VI. VEKTORSKA ANALIZA

Vektorske diferencialne operacije

Ves čas smo v $\mathbb{R}^3$.

Ortonormirana baza: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$.

Baza $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je pozitivno orientirana, če je $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (neg. orient., če je $\vec{c} = -\vec{a}\times\vec{b}$)

Splošno: če so $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ baza $\mathbb{R}^3$, je orientirana pozitivno $\Leftrightarrow [\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}] > 0$.

Definicija. Naj bo $U \subset \mathbb{R}^3$ odprta množica. Zvezna funkcija $f: U \to \mathbb{R}$ se imenuje skalarno polje, zvezna funkcija $g: U \to \mathbb{R}^3$ pa vektorsko polje.

Primer. Temperatura v določeni točki nam podaja skalarno polje, hitrost gibanja delca v tekočini je vektorsko polje.

Izražanje polja v dani bazi

Recimo, da je $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ONB za $\mathbb{R}^3$.

$$f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

$$g(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = g_1(x_1\vec{e}_1 + x_2e_2 + x_3e_3)\cdot\vec{e}_1 + g_2(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)\vec{e}_2 + g_3(x_1e_1 + \dots)\vec{e}_3 =$$
$$= (\varphi_1(x_1,x_2,x_3), \varphi_2(x_1,x_2,x_3), \varphi_3(x_1,x_2,x_3))$$

Opomba. Jasno v drugačni bazi dobimo drugačne $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi$.

Nivojske ploskve sk. polja

Definicija. Nivojska ploskev skalarnega polja f je $\{T \in U;\ f(T) = \underset{\text{dana konst.}}{c}\} = M$.

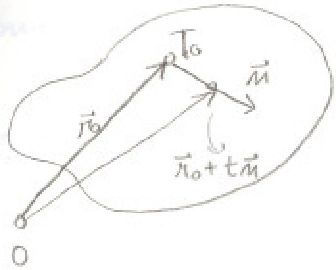
Opomba. To bo ploskev (mnogoterost), če $df(T) \neq 0$ za $\forall T \in M$. (Velja za $f \in \mathcal{C}^1(U)$)

Odvod skalarnega polja v dani smeri

Naj bo $f: D \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$ gladko skalarno polje in $T_0 \in D$. Izberimo še enotski vektor $\vec{n}$.

Odvod polja f v točki T_0 v smeri $\vec{n}$ je

$$\left[\frac{d}{dt} f(\vec{r}_{T_0} + t\vec{n})\right]\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{r}_0 + t\vec{n}) - f(\vec{r}_0)}{t}.$$



Opomba. Parcialni odvodi so primeri smernih odvodov, npr. $\frac{\partial f}{\partial x} \dots \vec{n} = \vec{i}$, $\frac{\partial f}{\partial y} \dots \vec{n} = \vec{j}$, $\frac{\partial f}{\partial z} \dots \vec{n} = \vec{k}$.

Oznaka: $\frac{df}{d\vec{n}}(T_0)$

Naj bo $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(T_0) = \left[\frac{\partial}{\partial t} f(x_0 + tn_x, y_0 + tn_y, z_0 + tn_z)\right]_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot n_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, n_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot n_z =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(T_0), \frac{\partial f}{\partial y}(T_0), \frac{\partial f}{\partial z}(T_0)\right) \cdot \vec{n}.$$

Definicija. Vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(T_0), \frac{\partial f}{\partial y}(T_0), \frac{\partial f}{\partial z}(T_0)\right)$ se imenuje gradient polja f v T_0.

Oznaka: $(\operatorname{grad} f)(T_0)$

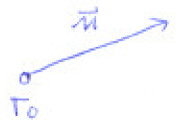
Torej je $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(T_0) = (\operatorname{grad} f)(T_0) \cdot \vec{n} = \nabla f(T_0)$.

Zaliko tudi $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, parcialni dif. operator prvega reda.

19.2.2004

$\nabla : \mathcal{C}^k(D) \longrightarrow (\mathcal{C}^{k-1}$ vekt. polj na $D)$

Povezava med ∇, smernim odvodom in diferencialom: $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$



$$\frac{df}{d\vec{n}}(T_0) = \nabla f(T_0) \cdot \vec{n} = Df(T_0)(\vec{n}) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, n_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, n_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, n_3$$

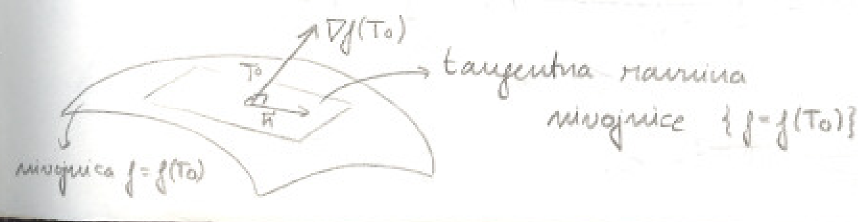
Zaključek: naj bo $|\vec{n}| = 1$. Potem je

$$-|\nabla f(T_0)| \leq Df(T_0)(\vec{n}) \leq |\nabla f(T_0)|.$$

Desna neenakost je enakost $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ kaže v smer gradienta, torej je rast funkcije največja v smeri gradienta.

$$Df(T_0)(\vec{n}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \nabla f(T_0).$$

Če je $\nabla f(T_0) \neq 0$, potem enačba $\nabla f(T_0) \cdot \vec{n} = 0$ definira dvodimenzionalno ploskev v $\mathbb{R}^3$ skozi T_0.



S pomočjo operatorja ∇ definiramo še dve operaciji na vektorskih poljih.

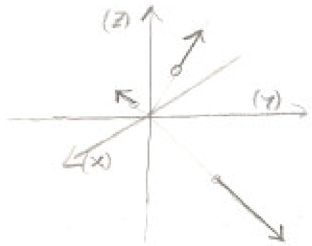
Divergenca vektorskega polja

$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$.

Naj bo $\vec{F}$ razreda $\mathcal{C}^1$ na $D \subset \mathbb{R}^3$.

$$(\operatorname{div} \vec{F})(x,y,z) := \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}$$ ... divergenca v.p.

Primer. $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$



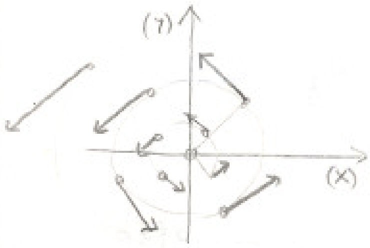
radialno polje

$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$ ... v splošnem je to funkcija

$\operatorname{div} \vec{F}$ meri jakost izvorov (kjer je >0) in ponorov (kjer je <0) polja $\vec{F}$

$\vec{F}$ je solenoidalno, če je $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$ (ni izvorov in ponorov).

Primer. $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, 0)$.



$\operatorname{div} \vec{F} = 0$

Rotor vektorskega polja

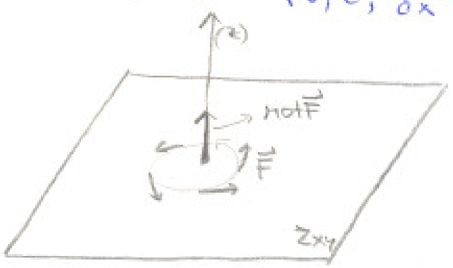
$\vec{F}$ naj bo $\mathcal{C}^1$ polje na $D \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (P, Q, R)$

$$\operatorname{rot} \vec{F} := \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z)$ meri jakost in smer vrtincev polja $\vec{F}$

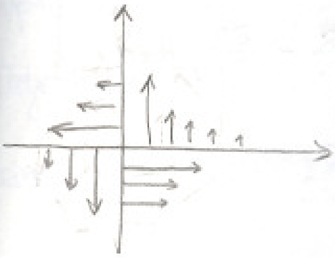
Primer. $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ (ravninsko polje), P, Q neodvisni od z

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$



Primer. $\operatorname{rot}(-y\vec{i} + x\vec{j}) = 2\vec{k}$

Primer. $\vec{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$, v izhodišču ima pol, je gladko na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



$$|\vec{F}_{(x,y)}| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{rot}\, \vec{F} = \vec{0}$$

Zveze med grad, rot, div

$$\begin{tikzcd}
\text{funkcije} \arrow[r, "\text{grad}", "\nabla"'] \arrow[rr, bend right, "0"'] & \text{vektorska polja} \arrow[r, "\text{rot}", "\nabla\times"'] \arrow[rr, bend left, "0"] & \text{vekt. polja} \arrow[r, "\text{div}", "\nabla\cdot"'] & \text{funkcije}
\end{tikzcd}$$

$$\text{rot}(\text{grad}\, f) = 0, \quad \text{div}(\text{rot}\, \vec{F}) = 0$$

Trditev. Naj bo $f \in \mathcal{C}^2(D)$. Potem je $\text{rot}(\text{grad}\, f) \equiv 0$ na D.

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

Če je $F = (P, Q, R)$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^2$ na D ($P, Q, R \in \mathcal{C}^2$), je $\text{div}(\text{rot}\, \vec{F}) = 0$ na D.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

DOKAZ. $\text{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$$\text{rot}(\text{grad}\, f) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\substack{\text{mešani parc. odvodi} \\ \Rightarrow\ = 0}} \vec{i} + \dots = 0.$$

(Trditev sledi, ker so mešani parcialni odvodi drugega reda neodvisni od vrstnega reda odvajanja pri $\mathcal{C}^2$ funkcijah.)

$$\text{div}(\text{rot}\, \vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \dots = 0. \blacksquare$$

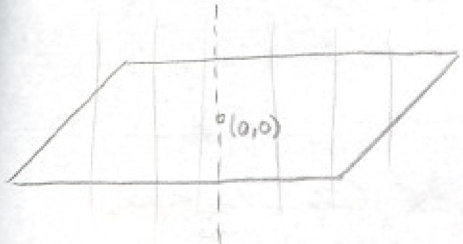
Definicija. Če je $\text{div}\, \vec{F} = 0$, je $\vec{F}$ solenoidalno. Če je $\text{rot}\, \vec{F} = 0$, je $\vec{F}$ irotacionalno. Če je $\vec{F} = \text{grad}\, u$ za neko funkcijo u, je $\vec{F}$ potencialno, u pa je potencial.

Opomba. V fiziki je u potencial, če je $\vec{F} = -\nabla u$.

Vprašanje: Če je polje irotacionalno, $\text{rot}\, \vec{F} = 0$ na $D \subset \mathbb{R}^3$, ali sledi, da je $\vec{F} = \nabla u$ (t.j. $\vec{F}$ potencialno)? Naj bo $\text{div}\, \vec{F} = 0$ na $D \subset \mathbb{R}^3$. Ali je $\vec{F} = \text{rot}\, \vec{G}$ za nek $\vec{G}$?

V splošnem je odgovor ne na obe vprašanji. Odgovor na prvo vprašanje je pozitiven, če je območje D <u>enostavno</u> <u>povezano</u>. $(\pi_1(D)=0)$ Odgovor na drugo je pozitivno, če je $\pi_2(D)=0$.

<u>Primer</u>. $D = (\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})\times\mathbb{R}$



$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$$

Ampak $\vec{F}$ ni gradient nobene funkcije.

φ = kot v pol. koordinatah

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, φ ni dobro definirana funkcija

$\nabla\varphi = \vec{F}$, torej je φ potencial, a ni dobro def.

<u>Izrek</u>. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^3$ zvezdasto območje.

- Če je $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ za $\vec{F} \in \mathcal{C}^1$ na D, je $\vec{F} = \nabla\varphi$ za neko $\varphi \in \mathcal{C}^2$ na D.
- Če je $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ na D, je $\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{G}$ za neko $\vec{G}$.

<u>DOKAZ</u>. BIS privzemimo $T_0 = 0$ sicer translatiramo. 24. 2. 2004

- Naj bo $\vec{F} = (A,B,C)$. Predpostavimo, da je $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$. To pomeni, da je $\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial z}$, $\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}$, $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$. Definirajmo za $\vec{r} = (x,y,z) \in D$ $\varphi(\vec{r}) = \int_0^1 [A(t\vec{r})x + B(t\vec{r})y + C(t\vec{r})z]\,dt =$

$$= \int_0^1 \big(A(tx,ty,tz)x + B(tx,ty,tz)y + C(tx,ty,tz)z\big)\,dt.$$

Vse je dobro definirano, saj je za $(x,y,z)\in D$ tudi $(tx,ty,tz)\in D$ za $t\in[0,1]$ (D je zvezdasto okoli 0).

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \int_0^1 \left(A(tx,ty,tz) + \frac{\partial A}{\partial x}(tx,ty,tz)tx + \frac{\partial B}{\partial x}(tx,ty,tz)ty + \frac{\partial C}{\partial x}(tx,ty,tz)tz\right)dt =$$

$$= \int_0^1 \left[A(tx,ty,tz) + t\left(\frac{\partial A}{\partial x}x + \frac{\partial A}{\partial y}y + \frac{\partial A}{\partial z}z\right)\right]dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[tA(tx,ty,tz)\right]dt \underset{\text{osnovni izrek I.R.}}{=} \left[tA(tx,ty,tz)\right]_0^1 = A(x,y,z)$$

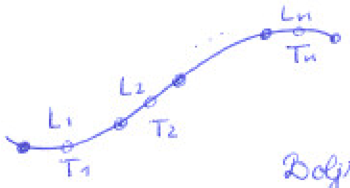
Torej je $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = A(x,y,z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = B(x,y,z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = C(x,y,z)$. Potem je res $(A,B,C) = \operatorname{grad}\varphi$.

- Doma: Definiramo $\alpha(\vec{r}) = \int_0^1 tA(t\vec{r})\,dt$, $\beta(\vec{r}) = \int_0^1 tB(t\vec{r})\,dt$, $\gamma(\vec{r}) = \int_0^1 tC(t\vec{r})\,dt$. Za $\vec{G} = (\alpha,\beta,\gamma)$ velja $\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{G}$. ■

Krivuljni integrali

(a) Integral skalarnega polja

Motiv. Izračun mase kosa žice v prostoru, vzdolž katere je dana dolžinska gostota. Dan je gladek lok L in $f(T)$, $T \in L$ dolžinska gostota.



$T_i \in L_i$

$m \approx f(T_1)\ell(L_1) + \dots + f(T_n)\ell(L_n)$, kjer je $\ell(L_i)$ dolžina L_i

Boljši približek dobimo s finejšo delitvijo. V limiti dobimo maso.

$\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ regularna parametrizacija loka

$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$

$t_{i-1} \le \xi_i \le t_i$, $\vec{r}(\xi_i) = T_i$

$$\ell(L_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\vec{r}}(\tau)\,d\tau \overset{\text{gladek lok}}{\approx} |\dot{\vec{r}}(\xi_i)|(t_i - t_{i-1})$$

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \cdot |\dot{\vec{r}}(\xi_i)|(t_i - t_{i-1})$$

→ Riemannova vsota za $f(x(t), y(t), z(t))|\dot{\vec{r}}(t)|$ na $[\alpha, \beta]$

$$m(L) = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))|\dot{\vec{r}}(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))|\dot{\vec{r}}(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\,dt$$

Definicija. Na zgornji način definiran $m(L)$ imenujemo krivuljni integral skalarne funkcije f po loku L.

Oznaka. $\int_L f\,ds$

Opomba. Tak integral je dobro definiran, ker je neodvisen od regularne parametrizacije.

$\vec{r} = \vec{\varphi}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, $\vec{r} = \vec{\psi}(\tau)$, $\gamma \le \tau \le \delta$ reg. param.

Obstaja difeomorfizem $t = h(\tau) : [\gamma, \delta] \leftrightarrow [\alpha, \beta]$

$\vec{\psi}(\tau) = \vec{\varphi}(h(\tau))$, $\dot{\vec{\psi}}(\tau) = \dot{\vec{\varphi}}(h(\tau))\,\dot{h}(\tau)$

$g(t) = f(\vec{\varphi}(t))|\dot{\vec{\varphi}}(t)|$

$$\int f\,ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{\varphi}(t))|\dot{\vec{\varphi}}(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta g(t)\,dt \overset{\text{subst.}}{=} \int_\gamma^\delta g(h(t))\,\dot{h}(\tau)\,d\tau = \int_\gamma^\delta f(\vec{\psi}(\tau))|\dot{\vec{\psi}}(\tau)|\,d\tau,$$

če h ohranja smer (kot pri računanju dolžine krivulje).

Opomba. Zgoraj smo definirali $\int_L f\,ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))|\dot{\vec{r}}(t)|\,dt$, kjer je $\vec{r}$ regularna parametrizacija loka L in f dana na L. Ista definicija je dobra tudi za definicijo integrala sk. funkcije f po gladki poti $t \mapsto \vec{\gamma}(t)$.

$$\int_\gamma f\,ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{\gamma}(t))|\dot{\vec{\gamma}}(t)|\,dt, \quad \vec{\gamma} \text{ vekt. funkcija.}$$

f mora biti definirana na $\gamma([\alpha,\beta])$.

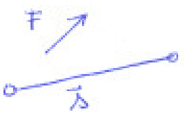
<u>Primer</u>. Izračunaj $\int_L f\,ds$, kjer je L prvi zavoj vijačnice $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ in $f(x,y,z)=x+2y+3z$.

$$\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t,t),\ 0\le t\le 2\pi,\ \dot{\vec{r}}(t)=(-\sin t,\cos t,1),\ |\dot{\vec{r}}(t)|=\sqrt{2}$$

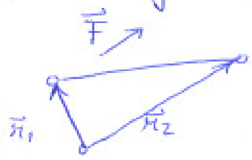
$$\int_L f\,ds=\int_0^{2\pi}(\cos t+2\sin t+3t)\,dt=6\sqrt{2}\,\pi^2$$

(b) <u>Integral vektorskega polja</u>

<u>Motiv</u>. Izračun dela pri premikanju točke v polju sil.

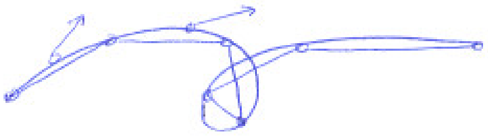


$A=\vec{F}\cdot\vec{s}$



$A=\vec{F}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$

Recimo, da točko premikamo po neki poti $\vec{r}=\vec{g}(t)$, $\alpha\le t\le\beta$ in je polje sil definirano na $\vec{g}([\alpha,\beta])$.



$\alpha=t_0<t_1<\dots<t_n=\beta$

$t_{i-1}\le\xi_i\le t_i$ izberemo

Predpostavimo, da je pot gladka, $\vec{F}$ pa zvezna.

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\underbrace{g(\xi_i)}_{T_i})\cdot[\vec{g}(t_i)-\vec{g}(t_{i-1})],\quad \vec{g}(t_i)-\vec{g}(t_{i-1})\approx\dot{\vec{g}}(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$$

$$A\approx\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(g(\xi_i))\cdot\dot{\vec{g}}(\xi_i)(t_i-t_{i-1})}_{\text{Riemannova vsota za } \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{g}(t))\dot{\vec{g}}(t)\,dt}$$

$$A=\int_\alpha^\beta\vec{F}(\vec{g}(t))\cdot\dot{\vec{g}}(t)\,dt.$$

26. 2. 2004

<u>Definicija</u>. Naj bo $\vec{g}: t\to\vec{g}(t)$, $\alpha\le t\le\beta$ gladka pot v $\mathbb{R}^3$ in $\vec{F}$ zvezna vektorska funkcija na $\{\vec{g}(t),\ \alpha\le t\le\beta\}$. Število

$$\int_\alpha^\beta\vec{F}(\vec{g}(t))\cdot\dot{\vec{g}}(t)\,dt$$

pravimo <u>integral vektorske funkcije</u> (vek. polja) $\vec{F}$ po poti $t\mapsto\vec{g}(t)$, $\alpha\le t\le\beta$.

<u>Oznaka</u>. $\int_g\vec{F}\,d\vec{r}$.

<u>Opomba</u>. Če je $h:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ difeomorfizem $\mathcal{C}^1$, ki ohranja smer, je

$$\int_g\vec{F}\,d\vec{r}=\int_\gamma\vec{F}\,d\vec{r},$$

kjer je $\vec{\gamma}(\tau) = \vec{g}(h(\tau))$, $a \le \tau \le b$.

To je posledica substitucijske formule:

$$\int_g \vec{F}\, d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{g}(t)) \cdot \dot{\vec{g}}(t)\, dt \underset{\text{subst.}}{=} \int_a^b \vec{F}(\vec{g}(h(\tau)))\dot{\vec{g}}(h(\tau))\, \dot{h}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_a^b \vec{F}(\overline{g\circ h})(\tau)(\dot{\overline{g\circ h}})(\tau)\, d\tau = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(\tau)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(\tau)\, d\tau .$$

Opomba. Če pot $t \mapsto g(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, nadomestimo s potjo $t \mapsto g(\beta + \tau(\alpha - \beta))$, $0 \le \tau \le 1$ integral spremeni predznak.

Tako lahko definiramo integral vek. polja po usmerjenem loku:

Naj bo L usmerjen lok ($a \in L$ začetna, $b \in L$ končna točka).

Naj bo dana zvezna vektorska funkcija $\vec{F}$ na L. Naj bo $t \mapsto \vec{r}(t)$ taka regularna parametrizacija loka L, $\alpha \le t \le \beta$, da je $\vec{r}(\alpha)$ začetna in $\vec{r}(\beta)$ končna točka.

Definiramo

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt .$$

To je integral vek. polja $\vec{F}$ po usmerjenem loku L. Zaradi zgornje opombe je dobro definiran (ni odvisen od regularne parametrizacije, ča le ohranja smer).

Primer. Naj bo L prvi zavoj vijačnice $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$, začetna točka $(1,0,0)$, končna točka $(1,0,4\pi)$.

Naj bo $\vec{F}(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$. Izračunaj $\int_L \vec{F} d\vec{r}$.

$\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$.

$$\int_L \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{\alpha = 0}^{\beta = 2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\, \dot{\vec{r}}(t)\, dt \quad , \quad \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2t),\ \vec{F}(\vec{r}(t)) = (\cos t, 2\sin t, 6t),$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, \ )$$

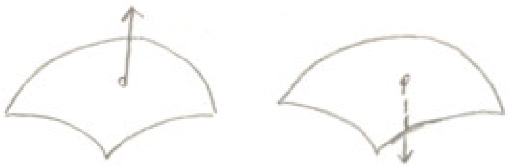
$$\int_L \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\cos t, 2\sin t, 6t)(-\sin t, \cos t, 2)\, dt = \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + 2\sin t \cos t + 12t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t + 12t)\, dt = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\sin(2t)\, dt + \left[6t^2\right]_0^{2\pi} = \left[\tfrac{1}{4}[-\cos 2t]\right]_0^{2\pi} + 24\pi^2 =$$

$$= -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + 24\pi^2 = \underline{\underline{24\pi^2}}$$

Orientabilnost in orientacija ploskev

Naj bo M gladka ploskev v $\mathbb{R}^3$. Lokalno je ploskev vedno možno zapisati kot graf, zato ima ploskev lokalno vedno dve strani. Ploskev v neki točki orientiramo, če si izberemo neko stran, t.j., če izberemo enega od (dveh možnih) enotskih normalnih vektorjev na ploskvi.



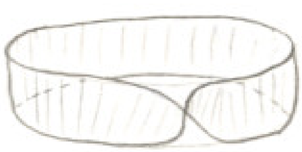
Globalna orientacija ploskve M je konsistentna, t.j. zvezna, izbira enotskih normalnih vektorjev v vseh točkah ploskve.

Pravimo, da je ploskev dvostranska (orientabilna), če ji je mogoče izbrati orientacijo.

Opomba. Košček ploskve, ki ga je mogoče regularno parametrizirati, je vedno orientabilen.

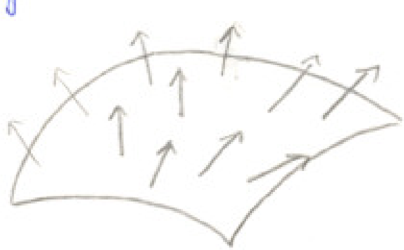
$\vec r = \vec r(u,v)$, $(u,v)\in\Delta$, rang$(\vec r(u,v)) = 2$, $(u,v)\in\Delta \Rightarrow \vec r_u = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v})$ in $\vec r_v = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$ sta v vsaki točki linearno neodvisna in je mogoče definirati $\frac{\vec r_u \times \vec r_v}{|\vec r_u \times \vec r_v|}$, ki se zvezno spreminja od točke do točke.

Opomba. Ni vsaka ploskev orientabilna. Primer: Moebiusov trak

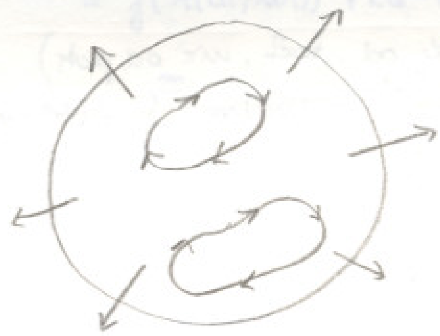


Orientacija roba orient. ploskve

Naj bo M orientabilna ploskev z robom, ki je iz končnega števila gladkih lokov.



Rob bM orientiramo skladno z orientacijo M takole:
Če človek, katerega glava gleda v smer izbrane normale, na ploskvi hodi po robu v smeri, skladni z orientacijo ploskve, vidi ploskev na levi strani.

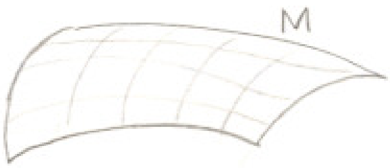


Opomba. Če orientacijo ploskve spremenimo, se tudi orientacija roba obrne.

Ploskovni integrali

(a) Integral skalarnega polja po ploskvi

Motiv: Izračun mase gladke ploskve, kjer je vzdolž ploskve dana zvezna ploskovna gostota f.



Ploskev razdelimo na $M_1, \dots, M_n$. V vsakem kosu izberemo $T_i \in M_i$.

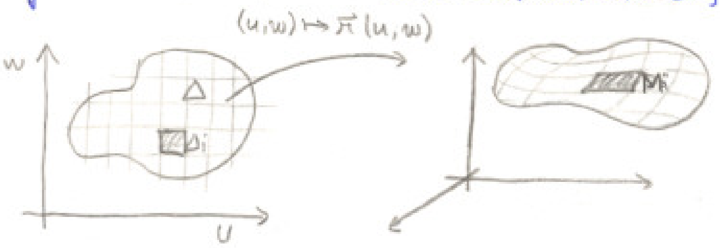
$m(M) \approx f(T_1)p(M_1) + \dots + f(T_n)p(M_n)$

V limiti, ko gre največji polmer ploskve proti 0, dobimo maso.

V splošnem imenujemo limito Riemannovih vsot $\sum_{i=1}^{n} f(T_i)p(M_i)$, pri pogoju, da gre največji premer kosov M_i proti 0 (če je neodvisna od delitvenega procesa in izbire točk) ploskovni integral funkcije f po ploskvi M in jo označimo z $\iint_M f\,dS$.

Če je ploskev gladka in f zvezna na M z robom vred, če je ploskev omejena, integral $\iint_M f\,dS$ vedno obstaja.

Naj bo možno M regularno parametrizirati (sicer jo razdelimo na več kosov in integrale seštejemo). $\vec{r} = \vec{r}(u,w)$, $(u,w) \in \Delta$, gladka vektorska funkcija na Δ, Δ omejen s končno mnogo gladkimi loki, $\operatorname{rang} \vec{r}(u,w) = 2$, f zvezna na $M = \{\vec{r}(u,w); (u,w) \in \Delta\}$ z robom vred.



$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ pravokotniki, vsebovani v Δ

$$p(M_i) = \iint_{\Delta_i} |\vec{r}_u \times \vec{r}_w|\,du\,dw = \iint_{\Delta_i} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dw.$$

V Δ_i izberimo točko (u_i, w_i). Potem je $p(M_i) \approx \sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u=u_i \\ w=w_i}} \cdot p(\Delta_i)$.

Naj ima T_i krajevni vektor $\vec{r}(u_i, w_i)$. $m(M_i) \approx p(M_i) \cdot f(T_i) =$

$$= f(\vec{r}(u_i,w_i))\cdot\sqrt{EG-F^2}\,\Big|_{\substack{u=u_i\\ w=w_i}}\cdot p(\Delta_i)$$

$$m(M) \doteq \sum_{i=1}^{m} m(M_i) \approx \sum_{i=1}^{m} f(\vec{r}(u_i,w_i))\sqrt{EG-F^2}\,\Big|_{\substack{u=u_i\\ w=w_i}}\cdot p(\Delta_i)$$

↳ Riemannova vsota za $\iint_\Delta f(\vec{r}(u,w))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dw$

V limiti dobimo:

$$\iint_M f\,dS = \iint_\Delta f(\vec{r}(u,w))\cdot\sqrt{EG-F^2}\,du\,dw = \iint_\Delta f(\vec{r}(u,w))\,|\vec{r}_u\times\vec{r}_w|\,du\,dw =$$

$$= \iint_\Delta f(x(u,w),y(u,w),z(u,w))\cdot|\vec{r}_u\times\vec{r}_w|\,du\,dw.$$

Posebni primer: ko je $f\equiv 1$, je $\iint_M f\,dS = \iint_M 1\,dS = p(M) = \iint_\Delta \sqrt{EG-F^2}\,du\,dw$.

Opomba. Integral ni odvisen od orientacije ploskve.

2. 3. 2004

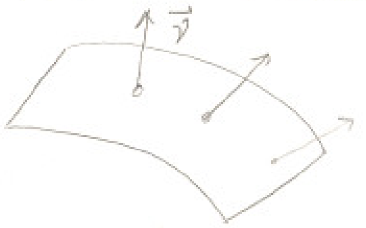
(b) Integral vektorske funkcije (polja) po orientirani ploskvi

Motiv. Dano je hitrostno polje v tekočini, ki se s časom ne spreminja. V tekočino je potopljena mrežasta orientirana ploskev. Zanima nas pretok na sekundo skozi ploskev v smeri normalnih vektorjev.

$\vec{F}$ hitrostno polje, $\vec{F}=\vec{F}(T)$

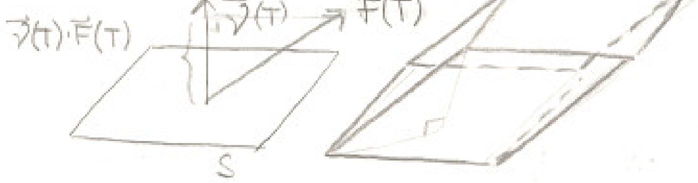
S ploskev

$\vec{\nu}(T)$ enotski vektor v (z orientacijo) izbrani smeri, pravokoten na S



Ploskev razrežemo na majhne kose $M_1, M_2, \dots, M_n$. Izberemo $T_i\in M_i$ $(1\le i\le n)$.

$\vec{\nu}(T_i)\vec{F}(T_i)\,p(M_i) \approx$ pretok na sekundo skozi M_i.



$p(S)\cdot v = p(S)\cdot\vec{F}(T)\cdot\vec{\nu}(T)$

Pretok je približno $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(T_i)\vec{\nu}(T_i)\cdot p(M_i)$, kar je Riemannova vsota. V limiti, ko gre največji premer kosov proti 0, dobimo pretok. Če je ploskev gladka in omejena in $\vec{F}$ zvezno na S in bS, limita obstaja in je neodvisna od delitve in izbire točk. Imenujemo jo ploskovni integral vektorskega polja $\vec{F}$ po orientirani ploskvi M in označimo z

$$\iint_M \vec{F}\cdot\vec{\nu}\,dS.$$

(po ploskvi M v smeri predpisane normale $\vec{\nu}$.) Tako definiramo ploskovni integral vektorskega polja po orientirani ploskvi.

Opomba. Včasih pišemo tudi $\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S}$.

Izračun. Naj bo M kos ploskve, ki ga lahko regularno parametriziramo. $M = \{\vec{r}(u,w);\ (u,v)\in\Delta\}$, $\vec{r}(u,w) = (x(u,w), y(u,w), z(u,w))$ zvezna vek. funkcija razreda $\mathcal{C}^1$, injektivna na Δ, rang $d\vec{r} = 2$ povsod.
Zgornja Riemannova vsota $\sum \vec{F}(T_i)\vec{\nu}(T_i)p(M_i)$ je Riemannova vsota za integral skalarne funkcije $\vec{F}(T)\cdot\vec{\nu}(T), T\in M$ po ploskvi M. Zato bo integral enak

$$\iint_M \vec{F}d\vec{S} = \iint_M \vec{F}\cdot\vec{\nu}\cdot dS \overset{\text{vemo}}{=} \iint_\Delta \vec{F}\cdot\vec{\nu}(\vec{r}(u,w))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dw =$$

$$= \iint_\Delta \vec{F}(\vec{r}(u,w))\cdot\vec{\nu}(\vec{r}(u,w))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dw = \iint_\Delta \vec{F}(\vec{r}(u,w))(\pm 1)\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_w}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_w|}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dw$$

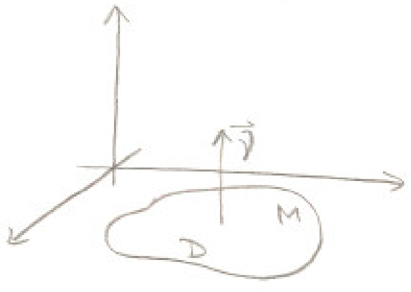
$$= \pm\iint_\Delta \vec{F}(\vec{r}(u,w))(\vec{r}_u\times\vec{r}_w)\,du\,dw = \pm\iint_\Delta(\vec{F},\vec{r}_u,\vec{r}_w)\,du\,dw.$$

Torej je

$$\boxed{\iint_M \vec{F}d\vec{S} = \pm\iint_\Delta \vec{F}(\vec{r}(u,w))(\vec{r}_u\times\vec{r}_w)\,du\,dw.}$$

Pri tem je $+$, če $\vec{r}_u\times\vec{r}_w$ kaže v predpisano smer, sicer je $-$.

Opomba. Naj bo $\vec{F} = (P,Q,R)$ in območje v xy ravnini, z normalo, ki kaže v pozitivno smer z-osi.



$M = \{(x,y,0);\ (x,y)\in D\}$

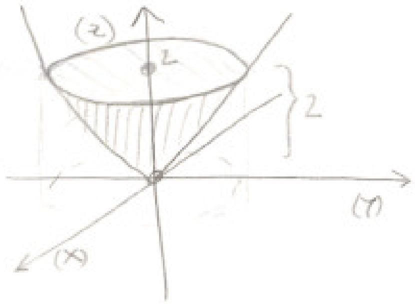
$\vec{\nu} = (0,0,1)$

$dS = \sqrt{EG-F^2}\,dx\,dy = dx\,dy$

$\iint_M \vec{F}\cdot\vec{\nu}\,dS = \iint_D R(x,y,0)\,dx\,dy$ ... običajni dvojni integral

Označka. Za integral $\vec{F} = (P,Q,R)$ po M: $\iint_M \vec{F}d\vec{S} = \iint_M (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy)$

Primer. Integriraj funkcijo $f(x,y,z) = xyz$ po plašču stožca $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 < z < 2$.



Parametrizacija: $x = x$, $y = y$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$

$(x,y) \in D = \{(x,y);\ x^2+y^2 \le 4\}$

$$\iint_M f\,dS = \iint_D f(x,y,\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{EG-F^2}\,dx\,dy$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{1+p^2+q^2}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$p = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

$$\iint_D x\cdot y\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^2 r^4\cos\vartheta\sin\vartheta\sqrt{2}\,dr = \dots$$

$x = r\cos\vartheta$
$y = r\sin\vartheta$
$dx\,dy = r\,dr\,d\vartheta$

Primer. Integriraj $\vec F = (y, x, xz)$ po zunanji strani plašča stožca iz prejšnje naloge.

Parametrizacija: $\vec r = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \rho)$, $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$\vec r_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1)$, $\vec r_\varphi = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$

$\vec r_\rho \times \vec r_\varphi = (-\rho\cos\varphi, -\rho\sin\varphi, \rho)$

$-\vec r_\rho \times \vec r_\varphi = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, -\rho)$ ← z-komponenta v predpisani smeri normale mora biti negativna

$$\iint_M \vec F\,d\vec S = \iint_\Delta (\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, \rho^2\cos\varphi)(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, -\rho)\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \iint_\Delta (\rho^2\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\cos\varphi\sin\varphi - \rho^3\cos\varphi)\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \iint_\Delta (2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi - \rho^3\cos\varphi)\,d\rho\,d\varphi = \dots$$

Opomba. V splošnem plosko razdelimo na kose, ki jih reg. parametriziramo in dobljene integrale seštejemo.

INTEGRALSKI IZREKI

Gaussov izrek

Izrek. Naj bo D omejeno območje v $\mathbb{R}^3$, katerega rob je iz končnega števila gladkih kosov ($\mathcal{C}^2$). Orientiramo rob tako, da tam, kjer ni zlomljen izberemo zunanjo normalo, t.j. tisto, ki kaže iz območja

D. Naj bo $\vec{F}$ gladko ($\mathcal{C}^1$) vektorsko polje v okolici $D \cup bD$. Tedaj velja

$$\boxed{\iint_{bD} \vec{F}\, d\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dv = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dx\,dy\,dz.}$$

Opomba. Če je $\vec{F} = (P, Q, R)$, je $\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Opomba. Včasih se ta izrek imenuje tudi izrek Gaussa-Ostrogradskega. Pove, da je pretok vektorskega polja navzven skozi rob območja D enak trojnemu integralu divergence tega polja po D.

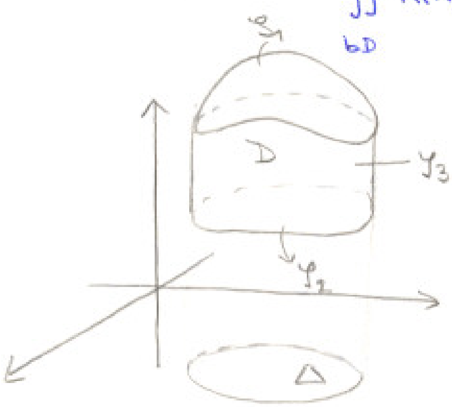
DOKAZ. Izrek najprej dokažemo za območja, katerih rob vsaka premica, vzporedna koordinatnim osem, ki poteka skozi notranjo točko območja, seka največ dvakrat.

Naj bo $\vec{F} = (P, Q, R)$ in $\vec{\nu} = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$ enotski vektor v smeri glavne normale.

RBV: $\iint_{bD} \vec{F}\vec{\nu}\, d\mathcal{S} = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,\partial y\,dz$.

Dokazali bomo:

$$\iint_{bD} R(x,y,z)\,\nu_z\, d\mathcal{S} = \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\,dy\,dz, \text{ ipd.} \quad (*)$$



$\mathcal{S}_1 = \{z = h(x,y);\ (x,y) \in \Delta\}$

$\mathcal{S}_2 = \{z = g(x,y);\ (x,y) \in \Delta\}$

$$\iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = \iint_\Delta dx\,dy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz = \iint_\Delta [R(x,y,h(x,y)) - R(x,y,g(x,y))]\, dx\,dy =$$

$$= \iint_\Delta R(x,y,h(x,y))\, dx\,dy - \iint_\Delta R(x,y,g(x,y))\, dx\,dy. \quad (**)$$

4.03.2004

Na $\mathcal{S}_1$ je $\vec{\nu} = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right) / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}$, na $\mathcal{S}_2$ je $\vec{\nu} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, -1\right) / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}$. Na $\mathcal{S}_3$ je $\nu_z = 0$, ker je $\vec{\nu}$ vzporeden xy ravnini.

$$\iint_{\mathcal{S}} R(x,y,z)\,\nu_z\, d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}_1} R(x,y,z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}\, d\mathcal{S} - \iint_{\mathcal{S}_2} R(x,y,z) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}\, d\mathcal{S} =$$

$$= \iint_\Delta R(x,y,h(x,y)) \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial h}{\partial x})^2+(\frac{\partial h}{\partial y})^2}} \sqrt{1+(\frac{\partial h}{\partial x})^2+(\frac{\partial h}{\partial y})^2}\, dx\,dy - \dots =$$

$$= \iint_\Delta R(x,y,h(x,y))\,dx\,dy - \iint_\Delta R(x,y,g(x,y))\,dx\,dy. \quad (**)$$

Tretja enakost (za z) je dokazana. Enak dokaz je za x in y.

Dokazali smo, da izrek velja za območja, ki jih vsaka premica, vzporedna kateri od osi, na robu seka v največ dveh točkah.

Splošna območja: razrežemo jih na končno mnogo kosov z zgornjo lastnostjo in dobljene integrale seštejemo.

$$\iint_{bD_1} \vec F\, d\vec S = \iiint_{D_1} \operatorname{div}\vec F\, dV$$

$$\iint_{bD_2} \vec F\, d\vec S = \iiint_{D_2} \operatorname{div}\vec F\, dV$$

$\iint_{bD_1} \vec F d\vec S = \iint_{\mathcal{S}_1} \vec F d\vec S + \iint_{\mathcal{S}_3} \vec F d\vec S$, $\iint_{bD_2} \vec F d\vec S = \iint_{\mathcal{S}} \vec F d\vec S + \iint_{\mathcal{S}_3'} \vec F d\vec S$ in velja

$\iint_{\mathcal{S}_3} \vec F d\vec S = - \iint_{\mathcal{S}_3'} \vec F d\vec S$. Potem je $\iint_{bD_1} \vec F d\vec S + \iint_{bD_2} \vec F d\vec S = \iint_{\mathcal{S}_1} \vec F d\vec S + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec F d\vec S =$

$$= \iint_{bD} \vec F d\vec S = \iiint_{D_1} \operatorname{div}\vec F dV + \iiint_{D_2} \operatorname{div}\vec F dV = \iiint_D \operatorname{div}\vec F dV. \blacksquare$$

<u>Primer</u>. Integriraj vektorsko polje $\vec F = (x, xz, xy)$ po sferi $x^2+y^2+z^2=a^2$ v smeri zunanje normale

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec F d\vec S = \iiint_D \operatorname{div}\vec F\, dx\,dy\,dz = \iiint_D [1+0+0]\,dx\,dy\,dz = \underline{\frac{4\pi a^3}{3}}$$

<u>Primer</u>. Izračunaj ploskovni integral $\iint x^2 dy\,dz + y^2 dz\,dx + z^2 dx\,dy = I$ po sferi $\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2=1$ v smeri notranje normale.

$\vec F = (x^2, y^2, z^2)$, $\operatorname{div}\vec F = 2x+2y+2z$

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \vec F d\vec S = - \iiint_D \operatorname{div}\vec F\, dx\,dy\,dz = - \iiint_D (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz = \dots$$

<u>Brezkoordinatna definicija divergence.</u>

Ω območje v prostoru, $\vec F$ na Ω vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$, $T \in \Omega$.
Naj bo B kroglica s središčem v T, ki je z robom vred vsebovana v Ω. Po Gaussovem izreku je $\iint_{bB} \vec F \vec\nu\, d\mathcal{S} = \iiint_B \operatorname{div}\vec F\, dV$.

Sledi: $\frac{1}{V(B)} \iint_{bB} \vec F \vec\nu\, d\mathcal{S} = \underbrace{\frac{1}{V(B)} \iiint_B \operatorname{div}\vec F\, dV}_{\text{povprečna vrednost } \operatorname{div}\vec F \text{ po kroglici } B}$.

Ker je $\operatorname{div}\vec F$ zvezna funkcija na krogli ($\vec F$ razreda $\mathcal{C}^1$), je po izreku o povprečni vrednosti ta integral enak $\operatorname{div}\vec F|_{T^*}$, kjer je $T^* \in B$.

gostota izviranja

količ. tek. ki izvire

$$\lim_{r(B)\to 0} \frac{1}{V(B)} \iint_{bB} \vec F \vec\nu\, dS = \lim_{T^*\to T} \operatorname{div}\vec F|_{T^*} \overset{\text{zv. funk. div} \vec F}{=} (\operatorname{div}\vec F)(T).$$

Zato bi divergenco lahko definirali kot $(\operatorname{div}\vec F)(T) = \lim_{B\to T}\frac{1}{V(B)}\iint_{bB}\vec F\vec\nu\,dS$.

Def. $(\operatorname{div} \vec F)(T)$ je torej gostota izvirov v točki T.

Stokes-ov izrek

Izrek. (Stokes) Naj bo M omejena, gladka, orientirana ploskev razreda $\mathcal{C}^2$, katere rob je iz končnega števila gladkih lokov. Naj bo $\vec F$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$, definirano v okolici $M \cup bM$. Orientirajmo rob bM skladno z orientacijo M. Tedaj je

$$\int_{bM}\vec F\, d\vec r = \iint_M (\operatorname{rot}\vec F)\vec\nu\, dS. \quad \left(= \iint_M (\operatorname{rot}\vec F)\, d\vec S\right)$$

Opomba. Torej je $\int_{bM} P dx + Q dy + R dz = \iint_M \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$.

Poseben primer je Green-ova formula: Naj bo D omejeno območje v xy ravnini, katerega rob je iz končnega števila gladkih lokov, pozitivno orientiran. Naj bosta P in Q $\mathcal{C}^1$ na $D \cup bD$ (v okolici $D\cup bD$). Tedaj je

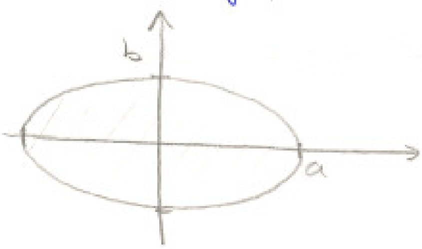
$$\boxed{\int_{bD} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.}$$

Dobimo jo iz Stokes-ovega izreka, če je $M = D$ v xy ravnini in $\vec F = (P(x,y), Q(x,y), 0)$. Tedaj je namreč $\operatorname{rot}\vec F = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$

Parametrizacija: $(x,y,0)$, $(x,y)\in D$, $\vec\nu = (0,0,1)$. $\sqrt{1+p^2+q^2} = 1$.

$$\int_{bD} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot 1\, dS = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) 1 \cdot \sqrt{1}\, dx dy.$$

Primer. Izračunaj ploščino elipse: $x = a\cos t$, $y = b \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.



Izberemo P, Q tako, da bo integral lahko izračunati in bo $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \text{konst.}$

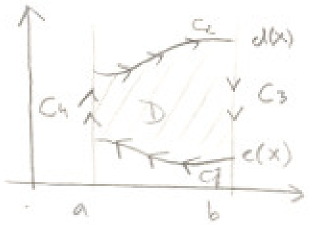
$P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 2$

$$\int_{bE} P dx + Q dy = \iint_D 2 dx dy = 2\iint_E 1\, dx dy = 2 p(E)$$

$$p(E) = \frac{1}{2}\int_{bE} P dx + Q dy = \frac{1}{2}\int_{bE} -y dx + x dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (+a\sin t \cdot b \sin t + ab\cos^2 t)\, dt = \frac{ab}{2}\cdot 2\pi = ab\pi$$

DOKAZ. (Greenova formula) Naj bo območje D v ravnini tako, da je D oblike $\{(x,y);\ c(x) \le y \le d(x),\ a \le x \le b\}$, kjer sta c, d razreda $\mathcal{C}^1$.



$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right] dx =$$

$$= \int_a^b \Big(P(x,d(x)) - P(x,c(x))\Big)\,dx =$$

$$= \int_a^b P(x,d(x))\,dx - \int_a^b P(x,c(x))\,dx = \int_{C_2} P\,dx + \int_{C_1} P\,dx = *$$

$$\int_{C_2} P\,dx = \int_{C_2} P\,dx + 0\cdot dy \overset{x \text{ param.}}{=} \int_b^a P(x,d(x))\cdot 1\,dx + 0\cdot d'(x)\,dx = \int_b^a P(x,d(x))\,dx.$$

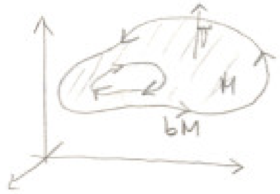
$$* = \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + \underbrace{\int_{C_3} \overset{0}{P\,dx} + \int_{C_4} \overset{0,\ \text{ker je } x \text{ konst.}}{P\,dx}}_{0} = -\int_{bD} P\,dx. \text{ Torej je } \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy =$$

$= -\int_{bD} P\,dx$. Splošna območja razstavimo na taka enostavna in integrale seštejemo. Na stikih se vsota uniči.

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{bD} P\,dx.$$

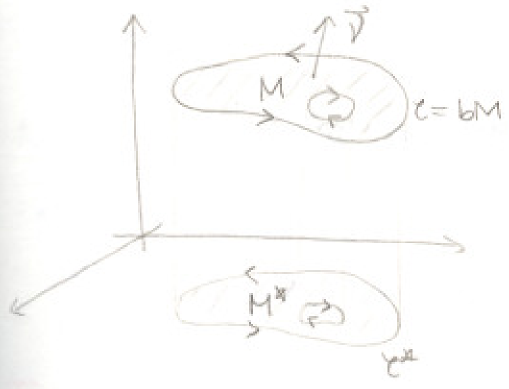
Enako: $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = +\int_{bD} Q\,dy$. Vsota obeh enakosti je G.F. ∎

9. 3. 2004



$$\int_{bM} \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_M \operatorname{rot}\vec{F}\,\vec{\nu}\,dS$$

DOKAZ. (Stokes) Predpostavimo najprej, da lahko ploskev zapišemo kot $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$ ali $x = h(y,z)$.



Pokažemo, da je $\iint_M \left(\frac{\partial P}{\partial z}\nu_y - \frac{\partial P}{\partial y}\nu_z\right) dS = \int_{bM} P\,dx$ (1).
(Recimo, da $\vec{\nu}$ kaže navzgor.)

$$\int_{bM} P\,dx = \lim_{\max\operatorname{diam} \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{A}(T_k)(\vec{r}_k - \vec{r}_{k-1}) = \qquad \vec{A} = (P,0,0)$$

$$= \lim \sum_{k=1}^{n} P(T_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \lim \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \lim \sum P(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))(x_k - x_{k-1}) + 0(y_k - y_{k-1})$$

To je limita Riemannove vsote za integral $\int_{\mathcal{C}^*} P\,dx + 0\cdot dy = \int_{\mathcal{C}^*} P(x,y,f(x,y))\,dx$.
Torej je $\int_{bM = \mathcal{C}} P\,dx = \int_{\mathcal{C}^*} P(x,y,f(x,y))\,dx$. Uporabimo Greenovo formulo.

$$\int_{\mathcal{C}^*} P(x,y,f(x,y))\,dx \overset{G.F.}{=} -\iint_{M^*} \frac{\partial}{\partial y}\left[P(x,y,f(x,y))\right]dx\,dy = -\iint_{M^*}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Enačba (1) bo dokazana, če pokažemo, da je

$$-\iint_{M^*}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_{M}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\nu_y - \frac{\partial P}{\partial y}\nu_z\right)dS. \quad (2)$$

$\vec{\nu} \parallel (-p,-q,1) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$

$\vec{\nu} = \frac{(-p,-q,1)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $dS = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$, $M = \{(x,y,f(x,y));\ (x,y)\in M^*\}$

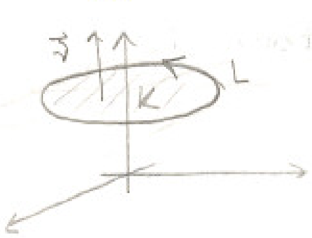
$$\iint_M\left(\frac{\partial P}{\partial z}\nu_y - \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\nu_z\right)dS = \iint_{M^*}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{M^*}\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = -\iint_{M^*}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy. \Rightarrow (2)$$

Podobno dokažemo ostali dve analogni enakosti, seštejemo in dobimo formulo, ki smo jo dokazovali. Splošnejše ploskve razrežemo na kose zgornje oblike in kose, vzporedne katerikoli od koordinatnih ravnin. Za slednje posebej dokažemo S.I (ki je v tem primeru kar G.F.). Rezultate seštejemo. Krivuljni integrali po rezih se uničijo. ∎

<u>Primer</u>. Izračunaj $\int_L \underset{\vec A\,d\vec r}{\underbrace{(xy^2z^2dx + x^2yz^2dy + x^2y^2z\,dz)}}$, kjer je L krožnica

$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 5,\ 0 \le t \le 2\pi$, orientirana v smeri naraščanja t.



$$\mathrm{rot}\,(xy^2z^2, x^2yz^2, x^2y^2z) = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & x^2y^2z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec i\left(\frac{\partial}{\partial y}x^2y^2z - \frac{\partial}{\partial z}x^2yz^2\right) + \dots =$$

$$= \vec i\,(2x^2yz - 2x^2yz) + \vec j\,(2xy^2z - 2xy^2z) + \vec k\,(2xyz^2 - 2xyz^2) = 0$$

Doma direktno!

Uporabimo S.I.: naj bo K krog, katerega rob je L, orientiran skladno z orientacijo L.

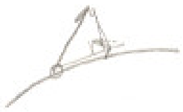
$$\int_L \vec A\,d\vec r = \int_K \underbrace{\mathrm{rot}\vec A\cdot\vec\nu}_{0}\,dS = 0.$$

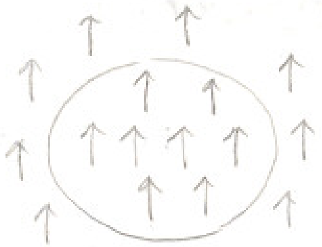
<u>Fizikalna interpretacija rotorja</u> in <u>brezkoordinatna definicija</u>

Naj bo $\vec F$ $\mathcal{C}^1$-vektorsko polje na območju D. Če je $\mathcal{C}\subset D$ usmerjena sklenjena krivulja, imenujemo $\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\mathcal{C}} \vec F\,d\vec r$ cirkulacija polja

$\vec F$ vzdolž $\mathcal{C}$.

$$\int_{\mathcal C} \vec A\, d\vec r = \int_\alpha^\beta \underbrace{\vec A(\vec r(t))\, \frac{\dot{\vec r}(t)}{|\dot{\vec r}(t)|}}_{\text{tangencialna komp. } \vec A} |\dot{\vec r}(t)|\, dt = \int_{\mathcal C} A_t\, ds$$





$\int \vec A\, d\vec r = 0$

$\int \vec A\, d\vec r \neq 0$

$T \in D$, M majhen krog (disk) v prostoru, s središčem T, orientiran, $\vec\nu$ normala.

bM orientiramo skladno z orientacijo M.

$$\int_{bM} \vec F\, d\vec r = \iint_M \operatorname{rot}\vec F \cdot \vec\nu\, dS = [\operatorname{rot}\vec F\cdot\vec\nu]_{T^*}\cdot p(M),$$ T^* neka točka M

izrek o povp. vrednosti za dvojni int., s katerim izračunamo pl. int.

V limiti: $(\operatorname{rot}\vec F\cdot\vec\nu)_{T^*} = \frac{1}{p(M)}\cdot\int_{bM}\vec F\, d\vec r$, ko disk M stisnemo v točko, $T^* \to T$

$$(\operatorname{rot}\vec F\cdot\vec\nu)_T = \lim_{M\to T}\frac{1}{p(M)}\int_{bM}\vec F\, d\vec r$$

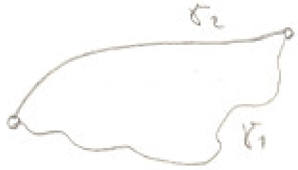
komponenta rotorja v smeri $\vec\nu$

Rotor $\operatorname{rot}\vec F$ je torej mera za vrtinčenje polja v ravnini skozi T z normalo $\vec\nu$ v točki T.

<u>Opomba</u>. To bi lahko uporabili za brezkoordinatno definicijo rotorja.

Neodvisnost krivuljnega integrala od poti

Naj bo D območje v prostoru (odprta povezana množica). Naj bo γ pot v D. V splošnem je $\int_\gamma \vec F\, d\vec r$ odvisen od poti γ. ($\vec F$ zvezno vekt. polje na D.)



$\int_{\gamma_1} \vec F\, d\vec r$ v splošnem ni enako $\int_{\gamma_2} \vec F\, d\vec r$, čeprav začetni oz. končni točki sovpadata.

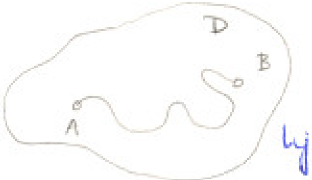
Zanima nas, kdaj je na D $\int_\gamma \vec F\, d\vec r$ neodvisen od poti, t.j. za poljubni $a, b \in D$ in poljubno odsekoma gladko pot γ z začetkom a in koncem b je $\int_\gamma \vec F\, d\vec r$ odvisen le od a in b, nič pa od poti γ.

Izrek. Naj bodo P, Q, R zvezne funkcije na prostorskem območju D. Tedaj je na D $\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz$ neodvisen od poti $\Leftrightarrow$ obstaja na D skalarna funkcija $u(x,y,z)$ razreda $\mathcal{C}^1$, da je $(P,Q,R)\equiv \operatorname{grad} u$ na D, t.j. $P\equiv \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q\equiv\frac{\partial u}{\partial y}$, $R\equiv\frac{\partial u}{\partial z}$.
($Pdx+Qdy+Rdz$ je diferencial funkcije u).

Tedaj je za $\forall\, \gamma$ v D od a do b $\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz = u(b)-u(a)$.
Funkcijo u tedaj imenujemo potencial (ali pot. energija) vek. polja $\vec F=(P,Q,R)$, polju $\vec F$ pa pravimo konzervativno polje (potencialno ~).

11. 3. 2004

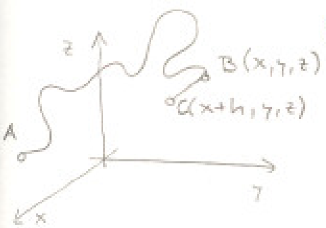
DOKAZ. Naj bo $\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz$ neodvisen od poti. Fiksirajmo $A(x_0,y_0,z_0)\in D$. Naj bo $B(x,y,z)$ in definirajmo



$$u(x,y,z)=\int_{\gamma_{AB}} Pdx+Qdy+Rdz,$$

kjer je γ_{AB} odsekoma gladka pot z začetkom v A in koncem B. Definicija je dobra, ker je integral neodvisen od poti. Pokažemo: $\frac{\partial u}{\partial x}=P$, $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$, $\frac{\partial u}{\partial z}=R$.

Najprej $\frac{\partial u}{\partial x}=P$. Dodajmo k poti γ_{AB} še daljico BC (ustrezno usmerjeno).



$$u(x,y,z)=\int_{\gamma_{AB}}\vec F\,d\vec r,\quad u(x+h,y,z)=\int_{\gamma_{AC}}\vec F\,d\vec r.$$

γ_{BC} je daljica med B in C, γ_{AC} pa pot, sestavljena iz γ_{AB} in γ_{BC}.

$$u(x+h,y,z)=\int_{\gamma_{AB}}\vec F\,d\vec r+\int_{\gamma_{BC}}\vec F\,d\vec r.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y,z)-u(x,y,z)}{h}=\lim_{h\to0}\frac1h\int_{\gamma_{BC}}\vec F\,d\vec r.$$

$\frac1h\int_x^{x+h}\varphi(t)\,dt\ldots$ povpr. vred. φ na $[x,x+h]$

Daljico γ_{BC} parametriziramo: $x=t$, $y=y$, $z=z$, $x\le t\le x+h$.
$\dot x=1$, $\dot y=0$, $\dot z=0$.

$$\Rightarrow \lim_{h\to0}\frac1h\int_{\gamma_{BC}}\vec F\,d\vec r=\lim_{h\to0}\frac1h\int_x^{x+h}\big(P(t,y,z)\cdot 1+Q\cdot 0+R\cdot 0\big)dt=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac1h\int_x^{x+h}P(t,y,z)\,dt \overset{\text{povp. vred.}}{=} \lim_{t^*\to x} P(t^*,y,z)\overset{\text{zvezn.}}{=}P(x,y,z).$$

Potem je $\frac{\partial u}{\partial x}=P$ $\forall (x,y,z)\in D$. Enako pokažemo drugi dve enakosti.
Denimo, da obstaja $\mathcal{C}^1$ funkcija u na D, da je $P=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial u}{\partial y}$ in $R=\frac{\partial u}{\partial z}$ na D. Naj bo $\gamma:[\alpha,\beta]$ gladka pot od A do B v D. $\gamma(\alpha)=A$, $\gamma(\beta)=B$. $\int_\gamma \vec F\,d\vec r=\int_\alpha^\beta\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))\cdot\dot x(t)+$
$+\frac{\partial u}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))\dot y(t)+\frac{\partial u}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))\cdot\dot z(t)\Big)dt=$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial t}\big(u(x(t),y(t),z(t))\big)\,dt \underset{\text{osn. izrek IR}}{=} u(x(\beta),y(\beta),z(\beta)) - u(x(\alpha),y(\alpha),z(\alpha)) =$$

$= u(B) - u(A)$ za vsako gladko pot od A do B.

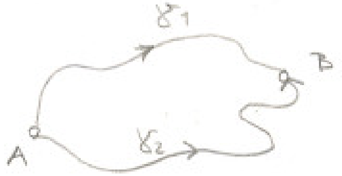
Pri odsekoma gladkih poteh računamo po kosih, vmesni členi se pokrajšajo. ■

Opomba. Potencial u je določen do aditivne konstante natančno. Iz dokaza je jasno, da zadošča predpostaviti, da je integral neodvisen od krivulje le za take iz končnega števila gladkih lokov.

Opomba. Delo je v tem primeru enako spremembi potencialne energije in je neodvisno od poti.

Diskusija. Naj bo $\int_\gamma \vec F d\vec r$ neodvisen od poti. Tedaj je $\int_\gamma \vec F d\vec r = 0$ za $(\gamma = \mathcal{C})$ vsako sklenjeno pot $\mathcal{C}$. Velja tudi obrat.

Naj bo $\int_\mathcal{C} \vec F d\vec r = 0$ za vsako sklenjeno pot v D. Tedaj je $\int_\gamma \vec F d\vec r$ neodvisen od poti.



Naj bo γ sestavljena iz γ_1 in $-\gamma_2$.
Potem je $\int_\gamma \vec F d\vec r = 0 = \int_{\gamma_1} \vec F d\vec r - \int_{\gamma_2} \vec F d\vec r$.

$\operatorname{rot}\vec F \equiv \vec 0$ kot zadostni pogoj za potencialnost

Če imamo na D potencialno polje $\vec F = \operatorname{grad} u$, je zveda $\operatorname{rot}\vec F = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \vec 0$. Zanima nas obrat:

Naj bo $\vec F$ na D polje, za katerega je $\operatorname{rot}\vec F = 0$. Ali je tako polje potencialno? V splošnem ne. Po drugi strani smo to dokazali za zvezdasta območja.

$\vec F$ je potencialno, če je $\int \vec F d\vec r = 0$ po vsaki sklenjeni poti. Naj bo $\operatorname{rot}\vec F \equiv 0$. Če je sklenjena krivulja γ rob ploskve M, ki vsa leži v D, je po Stokesu $\int_\gamma \vec A d\vec r = \int_M \operatorname{rot}\vec A \cdot \vec\nu\, dS = 0$

Enostavno povezana območja. Območje D je enostavno povezano, če lahko vsako sklenjeno pot v območju deformiramo zvezno v točko.

krivulja, ki ne omejuje ploskve

→ ni enostavno povezano, votla krogla v $\mathbb{R}^3$ je

je

ni

<u>Izrek</u>. Naj bo območje D v prostoru enostavno povezano in $\vec{F}$ gladko vekt. polje na D, za katerega je $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Tedaj je $\vec{F}$ potencialno polje.

<u>DOKAZ</u>. S Stokesovim izrekom.

<u>Primer</u>. Enost. povezana: konveksna, zvezdasto.

<u>Opomba</u>. Analog izreka za 2 spremenljivki:

<u>Izrek</u>. Naj bosta $P(x,y)$, $Q(x,y)$ zvezni na ravninskem območju D. Tedaj je $\int_\gamma P dx + Q dy$ neodvisen od poti $\Leftrightarrow$ obstaja na D $u(x,y)$, da je $P \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$.

<u>Opomba</u>. Naj bo v ravnini $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, P, Q gladki, je

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}, \text{ torej } \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Obrat velja za enostavno povezana območja v ravnini.

<u>Primer</u>. Ko $\operatorname{rot}\vec{F} \equiv \vec{0}$ ni dovolj, da bi bilo polje potencialno.

$D = \mathbb{R}^3 - \{z\text{-os}\}$. Naj bo $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$, $R = 0$.

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot 0 + \vec{j}\cdot 0 + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \frac{1(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+\cancel{y^2} - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \equiv 0.$$

To polje ni potencialno. K krožnica $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$.

$$\int_K \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(-\sin t\cdot(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t\right) dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0.$$

$\dot{x} = -\sin t$, $\dot{y} = \cos t$, $\dot{z} = 0$ $\quad \frac{y}{x^2+y^2} = \sin t, \ldots$

16. 3. 2004