ integrabilni in se pri dovolj fini delitvi P zgornja in spodnja Darboux-jeva vsota razlikujeta poljubno malo, ta razlika pa je ravno skupni volumen kvadrov, ki pokrijejo graf. Potem ima vsak od grafov volumen 0. Naj bo sedaj $\tilde{f}$ na Q definirana kot:

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y); & x \in P,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

$\tilde{f}$ je lahko nezvezna samo vzdolž grafov funkcij φ in ψ, ki pa imata volumen 0 in torej mero 0. Po Lebesgue-ovem izreku je <u>$\tilde{f}$ integrabilna na Q</u>.

Za vsak $x \in P$ je $\tilde{f}_x(y) = \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y); & \varphi(x) \le y \le \psi(x) \\ 0; & c \le y < \varphi(x) \text{ ali } \psi(x) < y \le d \end{cases}$

<u>Za $\forall x \in P$</u> ima $\tilde{f}_x$ največ dve točki nezveznosti: $\varphi(x)$ in $\psi(x)$. Torej je <u>integrabilna na $[c,d]$</u>. Po zgornjem izreku je

$$\int_A f = \int_Q \tilde{f} = \int_P \left(\int_c^d \tilde{f}_x(y)\,dy \right) dx = \int_P \left(\left(\overbrace{\int_c^{\varphi(x)}}^{0} + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} + \overbrace{\int_{\psi(x)}^{d}}^{0} \right) \tilde{f}_x(y)\,dy \right) dx =$$

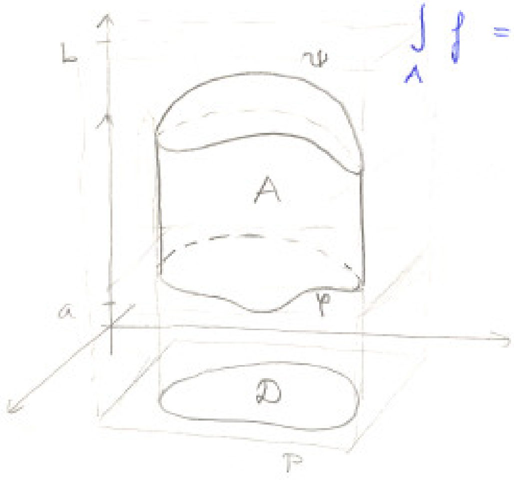
$$= \int_P \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \tilde{f}_x(y)\,dy \right) dx = \int_P \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \ \blacksquare$$

<u>Splošen recept</u>: to uporabimo postopoma.

16. 12. 2003

<u>Posledica</u>. Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ omejena odprta množica, katere rob je iz končnega števila gladkih ploskev. Naj bosta na $\mathcal{D}$ definirani omejeni, zvezni, realni funkciji φ, ψ, da je $\varphi(x) < \psi(x)$ $\forall x \in \mathcal{D}$. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n;\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}$ in naj bo f omejena, zvezna funkcija na A. Tedaj je f integrabilna na A in velja

$$\int_A f = \int_{\mathcal{D}} \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right] dx.$$



<u>DOKAZ</u>. $\exists a, b:\ a < \varphi(x) < \psi(x) < b$ $\forall x \in \mathcal{D}$. Območje $\mathcal{D}$ vložimo v kvader $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Tedaj je $A \subset P \times [a,b]$. Na $\setminus A$ postavimo $f \equiv 0$. Razširjena funkcija ima lahko nezveznosti le na rob območja A, t.j. na $\{(x,y),\ x \in b\mathcal{D},\ a \le y \le b\}$, ki ima mero 0 v $\mathbb{R}^n$,

(saj ima bD, ki je iz končnega števila gladkih kosov mero 0 v $\mathbb{R}^{n-1}$) ali pa na uniji grafov $\{(x,\varphi(x)) \mid x\in D\} \cup \{(x,\psi(x)) \mid x\in D\}$, ki pa imata spet oba mero 0, saj sta φ in ψ zvezni (kot zadnjič). To pomeni, da je po Lebesgue-ovem izreku $\tilde{f}$ integrabilna na Q in zato f integrabilna na A.

Po Fubinijevem izreku na Q je

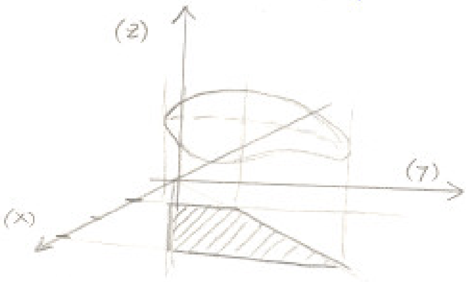
$$\int_A f = \int_Q \tilde{f} = \int_P \left[\int_a^b \tilde{f}(x,y)\,dy\right]dx.$$

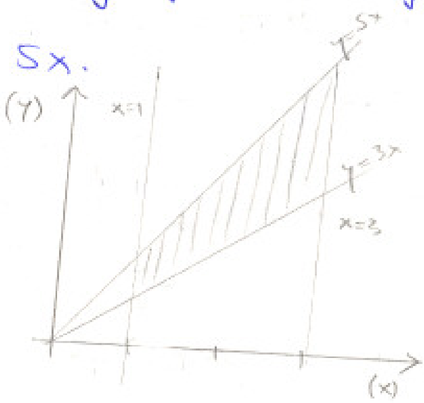
Za $\forall x$ je $y \longmapsto \tilde{f}(x,y)$ integrabilna na $[a,b]$, saj je omejena in ima največ 2 točki nezveznosti: $\varphi(x), \psi(x)$.

$$\int_A f = \int_D \left[\int_a^b \tilde{f}(x,y)\,dy\right]dx = \int_D \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \tilde{f}(x,y)\,dy\right]dx,$$ saj je za $a<y<\varphi(x)$ in $\psi(x)<y<b$ $\tilde{f}(x,y)\equiv 0$.

$$\int_A f = \int_D \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right]dx. \blacksquare$$

<u>Primer</u>. Izračunaj $\underbrace{\iint_D x^2y\,dx\,dy}_{=I}$, kjer je D območje, omejeno z $x=1,\ x=3,\ y=2x,\ y=5x$.

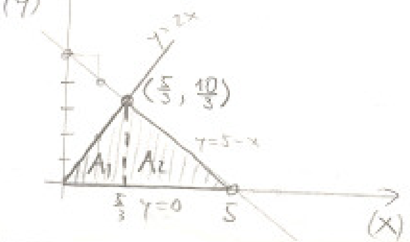




$$I = \int_1^3 \left[\int_{2x}^{5x} x^2y\,dy\right]dx = \int_1^3 \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{2x}^{5x} dx = \int_1^3 \left(\frac{25x^4}{2} - \frac{4x^4}{2}\right)dx = \int_1^3 \frac{21x^4}{2}\,dx =$$

$$= \frac{21}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^3 = \underline{\underline{\frac{21}{2}\cdot\frac{3^5-1}{5}}}$$

<u>Primer</u>. Izračunaj $J = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ na dvakratni integral, če je A omejen z $y=0,\ y=2x,\ y=5-x$.



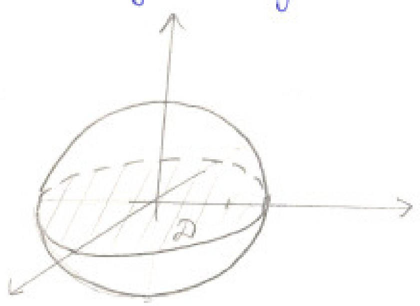
$$J = \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{5/3} dx \int_0^{2x} f(x,y)\,dy + \int_{\frac{5}{3}}^{5} dx \int_0^{5-x} f(x,y)\,dy$$

Če začnemo z int. po y: $y \in [0, \frac{10}{3}]$, x od $\frac{y}{2}$ do $5-y$

$$J = \int_0^{\frac{10}{3}} dy \int_{\frac{y}{2}}^{5-y} f(x,y)\,dx.$$

<u>Primer.</u> $A = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < 1\}$. Prevedi $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ na dvojni integral.



$\mathcal{D} = \{(x,y) ; x^2+y^2 < 1\}$

$x^2+y^2+z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = 1-x^2-y^2$

$\varphi(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$, $\psi(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$A = \{(x,y,z) ; \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y), (x,y) \in \mathcal{D}\}$

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathcal{D}} \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy =$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy.$$

<u>Zamenjava spremenljivk (substitucija) v integralu</u>

Naj bo f zvezna na $[a,b]$, φ zvezno odvedljiva funkcija, ki $[a,b]$ preslika bijektivno na $[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

$\varphi'(t) \ge 0 \quad \forall t.$

Podobno za $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$:

$$\boxed{\int_{\varphi(I)} f = \int_I f \circ \varphi \cdot |\varphi'|}$$

Naj bo A odprta v $\mathbb{R}^n$ in $g : A \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathcal{C}^1$. Pišemo $g = (g_1, \dots, g_n)$, potem je

$$(Dg)(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x), \dots, & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x), \dots, & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

Determinanto te matrike imenujemo Jacobi-jeva determinanta.

$$\det\big((Dg)(x)\big) = (Jg)(x) = \frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x).$$

Izrek. Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica z volumnom in $g: A \to \mathbb{R}^n$ injektivna preslikava razreda $\mathcal{C}^1$. Naj bo $(Jg)(x) \neq 0$ za vse $x \in A$. Naj bo funkcija $x \mapsto (Jg)(x)$ omejena na A. Označimo $B = g(A)$ in predpostavimo, da ima B volumen.

Za vsako integrabilno $f: B \to \mathbb{R}$ je funkcija $x \mapsto (f \circ g)(x) \cdot |(Jg)(x)|$ $: A \to \mathbb{R}$ integrabilna na A in velja

$$\int_B f = \int_A (f \circ g) \, |Jg| = \int_A f(g(x)) \, |(Jg)(x)| \, dx,$$

torej

$$\int_B f(y_1, \dots, y_n) \, dy_1 \dots dy_n = \int_A f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n)) \, |(Jg)(x_1, \dots, x_n)| \, dx_1 \dots dx_n.$$

Opomba. g injektivna + $(Jg)(x) \neq 0 \ \forall x \in A$ pomeni, da g preslika odprto množico A na odprto $g(A) = B$ difeomorfno, t.j. $g^{-1}: B \to A$ je spet razreda $\mathcal{C}^1$.

Opomba. To je posplošitev formule v eni spremenljivki.

Propozicija. Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena množica z volumnom. In naj bo $f: A \to \mathbb{R}$ integrabilna na A. Tedaj je $f|_{\mathrm{int} A}$ integrabilna in je $\int_A f = \int_{\mathrm{int} A} f$.

Opomba. Izrek zgoraj bo vedno uporaben, saj je važno le, kakšna je funkcija v notranjosti A (t.j. če izrek velja za odprte množice, velja tudi za splošne).

DOKAZ. Ker ima A volumen, ima bA mero 0, torej, ker je A omejena, volumen 0. Na množici z mero 0 je vsaka omejena funkcija integrabilna in njen integral enak 0. $\tilde{f} \equiv 0$ izven A na $P \supseteq A$.

$$\int_A f = \int_P \tilde{f} = \int_{\mathrm{int} A} \tilde{f} + \int_{P - \mathrm{int} A} \tilde{f} = \int_{\mathrm{int} A} \tilde{f} + \int_{\substack{A - \mathrm{int} A \\ \cap \\ bA}} \tilde{f} = \int_{\mathrm{int} A} \tilde{f} + 0 = \int_{\mathrm{int} A} f$$

18.12.2003

Izrek. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta, $g: D \to \mathbb{R}^n$ injektivna preslikava razreda $\mathcal{C}^1$. Funkcija $x \mapsto (Jg)(x)$ omejena na D. Naj bo $(Jg)(x) \neq 0$ $(x \in D)$.

Naj bo $B = g(D)$ in imata B in D volumen. Naj bo $A \subset B$ množica z volumnom in $f: A \to \mathbb{R}$ integrabilna. Tedaj je

$$\int_{g^{-1}(A)} (f \circ g)\, |Jg| = \int_A f.$$

<u>DOKAZ</u>. B je odprta množica (izrek o inverzni preslikavi) $g: D \to B$ difeomorfizem. Razširimo f z 0 na ves B. Razširitev je integrabilna. Velja:

$$\int_D (f \circ g)\, |Jg| = \int_B f$$

Ker je $(f \circ g) = 0$ na $g^{-1}(A)$, je

$$\int_D (f \circ g)\, |Jg| = \int_{g^{-1}(A)} (f \circ g)\, |Jg|. \ \blacksquare$$

<u>Primeri</u>. (a) <u>Polarne koordinate v ravnini</u>

$$g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad g: \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$(Jg)(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \Rightarrow |Jg| = r$$

$$g: A \to B, \quad \int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr\,d\varphi.$$

(b) <u>Cilindrične koordinate v prostoru</u>

$$x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi, \ z = z$$

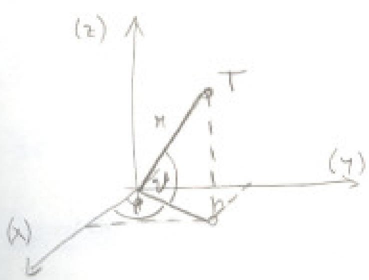
$$g(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

$$g: \{(r,\varphi,z) \mid 0 < r < \infty, 0 \le \varphi < 2\pi, z \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-os}\}$$

$$(Jg)(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

(c) <u>Polarne (sferične) koordinate v prostoru</u>



$$0 < r < \infty, \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ -\tfrac{\pi}{2} < \vartheta < \tfrac{\pi}{2}$$

$$x = r\cos\vartheta\cos\varphi, \ y = r\cos\vartheta\sin\varphi, \ z = r\sin\vartheta$$

$$g: (r,\varphi,\vartheta) = (r\cos\vartheta\cos\varphi, r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta)$$

$$g: (0,\infty) \times [0,2\pi) \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

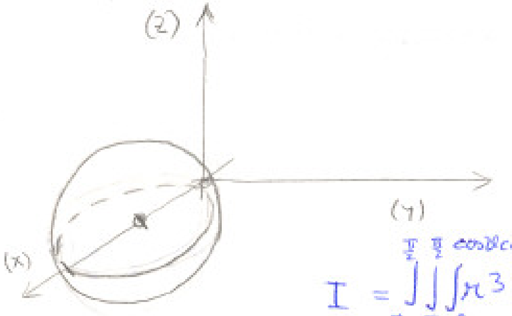
$$(Jg)(r,\varphi,\vartheta) = \begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & +r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta$$

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A f(\cdot,\cdot,\cdot)\, r^2\cos\vartheta\, dr\, d\varphi\, d\vartheta.$$

<u>Zgled.</u> $\iiint_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = ?$, $B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le x\}$

$$x^2 - x + y^2+z^2 = 0 \Rightarrow \left(x-\tfrac12\right)^2+y^2+z^2 \le \tfrac14 = \left(\tfrac12\right)^2$$

$\Rightarrow$ krogla s središčem $(\frac12,0,0)$, $r=\frac12$.



$$I = \iiint_A r\, r^2\cos\vartheta\, dr\, d\varphi\, d\vartheta \qquad \begin{matrix} r^2 \le r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r \le \cos\vartheta\cos\varphi \end{matrix}$$

$$A = \{(r,\varphi,\vartheta) \mid -\tfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\tfrac{\pi}{2},\ -\tfrac{\pi}{2}\le\vartheta\le\tfrac{\pi}{2},\ r\le\cos\vartheta\cos\varphi\}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\vartheta\cos\varphi} r^3\cos\vartheta\, dr\, d\varphi\, d\vartheta = \frac14\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\vartheta \sin^4\varphi\, d\varphi\, d\vartheta =$$

$$= \frac14\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\vartheta\cdot\frac{3\pi}{8}\,d\vartheta = \frac14\cdot\frac{28}{5}\cdot\frac{3\pi}{8} = \underline{\underline{\frac{21\pi}{40}}}$$

Uporaba v fiziki

<u>Uporaba dvojnega integrala</u>

Ploščina: D območje v ravnini z volumnom (ploščina $p(D)=\iint_D 1\,dx\,dy$).

Masa, težišče: $D\subset\mathbb{R}^2$ $\{x,y\}$ naj ima površinsko gostoto $\rho(x,y)$

$$m(D) \approx \sum \rho(x_i,y_i)\,p_i, \quad m(D) = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy,$$

$$x_T = \sum x_i\rho(x_i,y_i)\,p_i \Big/ \sum\rho(x_i,y_i)\,p_i, \text{ v limiti } x_T = \iint_D \frac{x\rho(x,y)\,dx\,dy}{m(D)}.$$

$$y_T = \frac{\iint_D y\rho(x,y)\,dx\,dy}{m(D)}$$

Vztrajnostni moment: $J_x = \iint y^2\rho\,dx\,dy$, $J_y = \iint x^2\rho\,dx\,dy$, $J_z = \iint (x^2+y^2)\rho\,dx\,dy$.

<u>V prostoru</u>

Masa: $m = \sum \rho(x,y,z)\,v_i \longrightarrow m = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Volumen: $v(D) = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz$

Težišče: $x_T = \sum x_i\rho_i(x_i,y_i,z_i)\,v_i \big/ \sum\rho_i(x_i,y_i,z_i)\,v \longrightarrow x_T = \dfrac{\iiint_D x\rho\,dx\,dy\,dz}{m(D)}$

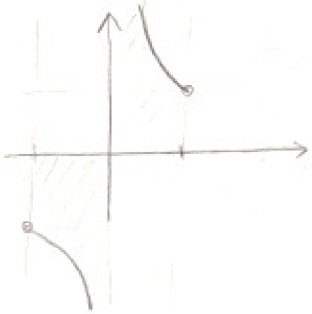
Vz.m.: $T_x = \iiint (y^2+z^2)\rho\,dx\,dy\,dz.$

<u>Opomba.</u> ρ ni nujno povsod zvezna.

Posplošeni Riemannov integral

Kako definirati $\int_D f$, če je D neomejena ali f neomejena?

Primer: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx + \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx = 0$ ali $= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{-1}^{\varepsilon'} \frac{1}{x}\,dx$ ne obstaja.



Skoraj povsod pomeni povsod, razen na množici z mero 0.

23. 12. 2003

$D \subset \mathbb{R}^n$ naj bo množica, z robom z mero 0 (lahko neomejena), $f: D \to \mathbb{R}$ naj bo zvezna skoraj povsod na D. Razširimo z 0 na $\mathbb{R}^n$. Potem je f definirana na $\mathbb{R}^n$, ni pa nujno omejena. Naj bo

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : f \text{ je neomejena na } \forall \text{ ok. } x\}.$$

Množica P je zaprta in vsebovana v množici točk nezveznosti funkcije f. Funkcija f je lahko nezvezna na množici z mero 0 v D ali pa na bD, ki ima mero 0. Torej ima množica točk nezveznosti mero 0. Potem ima P mero 0. Ker je P zaprta, je $\mathbb{R}^n - P$ odprta. Naj bo $\mathcal{K}_f$ družina vseh kompaktnih množic K z volumnom, vsebovanih v $\mathbb{R}^n - P$.

Lema. Če je $K \in \mathcal{K}_f$, je f integrabilna na K, t.j. obstaja $\int_K f$.

DOKAZ. K je omejena in ima volumen. Dalje je f omejena na K. Če namreč ne bi bila, bi obstajalo zaporedje $\{x_n\} \subset K$, da je $f(x_n) > n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ker je K kompaktna, obstaja konvergentno podzaporedje $\{x_{n_k}\} \to x$. Ker je $|f(x_{n_k})| > n_k$ $\forall k$, je $x \in P$. Protislovje, ker je $K \subset \mathbb{R}^n - P$.

Če izven K f razširimo z 0, ima razširjena funkcija nezveznosti na robu, ki ima mero 0, ali pa v notranjih točkah K v točkah nezveznosti prvotne razširjene funkcije. Torej ima množica točk nezveznosti mero 0. Ker je omejena, je (Lebesgue) integrabilna. Torej je f integrabilna na K. ∎

Definicija. Naj bo $f \geq 0$. Definiramo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup\{ \int_K f \,;\, K \in \mathcal{K}\}.$$

Opomba. To je število, ki je lahko enako $+\infty$.

Opomba. Naj bo $K_1 \subset \operatorname{Int} K_2 \subset K_2 \subset \operatorname{Int} K_3 \subset K_3 \subset \cdots$ in $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \mathbb{R}^n - P$, pri čemer je $K_j \in \mathcal{K}_f \;\forall j$. To je mogoče, ker je $\mathbb{R}^n - P$ odprta.

Doma! $\mathbb{R}^n - P = \omega$, $K_n = \{z \in \omega \mid \operatorname{dist}(z, b\Omega) < \frac{1}{n}, |z| < n\}$

Tedaj je (f nenegativna) zaporedje $\{\int_{K_j} f\}$ naraščajoče zaporedje. Če je $K \in \mathcal{K}_f$ poljubna, je kompaktna v $\mathbb{R}^n - P = \bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{Int} K_j$, je $\{\operatorname{Int} K_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ odprto pokritje za K in obstaja končno podpokritje, torej $\exists j: K \subset \operatorname{Int} K_j$.

Potem je $K \subset K_j$ in je $\sup_{j \in \mathbb{N}} \int_{K_j} f = \lim_{j\to\infty} \int_{K_j} f = \sup_{K \in \mathcal{K}_f} \int_K f = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

Zakaj? $\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_{K_j} f = \sup_{K \in \mathcal{K}_f} \int_K f$, jasno je levi supremum manjši od desnega, po drugi strani za $\forall K \in \mathcal{K}_f$ obstaja K_j, da je $K \subset K_j$, torej $\int_K f \leq \int_{K_j} f$, zato je desni supremum manjši od levega.

Naj bo sedaj f poljubnega znaka in predpostavimo, da je $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$.

Pišimo:
$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$$
$$f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

Potem sta f in f_- nenegativni funkciji, ki sta lahko nezvezni le tam, kjer je f nezvezna.

Velja $f = f_+ - f_-$ in $|f| = f_+ + f_-$, $f_+ \leq |f|$, $f_- \leq |f|$.

Predpostavili smo: $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$, t.j. $\sup_n \{\int_{K_n} |f|\} < \infty$. Tedaj je $\sup_n \int_{K_n} f_+ < \infty$ in $\sup_n \int_{K_n} f_- < \infty$. Torej obstajata $\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f_+$ in $\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f_-$, zato obstaja $\lim_{n\to\infty} (\int_{K_n} f_+ - \int_{K_n} f_-) = \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} (f_+ - f_-) = \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f$. Ta limita je neodvisna od zaporedja K_n. To limito bomo definirali kot integral po $\mathbb{R}^n$ funkcije f.

Zaključek. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ množica, katere rob ima mero 0, $f: D \to \mathbb{R}$ zvezna skoraj povsod na D, razširitev $f \equiv 0$ na $\mathbb{R} - D$ je zvezna skoraj povsod na $\mathbb{R}^n$. P naj bo množica točk, kjer f ni omejena. P je zaprta, vsebovana v množici točk nezveznosti f. Izčrpamo odprto $\mathbb{R}^n - P$ s kompaktnimi množicami $K_1 \subset \operatorname{Int} K_2 \subset \cdots$

$\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \mathbb{R}^n - P$, da imajo vse K_j volumen. Na vsaki K_j je f integrabilna.
Predpostavimo, da je $\sup_{n\in\mathbb{N}} \{\int_{K_n}|f|\} < \infty$. Tedaj obstaja $\left(\int_{\mathbb{R}^n} f =\right) \lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f \left(= \int_D f\right)$ in ta limita je neodvisna od $\{K_n\}$. Imenujemo jo $\int_D f$:

$$\int_D f = \lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f.$$

Tej limiti pravimo posplošeni Riemannov integral funkcije f po D.

Primer 1. $\int_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$

$P=\{(0,0)\}$, $K_n = \{(x,y) \mid \frac{1}{n} \le \sqrt{x^2+y^2} \le n\}$, $n\in\mathbb{N}$.

$$\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\frac{1}{n}<\sqrt{x^2+y^2}<n} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\frac{1}{n}<\sqrt{\dots}<1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{r}|J(r,\varphi)|\,dr =$$

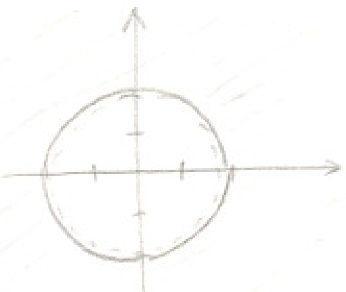
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $J(r,\varphi)=r$, $\frac{1}{n}<r<1$, $\varphi\in[0,2\pi)$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\, [r]_{\frac{1}{n}}^{1} = \int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{n}\right)d\varphi = \left(1-\frac{1}{n}\right)2\pi.$$

$$\iint_D dx\,dy/\sqrt{x^2+y^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)2\pi = 2\pi.$$

Opomba. Tu ni problema, ker je funkcija nenegativna. Če bi imela funkcija pozitivne in neg. vrednosti, bi moralo biti $\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}|f| < \infty$, da limita obstaja in je neodvisna od K_n.

Primer 2. Naj bo $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2>4\}$, $f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$. Izračunaj $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.



$P=\emptyset$, $\mathbb{R}^2-P=\mathbb{R}^2$ izčrpamo z $K_n=\{(x,y), \sqrt{x^2+y^2}\le n\}$, f je nenegativna

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f = \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n}\frac{1}{r^2}\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\iint\left(\frac{1}{r^2}\cdot r\,dr\right)d\varphi = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}d\varphi\int^{n}\frac{1}{r^3}\,dr =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{r^{-2}}{2}\right]_2^n d\varphi = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(+\frac{1}{8}-\frac{1}{2n^2}\right)d\varphi =$$

$-\frac{1}{2n^2}$

$$= \lim\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2n^2}\right)2\pi = \lim\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n^2}\right)\pi = \frac{\pi}{4}$$