IV. KRIVULJE V PROSTORU

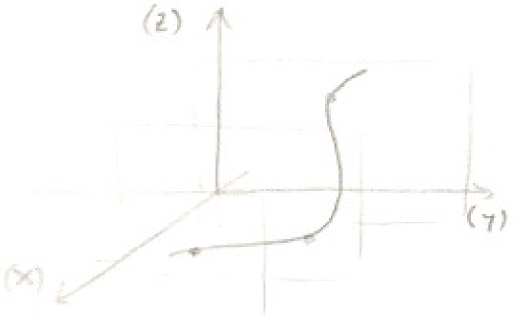
Definicija. *Gladka pot* v prostoru $\mathbb{R}^3$ je preslikava $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$ razreda $\mathcal{C}^1$, t.j. $g=(g_1,g_2,g_3)$, kjer so g_1,g_2,g_3 zvezno odvedljive na $[\alpha,\beta]$.

Tir gladke poti je njena zaloga vrednosti, t.j. $g([\alpha,\beta]) = \{\, g(t) \mid \alpha\le t\le\beta \,\}$.

Gladek lok v $\mathbb{R}^3$ je tir gladke poti $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$, za katero dodatno velja:

- $t_1\ne t_2 \Rightarrow g(t_1)\ne g(t_2)$ (1)
- $g'(t)\ne 0$ za $\forall t,\ \alpha\le t\le\beta$ (2)

Opomba. Pogoj (2) pomeni, da je vsaj eden od $g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t)$ različen od 0, t.j. $g_1'(t)^2+g_2'(t)^2+g_3'(t)^2\ne 0\ \forall\, \alpha\le t\le\beta$.
Če je $x=g_1(t)$, $y=g_2(t)$, $z=g_3(t)$ in npr. $g_1'(t_0)\ne 0$, $t_0: \alpha\le t_0\le\beta$, je mogoče $x=g_1(t)$ v okolici $x_0=g_1(t_0)$ razrešiti na t (izrek o inverzni funkciji), $t=\varphi(x)$, dobimo: $y=\overbrace{g_2(\varphi(x))}^{y(x)}$, $z=\overbrace{g_3(\varphi(x))}^{z(x)}$.
Torej je mogoče košček loka blizu $(x_0,y_0,z_0)=(g_1(t_0),g_2(t_0),g_3(t_0))$ zapisati kot $y=y(x)$, $z=z(x)$, x v ok. x_0, y in z sta funkciji $\mathcal{C}^1$.



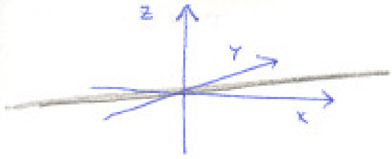
Definicija. Če je $L=g(I)$, $I=[\alpha,\beta]$ in je g gladka funkcija, $g:I\to\mathbb{R}^3$, z lastnostima (1) in (2), pravimo, da je g *regularna parametrizacija* loka L.

6. 1. 2004

Opomba. Regularnih parametrizacij istega loka je veliko. Preprosto se vidi: če sta $g,h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$ istega loka L, obstaja difeomorfizem $\varphi:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$, da je $g(t)=h(\varphi(t))$, $\alpha<t<\beta$. (Tu je $\varphi'(t)\ne 0$ za vse t, $\alpha<t<\beta$, torej je $\varphi'(t)>0$ za vse t ali $\varphi'(t)<0$ za vse t. $\varphi(t)=h^{-1}(g(t))$) Doma: φ je $\mathcal{C}^1$.

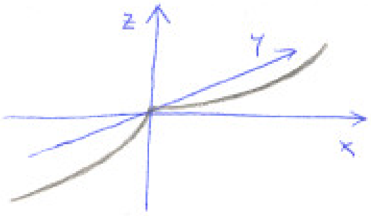
Opomba. Če pogoj $g'(t) \neq 0 \ \forall t \in [\alpha, \beta]$ spustimo, je tir poti lahko gladek lok, lahko pa tudi ne.

Primer. $x = t^3,\ y = t^3,\ z = 0,\ -\infty < t < \infty$



je gladka krivulja

$x = t^2,\ y = t^3,\ z = 0,\ -\infty < t < \infty$



ni gladka krivulja

Krivuljo lahko v prostoru podamo lokalno tudi kot presek dveh ploskev (glej poglavje o izreku o implicitnih funkcijah).

$$(*)\quad \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$ in sta F, G $\mathcal{C}^1$ v okolici točke (a,b,c)

$F(a,b,c) = 0$

$G(a,b,c) = 0$

Če ima matrike

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b,c) & \frac{\partial g}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial g}{\partial z}(a,b,c) \end{bmatrix}$$

maksimalen rang, je v okolici (a,b,c) množica točk (x,y,z), ki izpolnjujejo $(*)$ nek lok.

Če je npr.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}(a,b,c)$$

nesingularna, lahko lokalno $(*)$ razrešimo na y, z, t.j. $y = y(x), z = z(x)$, x v okolici a, kar je lok v $\mathbb{R}^3$.

Dolžina krivulje

Naj bo L lok in $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ njegova regularna parametrizacija. Dolžina loka L je enaka dolžini poti $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^3$. Kot v ravninskem primeru dobimo

$$\ell(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot g_1(t)^2 + \dot g_2(t)^2 + \dot g_3(t)^2}\, dt,$$

če je $g(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$, t.j.

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta |\dot{\vec{r}}(t)|\, dt,$$

$\vec{r}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$, t.j.

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt.$$

Opomba. Definicija je dobra: $\ell(L)$ ni odvisna od izbire regularne parametrizacije. Če je h druga parametrizacija, je $h(t) = g(\varphi(t))$, kjer je $\varphi : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ difeomorfizem.

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{g}_1(t)^2 + \dot{g}_2(t)^2 + \dot{g}_3(t)^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{g}_1(\varphi(\tau))^2 + \dot{g}_2(\varphi(\tau))^2 + \dot{g}_3(\varphi(\tau))^2} \cdot \varphi'(\tau)\, d\tau =$$

$t = \varphi(\tau)$, $dt = \varphi(\tau)\, d\tau$, $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi(\beta) = \beta$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{h}_1(\tau)^2 + \dot{h}_2(\tau)^2 + \dot{h}_3(\tau)^2}\, d\tau.$$

subst. formula in def. h ! $\dot{h}_1(\tau) = \dot{g}_1(\varphi(\tau)) \cdot \dot{\varphi}(\tau)$

Opomba. Če je $s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$, to je dolžina poti od $(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ do $(x(t), y(t), z(t))$, je

$$\dot{s}(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2},$$

kar ponavadi zapišemo:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2,$$

oz. $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

ds imenujemo ločni element dolžine.

Če je parametrizacija regularna, je $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2 > 0$, torej je $\dot{s}(t) > 0$, $\alpha < t < \beta$, torej je $s : [\alpha, \beta] \to [0, \ell(L)]$ strogo naraščajoča funkcija z odvodom, ki je povsod $\neq 0$. Potem obstaja inverzna funkcija $t = t(s) : [0, \ell(L)] \to [\alpha, \beta]$ z odvodom > 0. Zato tedaj lahko reparametriziramo: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s)))$. Parameter s je naravni parameter.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial s} = \dot{\vec{r}} \cdot \frac{1}{\dot{s}} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|},$$

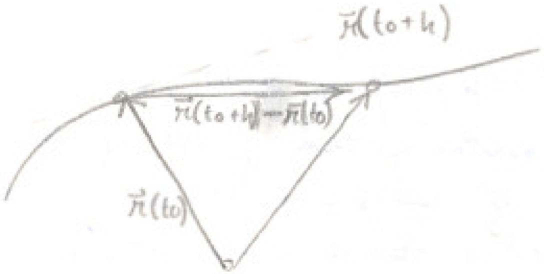
torej je $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right| = 1$. $\underbrace{\int_0^s \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right| ds}_{= s - 0 = s}$ je dolžina loka od $\vec{r}(0)$ do $\vec{r}(s)$

Tangenta na krivuljo (lok)

$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$, $\alpha \le t \le \beta$ regularna parametrizacija loka L

V točki $(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ je tangenta na L premica skozi (x_0, y_0, z_0) s smernim vektorjem $\dot{\vec{r}}(t_0)$

(To je limitna lega sekante skozi $\vec{r}(t_0)$ in $\vec{r}(t_0+h)$, ko gre $h \to 0$).



$\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0) \to 0$ za $h \to 0$

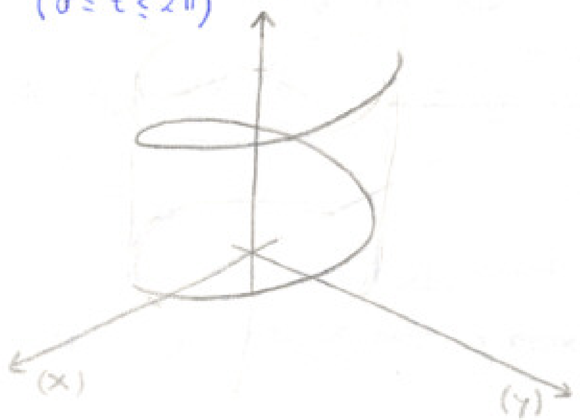
$$\frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h} \to \dot{\vec{r}}(t_0) \neq 0, \; h \to 0$$

Enačbe: $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{bmatrix}$$

Normalna ravnina na L v (x_0, y_0, z_0) je ravnina skozi (x_0, y_0, z_0), pravokotna na tangento v (x_0, y_0, z_0).

$$\vec{R} - \vec{r}(t_0) \cdot \dot{\vec{r}}(t_0) = 0$$

<u>Primer.</u> Dana je vijačnica $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t$. Določi enačbo tangente in normalne ravnine v $(2\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\cdot\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6})$.
$(0 \le t \le 2\pi)$



<u>tangenta</u>

$t_0 = \frac{\pi}{6}$

$\dot{\vec{r}}(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 1)$

$\dot{\vec{r}}(t_0) = (-1, \sqrt{3}, 1)$

$\vec{r}(t_0) = (\sqrt{3}, 1, \frac{\pi}{6})$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

<u>ravnine</u>

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightsquigarrow -(x-\sqrt{3}) + \sqrt{3}(y-1) + (z - \frac{\pi}{6}) = 0$$

Spremljajoči trieder (trirob) krivulje

Naj bo parameter kar naravni parameter s in s' označimo odvod na normalni parameter.

$\vec{r}'(s)$ je vektor v smeri tangente v $\vec{r}(s)$ in njegova dolžina je 1.

Oznaka: $\vec{r}\,'(s) = \vec{\xi}$, enotski vektor v smeri tangente v $\vec{r}(s)$, kjer je s naravni parameter. $\vec{\xi} = \vec{\xi}(s)$ (v smeri naraščajoče vrednosti parametra.

Naj bo parametrizacija razreda $\mathcal{C}^2$ (t.j. lok je $\mathcal{C}^2$ gladek). Tedaj lahko $s \mapsto \vec{\xi}(s)$ odvajamo po s, t.j. izračunamo $\vec{\xi}\,'(s)$.

Ker je $\vec{\xi}(s)\cdot\vec{\xi}(s) = 1$, je $\frac{d}{ds}\vec{\xi}(s)\vec{\xi}(s) = 0$, oz. $\vec{\xi}\,'(s)\vec{\xi}(s) + \vec{\xi}(s)\vec{\xi}\,'(s) = 0$ oz. $\vec{\xi}\,'(s)\vec{\xi}(s) = 0$. Torej je $\vec{\xi}\,'(s) = 0$ ali pa $\vec{\xi}\,'(s) \perp \vec{\xi}(s)$.

(a) $\vec{\xi}\,'(s) \equiv 0$, tedaj je $\vec{\xi}(s) \equiv \vec{a}$, kjer je $\vec{a}$ fiksen enotski vektor. Lok je tedaj kos premice.

8. 1. 2004

(b) Privzemimo, da noben kos loka L ne leži na premici. Tedaj je $\vec{\xi}(s) \neq 0$, razen morda v končnih točkah in $\vec{\xi}(s) \perp \vec{\xi}\,'(s)$. Oglejmo si točk, kjer je $\vec{\xi}\,'(s) \neq 0$. $\vec{\eta} = \vec{\eta}(s) = \frac{\vec{\xi}\,'(s)}{|\vec{\xi}\,'(s)|}$. Vemo, da je $\vec{\eta}(s)$ pravokoten na $\vec{\xi}(s)$, ker je $\vec{\xi}\,'(s) \perp \vec{\xi}(s)$

Definicija. $\vec{\eta}(s)$ je glavna normala (enotski vekt v smeri gl. nor.) loka L v točki $\vec{r}(s)$.

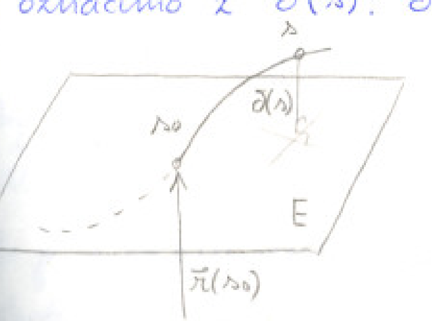
Opomba. $\vec{\xi}(s)$ je odvisen le od točke, v kateri ga računamo, nič pa od orientacije loka ali od točke v kateri začnemo meriti dolžino. (Pri $s \mapsto s_0 + s$ ni razlike v odvodu, pri $s \mapsto -s$ se pri dvakratnem odvodu izraz $2\times$ pomnoži z -1).

Definicija. $\vec{\zeta}(s) = \vec{\xi}(s) \times \vec{\eta}(s)$ imenujemo binormala (enotski vektor v smeri binor.) loka L v točki $\vec{r}(s)$.

Definicija. Trojica $(\vec{\xi}(s), \vec{\eta}(s), \vec{\zeta}(s))$ (ki je pozitivno orientirana trojica paroma pravokotnih enotskih vektorjev) se imenuje spremljajoči trieder loka L v točki $\vec{r}(s)$.

Pritisnjena ravnina na lok

Naj bo $\vec{\xi}\,'(s_0) \neq 0$. Naj bo E poljubna ravnina skozi $\vec{r}(s_0)$ z enotsko normalo $\vec{n}$. Za s blizu s_0 si oglejmo razdaljo točke $\vec{r}(s)$ do ravnine E, označimo z $\delta(s)$. $\delta(s)$ je funkcija s, ki je enaka 0 pri $s = s_0$.



$$\delta(s_0+h) = d(\vec{r}(s_0+h), E) = \vec{n}\left(\vec{r}(s_0+h) - \vec{r}(s_0)\right)$$

$\vec{r}(s_0+h) - \vec{r}(s_0) = h\vec{r}\,'(s_0) + h^2/2\,\vec{r}\,''(s_0) + o(h^3)$ (Taylor za vektorsko funkcijo $\vec{r}(s)$ v ok. s_0 za 3 koord. funk.)

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}(s_0+h) - \vec{r}(s_0)) = h\,\vec{n}\cdot\vec{r}\,'(s_0) + h^2/2\cdot\vec{r}\,''(s_0)\cdot\vec{n} + o(h^3)$$

Funkcija bo blizu s_0 najbližje 0, če bo $\vec r'(s_0)\vec m = \vec r''(s_0)\vec m = 0$. Torej

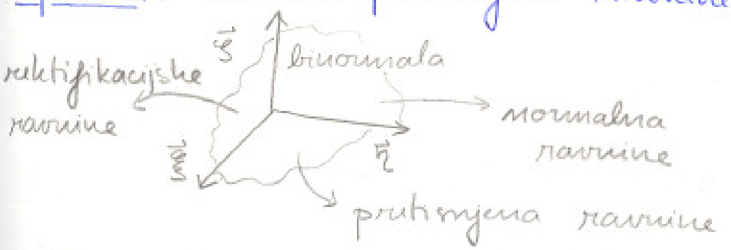
$$\vec m\,\vec\xi(s_0)=0$$
$$\vec m\,\vec\xi'(s_0)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec m\,\vec\xi(s_0)=0\\ \vec m\,\vec\eta(s_0)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \vec m = \pm\vec\zeta(s_0)$$

Ravnina skozi $\vec r(s_0)$ z normalo $\vec\zeta(s_0)$ se imenuje pritisnjena ravnina na lok L v točki $\vec r(s_0)$.

Opomba. To je ravnina, ki se loku v $\vec r(s_0)$ najbolj prilega. Definirana je le, ko je $\vec\xi'(s_0)\neq 0$, t.j. $\vec\eta$ in zato $\vec\zeta$ mogoče definirati.

Opomba. Enačba pritisnjene ravnine: $(\vec R - \vec r(s_0))\cdot\vec\zeta(s_0)=0$.



Enačba pritisnjene ravnine, ko parameter ni naravni:

$$\vec\xi(s_0) = \frac{\partial \vec r}{\partial s}(s_0) = \frac{\dot{\vec r}(t_0)}{|\dot{\vec r}(t_0)|} \qquad \left(t_0 \leftrightarrow s_0,\ s_0 = \int^{t_0}|\dot{\vec r}(t)|\,dt\right)$$

$$\vec\xi'(s_0) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\vec r}(t_0)}{|\dot{\vec r}(t_0)|}\right)\frac{dt}{ds} = \left(\ddot{\vec r}(t_0)|\dot{\vec r}(t_0)| - \dot{\vec r}(t_0)\cdot\frac{\partial}{\partial t}|\dot{\vec r}(t_0)|\right)/|\dot{\vec r}(t_0)|^2\cdot\frac{1}{|\dot{\vec r}(t_0)|}$$

$$\vec\xi'(s_0)\parallel\vec\eta(s_0) \Rightarrow \vec\zeta(s_0) = \vec\xi(s_0)\times\vec\eta(s_0)\parallel$$

$$\frac{\dot{\vec r}(t_0)}{|\dot{\vec r}(t_0)|}\times\left(\frac{\ddot{\vec r}(t_0)|\dot{\vec r}(t_0)| - \dot{\vec r}(t_0)\cdot\frac{\partial}{\partial t}|\dot{\vec r}(t_0)|}{|\dot{\vec r}(t_0)|^2}\cdot\frac{1}{|\dot{\vec r}(t_0)|}\right)$$

$$\frac{\dot{\vec r}(t_0)\times\ddot{\vec r}(t_0)}{|\dot{\vec r}(t_0)^2|}\parallel \dot{\vec r}(t_0)\times\ddot{\vec r}(t_0).$$

Potem je binormala $\dfrac{\dot{\vec r}(t_0)\times\ddot{\vec r}(t_0)}{|\dot{\vec r}(t_0)\times\ddot{\vec r}(t_0)|} = \vec\zeta(s_0)$ $(s_0\leftrightarrow t_0)$.

Enačba ravnine:

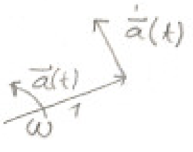
$$(\vec R - \vec r(t_0))(\dot{\vec r}(t_0)\times\ddot{\vec r}(t_0))=0$$

$$[\vec R - \vec r(t_0),\ \dot{\vec r}(t_0),\ \ddot{\vec r}(t_0)]=0.$$

Ukrivljenost krivulj

Pri ravninskih krivuljah je ukrivljenost kotna hitrost tangente, če po krivulji potujemo s hitrostjo 1.

Naj bo $t\mapsto\vec a(t)$ vektorska funkcija, kjer je $|\vec a(t)|=1$. Vemo $\vec a(t)\cdot\dot{\vec a}(t)=0$. Kotna hitrost $= \dfrac{\text{obodna hit.}}{\text{polmer}} = \dfrac{|\dot{\vec a}(t)|}{1}$



Če je $t\mapsto\vec g(t)$ splošna, je skalarna kotna hitrost okoli 0 enaka $\omega = \left|\left(\frac{\vec g(t)}{|\vec g(t)|}\right)'\right| =$

$$= \left| \frac{\dot{\vec g}(t)\,|\vec g(t)| - \vec g(t)\,\frac{\vec g(t)\,\dot{\vec g}(t)}{|\vec g(t)|}}{|\vec g(t)|^2} \right| = \qquad\qquad \frac{d}{dt}|\vec g(t)| = \frac{d}{dt}\left(\vec g(t)\cdot \vec g(t)\right)^{\frac12} = \dots$$

$$= \left|\frac{\dot{\vec g}\,|\vec g|^2 - (\vec g\cdot\dot{\vec g})\,\vec g}{|\vec g|^3}\right| = \left(\frac{|\dot{\vec g}|^2|\vec g|^4 - 2(\vec g\cdot\dot{\vec g})^2|\vec g|^2 + (\vec g\,\dot{\vec g})^2|\vec g|^2}{|\vec g|^6}\right)^{\frac12} =$$

$$= \frac{|\dot{\vec g}|^2|\vec g|^2 - (\vec g\cdot\dot{\vec g})^2}{|\vec g|^4} = \frac{|\vec g\times\dot{\vec g}|}{|\vec g|^2}$$

$(\vec a\times\vec b)(\vec c\times\vec d) = (\vec a\vec c)(\vec b\vec d) - (\vec a\vec d)(\vec b\vec c)$ (Lagrange) za $\vec g\times\dot{\vec g}$

<u>Definicija</u>. <u>Vektorska kotna hitrost</u> vektorske funkcije $t \mapsto \underset{\neq 0}{g(t)}$ $(I \to \mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ okoli 0 je

$$\vec\omega(t) = \frac{\vec g(t)\times\dot{\vec g}(t)}{|\vec g(t)|^2}.$$

<u>Opomba</u>. Če je $|\vec g(t)| = 1$, je $\vec\omega(t) = \vec g(t)\times\dot{\vec g}(t)$.

Skalarna kotna hitrost je $\omega(t) = |\vec\omega(t)|$.

Pri ravninskih krivuljah definiramo ukrivljenost kot skalarno kotno hitrost vektorja v smeri tangente, torej $\left|\left(\frac{\dot{\vec r}(t)}{|\dot{\vec r}(t)|}\right)'\right| = \frac{\dot{\vec r}(t)\times\ddot{\vec r}(t)}{|\dot{\vec r}(t)|^2}$

Krivinski polmer je polmer tistega kroga, da je obodna hitrost pri tej hitrosti enaka 1, t.j. $\omega(t)R(t) = 1$, torej

$$R(t) = \frac{1}{\omega(t)}.$$

<u>Definicija</u>. Naj bo L lok v prostoru, $\vec r = \vec r(s)$ regularna parametrizacija z naravnim parametrom. <u>Fleksijska ukrivljenost</u> loka L v točki $\vec r(s)$ je

$$K(s) = |\vec\xi\,'(s)|.$$

Vektorska kotna hitrost je $\vec\xi\times\vec\xi\,' = \vec\xi\times K\vec\eta = K\vec\zeta$. Fleksijska ukrivljenost je enaka absolutni vrednosti vektorske kotne hitrosti od $\vec\xi$.

<u>Lema</u>. Če je $\vec\zeta(s)$ = konst, je L ravninska krivulja. $(\Leftrightarrow)$

13. 1. 2004

<u>DOKAZ</u>. $\vec\zeta = \vec a$, s naravni parameter, $\vec r = \vec r(s)$

$(\vec r\vec a)' = \vec r\,'\vec a + \vec r\cdot 0 = \vec r\,'\vec a = \vec\xi\cdot\vec a = \vec\xi\vec\zeta = 0 \Rightarrow \vec r\vec a = b$ (konst.)

Torej $\vec r = \vec r(s)$ leži v ravnini.

Izračunajmo kotno hitrost za $\vec\zeta = \vec\zeta(s)$: $\vec\omega = \vec\zeta\times\vec\zeta\,' = (\vec\xi\times\vec\eta)\times(\vec\xi\times\vec\eta)' =$

$$= (\vec\xi\times\vec\eta)\times(\underbrace{\vec\xi\,'\times\vec\eta}_{0,\ \text{ker je } \vec\xi\,' = K\vec\eta} + \vec\xi\times\vec\eta\,') = (\vec\xi\times\vec\eta)\times(\vec\xi\times\vec\eta\,') = \vec\zeta\times(\vec\xi\times\vec\eta\,') = \vec\xi(\vec\zeta\cdot\vec\eta\,') + \vec\eta\,'\underbrace{(\vec\zeta\cdot\vec\xi)}_{0} = (\vec\zeta\vec\eta\,')\vec\xi,$$

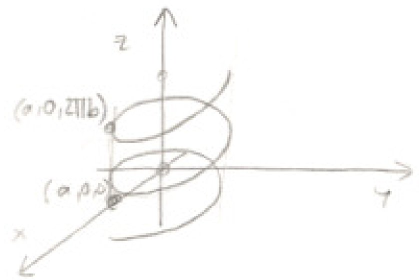
... hitrosti binormale (= enot. norm. vektor na pritisno ravnino):

Definicija. Torzijska ukrivljenost (= zvitost) loka L v točki $\vec{r}(s)$ je
$$\omega(s) = \vec{\zeta}(s)\vec{\eta}(s).$$

Opomba. To je skalarna kotna hitrost ("predznačena") binormale $\vec{\zeta}$, če po L potujemo s hitrostjo 1.

Če je $\vec{\zeta}\cdot\vec{\eta}' > 0$, se $\vec{\zeta}$ vrti okoli $\vec{\xi}$ v pozitivni smeri.

Primer. $\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a, b > 0$, $-\infty < t < \infty$



Uvedemo naravni parameter:
$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{\vec{r}}(t)\dot{\vec{r}}(t)}\,dt.$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = (a(-\sin t), a\cos t, b)$$
$$\dot{\vec{r}}(t)\dot{\vec{r}}(t) = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2+b^2$$
$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,dt = t\sqrt{a^2+b^2}$$

Označimo: $c = \sqrt{a^2+b^2}$ in dobimo $s = ct$, $t = \frac{s}{c}$.

Reparametrizacija: $\vec{r} = (a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\cdot\frac{s}{c})$.
$$\vec{\xi} = \vec{r}'(s) = \left((-a\sin\tfrac{s}{c})\cdot\tfrac{1}{c}, (a\cos\tfrac{s}{c})\cdot\tfrac{1}{c}, \tfrac{b}{c}\right) = \left(-\tfrac{a}{c}\sin\tfrac{s}{c}, \tfrac{a}{c}\cdot\cos\tfrac{s}{c}, \tfrac{b}{c}\right)$$
$$\vec{\xi}' = \left(-\tfrac{a}{c^2}\cos\tfrac{s}{c}, -\tfrac{a}{c^2}\sin\tfrac{s}{c}, 0\right) = -\tfrac{a}{c^2}\left(\cos\tfrac{s}{c}, \sin\tfrac{s}{c}, 0\right)$$
$$|\vec{\xi}'| = \kappa = \tfrac{a}{c^2}\sqrt{\cos^2\tfrac{s}{c}+\sin^2\tfrac{s}{c}} = \tfrac{a}{c^2}$$
$$\vec{\eta} = \frac{\vec{\xi}'}{|\vec{\xi}'|} = \left(-\cos\tfrac{s}{c}, -\sin\tfrac{s}{c}, 0\right)$$
$$\vec{\eta}' = \tfrac{1}{c}\left(\sin\tfrac{s}{c}, -\cos\tfrac{s}{c}, 0\right)$$
$$\vec{\zeta} = \vec{\xi}\times\vec{\eta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & \cdots & \\ \cdots & & \end{vmatrix} = \left(\tfrac{b}{c}\sin\tfrac{s}{c}, -\tfrac{b}{c}\cos\tfrac{s}{c}, \tfrac{a}{c}\right)$$
$$\vec{\omega} = \vec{\zeta}\times\vec{\eta}' = \tfrac{b}{c^2}\sin^2\tfrac{s}{c} + \tfrac{b}{c^2}\cos^2\tfrac{s}{c} + 0 = \tfrac{b}{c^2}$$

Izrek. (Frenet-ove formule)

Naj bo L lok razreda $\mathcal{C}^3$. V vsaki točki, kjer je $\vec{\xi}' \neq 0$, velja:
$$\vec{\xi}' = \kappa\vec{\eta}$$
$$\vec{\eta}' = -\kappa\vec{\xi} + \omega\vec{\zeta}$$
$$\vec{\zeta}' = -\omega\vec{\eta},$$

t.j.
$$\begin{bmatrix}\vec{\xi}\\ \vec{\eta}\\ \vec{\zeta}\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \omega\\ 0 & -\omega & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\xi}\\ \vec{\eta}\\ \vec{\zeta}\end{bmatrix}.$$

Pri tem je $\kappa = |\vec{r}''| = \dfrac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$ in $\omega = \dfrac{\langle\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''\rangle}{|\vec{r}''|^2} = \dfrac{\langle\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}\rangle}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2}$.

V. PLOSKVE V PROSTORU

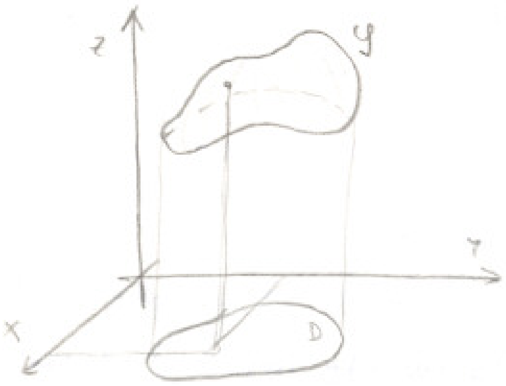
Ogledamo si gladke ploskve.

(a) Eksplicitno podane ploskve

D območje (= odprta, povezana množica v $\mathbb{R}^2$)

f $\mathcal{C}^1$-gladka funkcija na D

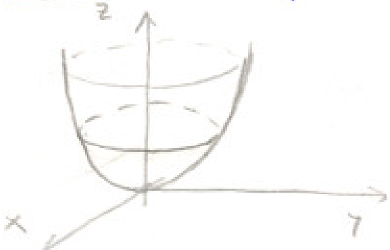
Graf $\mathcal{S} = \{(x,y,f(x,y));\ (x,y)\in D\}$ je gladka ploskev v prostoru.



Podobno: D v xz ravnini, $y = h(x,z)$ ali D v yz in $g(y,z) = x$.

Pravimo, da je $\mathcal{S}$ podana eksplicitno (kot graf funkcije dveh spremenljivk).

Primer. $z = x^2 + y^2$



(b) Implicitno podane funkcije

D območje v prostoru, $F(x,y,z)$ gladka funkcija na D

Naj bo $M = \{(x,y,z) \mid F(x,y,z) = 0\}$ in naj bo $\forall (x,y,z)\in M$

$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\right] \neq 0.$ (*)

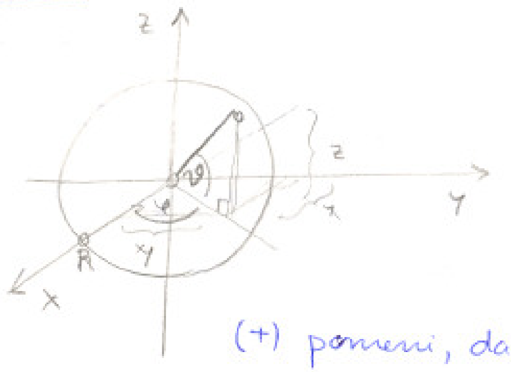
Naj bo $(a,b,c)\in M$. V okolici (a,b,c) je $M = \{(x,y,z);\ F(x,y,z) = 0\}$ in zaradi (*) en od odvodov različen od 0, npr. $\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$.

Tedaj po izreku o implicitni funkciji lahko v okolici (a,b,c) enačbo $F(x,y,z) = 0$ razrešimo na z, t.j. $\exists \varphi(x,y)$, definirana v okolici (a,b), razreda $\mathcal{C}^1$, da je $F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x,y)$ v okolici (a,b,c).

Primer. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ Doma!

(c) Parametrično podane ploskve

Primer.



$$(+)\begin{cases} x = R\cos\vartheta\cos\varphi \\ y = R\cos\vartheta\sin\varphi \\ z = R\sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le \varphi < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta < \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

(+) pomeni, da je sfera s polmerom R in središčem $(0,0,0)$ podana parametrično; parametra sta φ in ϑ: $(\varphi,\vartheta)\in[0,2\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] = D$

Imamo preslikavo $D \ni (\varphi,\vartheta) \longmapsto (R\cos\vartheta\cos\varphi, R\cos\vartheta\sin\varphi, R\sin\vartheta) \in \mathbb{R}^3$
$D\subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$D\subset\mathbb{R}^2$ odprta množica, $F: D\to\mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$ preslikava.
$F(u,w) = (x(u,w), y(u,w), z(u,w))$, $(u,w)\in D$.
Vemo: če je za neki $(u_0,w_0)\in D$ rang$(DF)(u_0,w_0)$ maksimalen (2), t.j. rang

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,w_0) & \frac{\partial x}{\partial w}(u_0,w_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,w_0) & \frac{\partial y}{\partial w}(u_0,w_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,w_0) & \frac{\partial z}{\partial w}(u_0,w_0) \end{bmatrix}$$

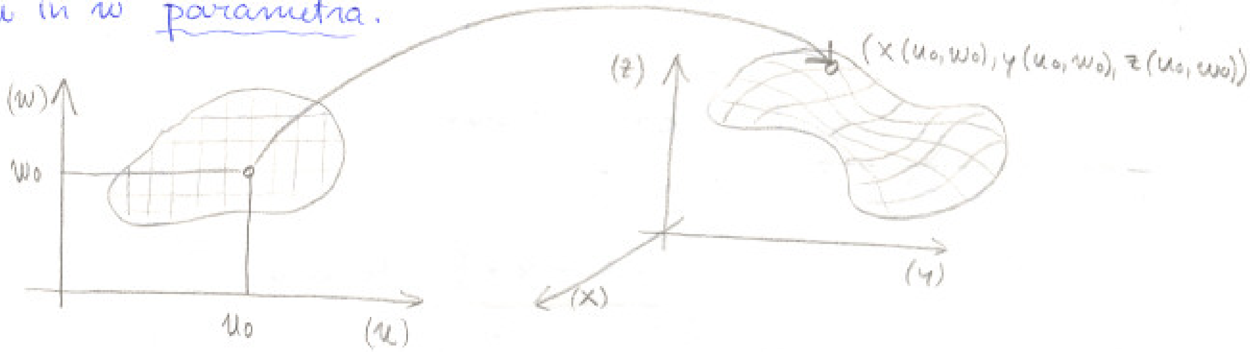
enak 2, tedaj obstaja okolica (u_0,w_0), $U\subset\mathbb{R}^2$, da je $f(U)$ gladka ploskev v prostoru. Če je npr.
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,w_0), & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,w_0), & \frac{\partial y}{\partial w}(u_0,v_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

je po izreku o implicitni funkciji sistem
$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$

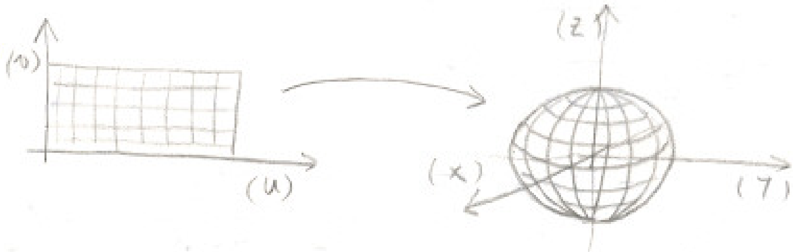
mogoče v okolici (u_0,w_0) razrešiti na in , t.j.
$u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, kar da $z = z(u,w) = z(u(x,y), w(x,y))$, funkcijo x in y. Torej je v okolici $(x(u_0,w_0), y(u_0,w_0), z(u_0,w_0))$ zaloga vrednosti $F: (u,w)\longmapsto(x(u,w), y(u,w), z(u,w))$ graf funkcije $z = z(x,y)$.

To velja lokalno. Globalno se lahko pojavijo samopresečišča. Kot pri krivuljah definiramo:

Naj bo D omejeno območje v (u, w) ravnini in $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ injektivna zvezna preslikava, za katero je $F|D$ razreda $\mathcal{C}^1$ in za katero velja: rang $DF(u,w) \equiv 2$ za vse $(u,w) \in D$. Tedaj je $\mathcal{S} = F(D)$ <u>gladka ploskev</u> v prostoru, podana parametrično. F imenujemo <u>regularna parametrizacija</u> ploskve $\mathcal{S}$. Pri tem sta u in w <u>parametra</u>.



<u>Primer.</u>



Koordinatne krivulje

Koordinatne krivulje na parametrično dani ploskvi $\vec{r} = \vec{r}(u,w)$ so krivulje $u = \text{konst.}$ in $w = \text{konst.}$, torej krivulje

$$w \mapsto \vec{r}(c, w)$$
$$u \mapsto \vec{r}(u, c).$$

(V primeru sfere so to poldnevniki in vzporedniki)

15. 1. 2004

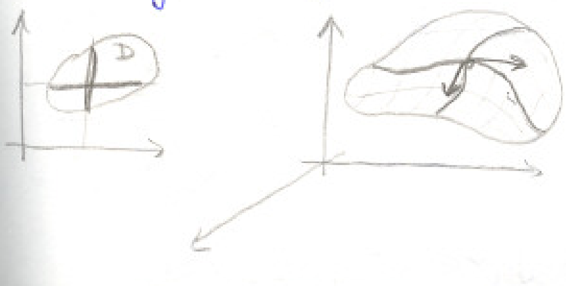
To sta regularni parametrizaciji, saj zaradi pogoja o rangu

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}(u,c), \frac{\partial y}{\partial u}(u,c), \frac{\partial z}{\partial u}(u,c)\right] \neq 0 \text{ in}$$

enako za drugo spremenljivko.

Naj bo $\vec{r} = \vec{r}(u,w)$, $(u,w) \in D$ regularna parametrizacija ploskve $\mathcal{S}$ in $(u_0, w_0) \in D$. Tedaj je $\vec{r}(u_0, w_0) = (x_0, y_0, z_0)$ točka na $\mathcal{S}$. Koordinatni krivulji v tej točki sta $t \mapsto r(u_0,t) = (x(u_0,t), y(u_0,t), z(u_0,t))$ in

$t \mapsto r(t, w_0) = (x(t,w_0), y(t,w_0), z(t,w_0))$.



Tangentna vektorja v $T(x_0, y_0, z_0)$ sta

$$\left[\frac{dx}{\partial w}(u_0,t), \frac{\partial y}{\partial w}(u_0,t), \frac{\partial z}{\partial w}(u_0,t)\right]_{t=w_0} = \vec{r}_w(u_0,w_0) \text{ in}$$

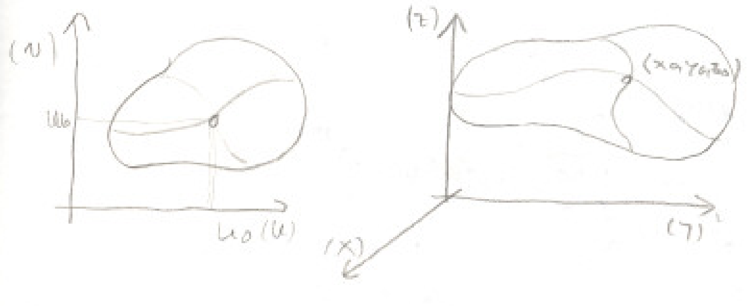
$\vec{r}_u(u_0, w_0)$.

Zahteva o rangu
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$
pove, da sta stolpca v matriki linearno neodvisna. Pri (u_0, w_0) sta stolpca $\vec{r}_u(u_0, w_0)$ in $\vec{r}_w(u_0, w_0)$. in sta lin. neodvisna.
Lahko se zgodi, da sta $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_w$ v vsaki točki med seboj pravokotna. Potem ena družina koordinatnih krivulj seka drugo pravokotno (primer: sfera).

Zgled. $\vec{r} = (a\cos\varphi\cos\vartheta, a\sin\varphi\cos\vartheta, a\sin\vartheta)$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$
$$\vec{r}_\varphi = (-a\sin\varphi\cos\vartheta, a\cos\varphi\cos\vartheta, 0)$$
$$\vec{r}_\vartheta = (-a\cos\varphi\sin\vartheta, -a\sin\varphi\sin\vartheta, a\cos\vartheta)$$
$$\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\vartheta = a^2 \sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta - a^2\cos\varphi\cos\vartheta\sin\varphi\sin\vartheta + 0 = 0$$

Tangencialna ravnina, normala na ploskev

Pri mnogoterosti smo videli, da v vsaki točki tangentni vektorji na vse krivulje skozi to točko ležijo v isti ravnini.
Ko je $\vec{r} = \vec{r}(u,w) = (x(u,w), y(u,w), z(u,w))$, $u = u(t)$, $w = w(t)$ in $u(0) = u_0$, $w(0) = w_0$, $\vec{r}(u_0, w_0) = (x_0, y_0, z_0)$



$t \longmapsto \vec{r}(u(t), w(t)) = (x(u(t), w(t)), \dots)$ je krivulja na $\mathcal{S}$. Pri $t=0$ smo v (x_0, y_0, z_0). Tangentni vektor pri $t=0$ je
$$\left[\frac{d}{dt}[x(u(t),w(t)), \frac{d}{dt} y(u(t),w(t)), \frac{d}{dt} z(u(t), w(t))\right]_{t=0} =$$
$$= \left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{dw}{dt}, \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dt}, \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}\right] =$$
$$= \frac{du}{dt}(0)\left[\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right](u_0, w_0) + \frac{dw}{dt}(0)\left[\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w}\right](u_0, w_0) =$$

$= \frac{du}{dt}(0)\,\vec{r}_u(u_0,w_0) + \frac{dw}{dt}(0)\,\vec{r}_w(u_0,w_0).$

Vsi tangentni vektorji v (x_0,y_0,z_0) na krivulje na ploskvi, ki potekajo skozi (x_0,y_0,z_0), ležijo na ravnini, napeti na linearno neodvisna vektorja $\vec{r}_u(u_0,w_0)$ in $\vec{r}_w(u_0,w_0)$.
To je tangencialna (tangentna) ravnina na ploskev v $(x_0,y_0,z_0) = (x(u_0,w_0), y(u_0,w_0), z(u_0,w_0))$.

Normalni vektor tangencialne ravnine je $\vec{r}_u(u_0,w_0) \times \vec{r}_w(u_0,w_0)$, zato je enačba

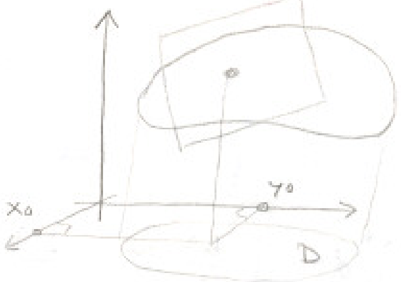
$$[\vec{R} - \vec{r}(u_0,w_0)] \cdot [\vec{r}_u(u_0,w_0) \times \vec{r}_w(u_0,w_0)] = 0$$

$$[\vec{R} - \vec{r}(u_0,w_0),\ \vec{r}_u(u_0,w_0),\ \vec{r}_w(u_0,w_0)] = 0.$$

Enačba normale na S v točki $\vec{r}(u_0,w_0)$ (t.j. premice skozi $\vec{r}(u_0,w_0)$, pravokotne na tangencialno ravnino) je

$$\vec{R} = \vec{r}(u_0,w_0) + \lambda\, \vec{r}_u(u_0,w_0)\ \vec{r}_w(u_0,w_0). \qquad -\infty < \lambda < \infty$$

- Če je ploskev dana eksplicitno: $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$:



S zapišemo v parametrični obliki, kjer sta parametra kar x in y:

$$\left.\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= z(x,y) \end{aligned}\right\} (x,y) \in D.$$

$\vec{r}_x(x_0,y_0) = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0))$, $\vec{r}_y(x_0,y_0) = (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0))$.

Standardna oznaka $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$.

$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-p, -q, 1)$. Torej je normalni vektor tangentne ravnine enak $(-p,-q,1) = (-\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0), 1)$.

Tangencialna ravnina je $(\vec{R} - \vec{r}_0)(-p,-q,1) = 0$, normala je $\vec{R} = \vec{r}_0 + \lambda(-p,-q,1)$, kjer je $r_0 = (x_0, y_0, z(x_0,y_0))$.

- Če je ploskev dana implicitno: $M = \{(x,y,z) \in \Omega ;\ f(x,y,z) = 0\}$ in $df = [\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial f}{\partial z}] \neq 0$ na M.

Naj bo $(x_0, y_0, z_0) \in M$ in $t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$ gladka krivulja na ploskvi, za katero je $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$.
Ker je krivulja na ploskvi, je $f(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Zato je $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,\cdot,\cdot)\frac{\partial x}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),\cdot,\cdot)\frac{\partial y}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\cdot,\cdot,\cdot)\frac{dz}{dt}(t) \equiv 0$$

$t = 0$ $$\frac{\partial f}{\partial x}(\ )\,\dot{x}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\ )\cdot\dot{y}(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\ )\,\dot{z}(0) = 0.$$

Torej je tangentni vektor $(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0))$ pravokoten na $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\ ), \frac{\partial f}{\partial y}(\ ), \frac{\partial f}{\partial z}(\ )\right) \neq 0$ na M. Potem so vsi tangentni vektorji v (x_0, y_0, z_0) na krivulje v M pravokotni na

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right](x_0, y_0, z_0),$$

ki je torej normalni vektor tangencialne ravnine.

$$0 = (\vec{R} - \vec{R}_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)$$
$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\ ), \frac{\partial f}{\partial y}(\ ), \frac{\partial f}{\partial z}(\ )\right), \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Merjenje na ploskvi

Dolžina krivulje na ploskvi

Naj bo M gladka ploskev z regularno parametrizacijo $\vec{r} = \vec{r}(u, w)$, $(u, w) \in D$.
Naj bo $\alpha : I \longrightarrow D$ gladka pot, $I = [a, b]$, $\alpha(t) = (u(t), w(t))$.
Tedaj je $t \mapsto (x(u(t), w(t)), y(u(t), w(t)), z(u(t), w(t)))$ gladka pot na ploskvi M.
Dolžina poti na M:

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{\partial t}\right)^2}\, dt.$$

$$x = x(u(t), w(t)) \Rightarrow \frac{\partial x}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}, \ldots (y, z \text{ enako})$$

Če je $\vec{R}(t) = (x(u(t), w(t)), y(u(t), w(t)), z(u(t), w(t)))$, je $\dot{\vec{R}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\dot{w} = \vec{r}_u \cdot \dot{u} + \vec{r}_w \cdot \dot{w}$. $\quad l = \int_a^b \sqrt{\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}}}\, dt$

$$(\vec{r}_u\dot{u}+\vec{r}_w\dot{w})^2=(\vec{r}_u\vec{r}_u)\cdot\dot{u}^2+2\vec{r}_u\vec{r}_w\dot{u}\dot{w}+(\vec{r}_w\vec{r}_w)\dot{w}^2=$$

Označimo: $\vec{r}_u\vec{r}_u=E$, $\vec{r}_u\vec{r}_w=F$, $\vec{r}_w\vec{r}_w=G$ $\longrightarrow$ $=E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{w}+G\dot{w}^2$.

$$l=\int_a^b\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{w}+G\dot{w}^2}\,dt$$

$$ds^2=E(du)^2+2F(du)(dw)+G(dw)^2$$

$$s(t)=\int_a^b\sqrt{E\dot{u}(t)^2+2F\dot{u}(t)\dot{w}(t)+G\dot{w}(t)^2}\,dt$$

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right)+G\left(\frac{dw}{dt}\right)^2}$$

E, F in G so odvisni od točke na ploskvi, ne od krivulje.

Definicija. Kvadratna forma $\Phi_1(u,w;a,b)=E(u,w)a^2+2F(u,w)ab+G(u,w)b^2$ se imenuje prva fundamentalna forma ploskve M.

17.02.2004

Primer. Sfera

$$\vec{r}=R(\cos\varphi\cos\vartheta,\ \sin\varphi\cos\vartheta,\ \sin\vartheta)$$
$$\vec{r}_\varphi=R(-\sin\varphi\cos\vartheta,\ \cos\varphi\cos\vartheta,\ 0)$$
$$\vec{r}_\vartheta=R(-\cos\varphi\sin\vartheta,\ -\sin\varphi\sin\vartheta,\ \cos\vartheta)$$

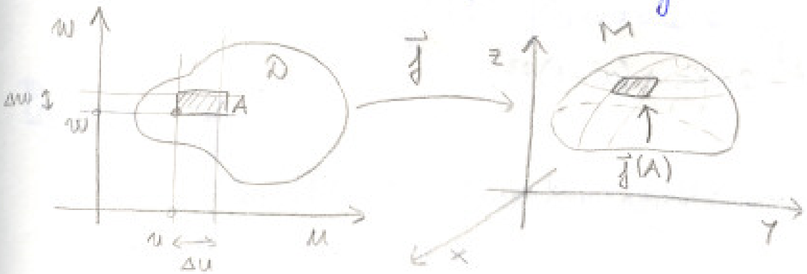
$E=R^2\cos^2\vartheta$, $F=0$ (krivočrtni koord. sistem je pravokoten)

$G=R^2$

$$\Phi_1(\varphi,\vartheta;a,b)=R^2\cos^2\vartheta\,a^2+R^2b^2$$

Površina ploskve

Naj bo $\vec{r}=\vec{r}(u,w)=\vec{f}(u,w)$ regularna parametrizacija ploskve M.



Naj bo A pravokotnik z oglišči (u,w), $(u+\Delta u,w)$, $(u,w+\Delta w)$, $(u+\Delta u,w+\Delta w)$.

$\vec{f}(A)$ je krivočrtni paralelogram, določen z vektorjema

$$\vec{f}(u+\Delta u,w)-\vec{f}(u,w)\approx\frac{\partial\vec{f}}{\partial u}(u,w)\Delta u$$
$$\vec{f}(u,w+\Delta w)-\vec{f}(u,w)\approx\frac{\partial\vec{f}}{\partial w}(u,w)\Delta w$$

Ploščina $\vec{f}(A)\approx|\vec{f}_u\times\vec{f}_w|\,\Delta u\,\Delta w=|\vec{f}_u\times\vec{f}_w|\cdot pl(A)$. Celotna ploščina (površina) ploskve M je približno $\sum_k |\vec{f}_u \times \vec{f}_w|(u_k, w_k) \cdot p_k$.

V limiti dobimo

$$\boxed{P(M) = \iint_D |\vec{f}_u \times \vec{f}_w| \, du\,dw.}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$|\vec{f}_u \times \vec{f}_w|^2 = (\vec{f}_u \cdot \vec{f}_u)(\vec{f}_w \cdot \vec{f}_w) - (f_u \cdot f_w)^2 = EG - F^2$$

$$\boxed{P(M) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du\,dw}$$

__Opomba__. Definicija $P(M)$ je neodvisna od izbire parametrizacije (odvisna je le od ploskve M).

Izberimo dve parametrizaciji: $\vec{r} = \vec{f}(u, w)$, $(u, w) \in D$
$\vec{r} = \vec{g}(\ \ , \tau)$, $(\sigma, \tau) \in \Delta$.

Zaradi regularnosti parametrizacij obstaja difeomorfizem $h : \Delta \to D$, da je $\vec{g} = \vec{f} \circ h$. (Definiramo $h = (\vec{f})^{-1} \circ \vec{g}$.)

Tedaj je
$$\vec{g}_\sigma = \vec{f}_u \cdot u_\sigma + \vec{f}_w \cdot w_\sigma. \quad h(\sigma, \tau) = (u(\sigma, \tau), w(\sigma, \tau))$$
$$\vec{g}_\tau = \vec{f}_u \, u_\tau + \vec{f}_w \cdot w_\tau$$

$$\vec{g}_\sigma \times \vec{g}_\tau = (\vec{f}_u u_\sigma + \vec{f}_w w_\sigma) \times (\vec{f}_u u_\tau + \vec{f}_w w_\tau) = \vec{f}_u \times \vec{f}_w \cdot u_\sigma w_\tau + \vec{f}_w \times \vec{f}_u \, w_\sigma u_\tau =$$
$$= \vec{f}_u \times \vec{f}_w (u_\sigma w_\tau - w_\sigma u_\tau) \qquad Jh = \begin{bmatrix} u_\sigma & w_\sigma \\ u_\tau & w_\tau \end{bmatrix}$$

$$|\vec{g}_\sigma \times \vec{g}_\tau| = |\vec{f}_u \times \vec{f}_w| \cdot |\det Jh|$$

$$P_g(M) = \iint_\Delta |\vec{g}_\sigma \times \vec{g}_\tau| \, d\sigma\,d\tau = \iint_\Delta |\vec{f}_u \times \vec{f}_w| \, |\det Jh| \cdot d\sigma\,d\tau = $$

nove spremenljivke v dv. int.

$$= \iint_D |\vec{f}_u \times \vec{f}_w| \, du\,dw = P_f(M)$$

__Primer__. Sfera

$\vec{r} = (a\cos\varphi\cos\vartheta, a\sin\varphi\cos\vartheta, a\sin\vartheta)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\vec{r}_\varphi = (-a\sin\varphi\cos\vartheta, a\cos\vartheta\cos\varphi, 0)$

$\vec{r}_\vartheta = (-a\cos\varphi\sin\vartheta, -a\sin\varphi\sin\vartheta, a\cos\vartheta)$

$E = a^2\cos^2\vartheta$, $F = 0$, $G = a^2$

$$P(M) = \iint_D \sqrt{a^4\cos^2\vartheta} \, d\varphi\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos\vartheta \, d\vartheta = a^2\int_0^{2\pi} d\varphi \left[\sin\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= a^2\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 2 = 2[\varphi]_0^{2\pi} \cdot a^2 = \underline{4\pi a^2}$$

Recimo, da je ploskev M podana eksplicitno: $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$.
x in y vzamemo za parametra: $x = x$, $y = y$, $z = f(x,y)$. $\vec{r} = (x, y, f(x,y))$

$\vec{r}_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\vec{r}_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

$E = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$, $F = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$, $G = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

Opomba. $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx dy.}$