Opomba. Funkcija F iz posledice 1 je razreda C^1 na Ω, saj če je $F = u + iw$, vemo, da je

$$F' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial x} \equiv \frac{\partial w}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial x} = f,$$

funkcija f pa je zvezna na Ω.

Kasneje bomo videli, da je vsaka holomorfna funkcija razreda C^1. Zaenkrat to še ne vemo in zato naj, dokažemo nekaj pomožnih izrekov s to predpostav.

POMOŽNI IZREK 1. Naj bo F holomorfna funkcija na območju Ω, ki je razreda C^1. Naj bo ~~z~~ D omejeno območje z odsekoma gladkim robom, t.j. z robom iz končnega števila enostavnih sklenjenih odsekoma gladkih krivulj, tako da je $D \cup bD \subset \Omega$. Tedaj velja

$$\int_{bD} F(z)\,dz = 0.$$

Dokaz. Uporabimo Greenovo formulo

$$\int_{bD} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\,dy$$

ki velja za poljubni C^1 funkciji P, Q na Ω.

Sedaj je, če je $F = u + iw$

$$\int_{bD} F(z)\,dz = \int_{bD} [u(x,y) + iw(x,y)](dx + i\,dy)$$

$$= \int_{bD} [u\,dx - w\,dy] + i \int_{bD} [w\,dx + u\,dy]$$

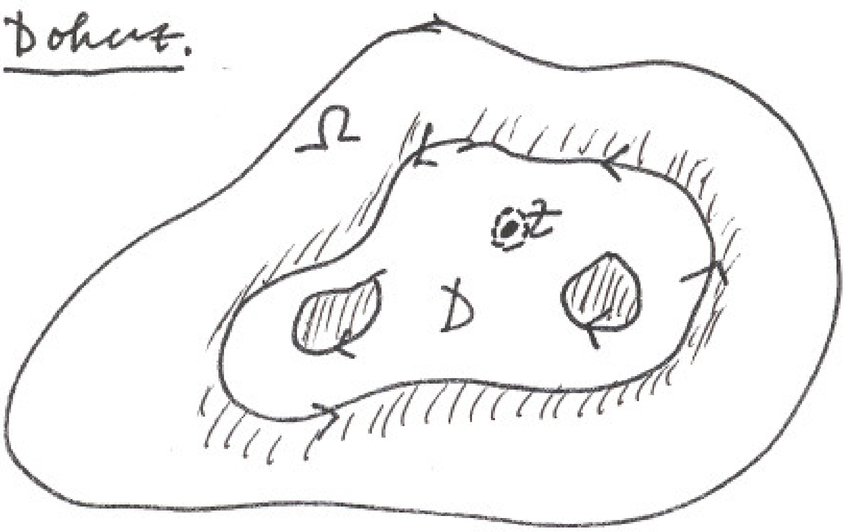
$$\underset{\uparrow \text{ Gr. for.}}{=} \iint_D \underbrace{\left[-\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]}_{\equiv 0 \ \leftarrow \text{ CR enačbe}} dx\,dy + i \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)}_{\equiv 0} dx\,dy$$

$$\equiv 0. \ \blacksquare$$

<u>POMOŽNI IZREK 2</u> Naj bo vse kot v Pomožnem izreku 1. Tedaj za vsak $z \in D$ velja

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

<u>Dokaz.</u>



Fiksirajmo $z \in D$. Funkcija
$\zeta \mapsto \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}$ je spet holomorfna
funkcija razreda $\mathcal{C}^1$ na $\Omega \setminus \{z\}$.
(Njen odvod je $-\frac{F'(\zeta) - (\zeta - z)F(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$,
zvezna funkcija na $\Omega \setminus \{z\}$).
Naj bo

$$D' = D \setminus \overline{D(z,r)},$$

kjer je $\overline{D(z,r)}$ zaprt krog s središčem
z in polmerom r, r zelo majhen.
Tedaj je

$$\int_{bD'} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

torej

$$\int_{bD} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{bD(z,r)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0. \qquad (*)$$

Oglejmo si

$$\int_{bD(z,r)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{bD(z,r)} \frac{F(z)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{bD(z,r)} \frac{F(\zeta) - F(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= F(z) \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\, dt + \int_0^{2\pi} [F(z + re^{it}) - F(z)] \cdot \frac{ire^{it}}{re^{it}}$$

$$= i \cdot F(z) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} [F(z+re^{it}) - F(z)] \cdot i\,dt.$$

Pri $r \to 0$ je

$$\max_{0 \le t \le 2\pi} |F(z+re^{it}) - F(z)| \to 0$$

torej gre pri $r \to 0$ integral zgoraj proti 0. Torej v (*) pri $r \to 0$ dobimo

$$\int_{bD} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i F(z) = 0 \qquad ///$$

Opomba $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ imenujemo Cauchyjevo jedro

POMOŽNI IZREK 3 Naj bo f holomorfna funkcija na območju Ω, ki je razreda $\mathcal{C}^1$. Tedaj ima f na Ω (kompleksne) odvode vseh redov. Če je D kot v Pom. izrekih 1, 2, velja

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{bD} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

Dokaz. Vemo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Sedaj

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{bD} f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-(z+h)} - \frac{1}{\zeta-z}\right) d\zeta$$

$$= \cancel{\frac{1}{h}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{bD.} f(\zeta)\,\frac{\cancel{h}}{(\zeta-z)(\zeta-(z+h))}\,d\zeta$$

Pri $h\to 0$ integrand konvergira k

$$f(\zeta)\frac{1}{(\zeta-z)(\zeta-z}$$

enakomerno na bD, zato integral konvergira k

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{bD}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2} = f'(z)$$

Torej lahko odvajanje nesemo pod integral

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$$

To ponavljamo

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n\left(\frac{1}{\zeta-z}\right) = \frac{n!}{(\zeta-z)^{n+1}}$$

torej

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{bD}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}.$$

Torej ima f odvode vseh redov na D.

Ker lahko D izbiramo poljubno, sledi, da ima f na D odvode vseh redov.

<u>POMOŽNI IZREK 4</u> Naj bo f funkcija holomorfna nad množico Ω. Tedaj ~~ima~~ je f razreda C^1 na Ω.

<u>Dokaz</u> Pokažemo, da je f razreda C^1 na vsakem disku Δ v Ω.
Naj bo Δ tak disk. Ker je Δ konveksen, ima f na Δ po Cauchyjevem izreku primitivno funkcijo F. Ta je seveda razreda C^1, zato ima po Pom. izreku 3 na Δ odvode vseh redov $F', F'', \dots$.
Ker je $f \equiv F'$, sledi, da ima tudi f odvode vseh redov. V posebnem, to pomeni, da je f' holomorfna funkcija od koder sledi, da je f' seveda zvezna. Torej je f razreda C^1!

<u>Opomba</u> Od tod sledi, da vsi pomožni izreki $^{1-3}$ veljajo brez predpostavke posebej, da je f razreda C^1 (ta je avtomatično izpolnjena. Torej

IZREK Naj bo f holomorfna funkcija na območju Ω. Tedaj ima f na Ω kompleksne odvode vseh redov (ki so zvezna holo funkcije). Če je D omejeno območje z odsekoma gladkim robom (pozit. orient) tako, da je $D \cup bD \subset \Omega$, velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in D)$$

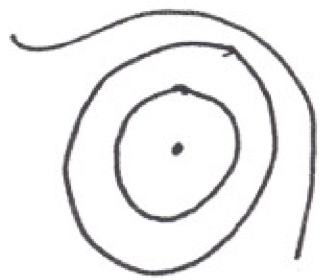
(Cauchyjeva formula). Dalje, za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{bD} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (z \in D).$$

Razvoj holomorfne funkcije v vrsto.

Naj bo Ω območje, f holomorfna na Ω in naj bo $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$. Tedaj je po Cauchy-jevi formuli

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD(a,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (z \in D(a,R))$$



Naj bo sedaj $0 < r < R$

Tedaj je za $z \in D(a,r)$

$$\left| \frac{z-a}{\zeta - a} \right| \leq \frac{r}{R} < 1 \quad \text{za vse } \zeta \in bD(a,R)$$

torej

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

$$= \frac{1}{\zeta-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

Vrsta je za vsak fiksen $z \in D(a,r)$ na $bD(a,R)$ majorizirana z konvergentno potenčno vrsto $\sum \frac{r^n}{R^{n+1}} = \frac{1}{R} \sum \left(\frac{r}{R}\right)^n$,

Zato na $bD(a,R)$ enakomerno konvergira.
Torej je za $z \in D(a,r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD(a,R)} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} \, d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{bD(a,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \right] \cdot (z-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z-a)^n \quad \text{Torej}$$

IZREK

<u>IZREK</u> Naj bo Ω območje in f holo na Ω. Naj bo $a \in \Omega$. Tedaj je mogoče f v okolici a razviti v konvergentno potenčno vrsto. Ta vrsta konvergira na največjem krogu $D(a,R)$ ki je vsebovan v Ω in povsod na $D(a,R)$ je njena vsota enaka $f(z)$.

IZREK (Morera). Naj bo Ω odprta množica v $\mathbb{C}$ in f taka zvezna fja na Ω, da je $\int_{b\Delta} f(z)dz = 0$ za vsak zaprt. trikotnik Δ, vsebovan v Ω.
Tedaj je f holomorfna na Ω.

Dokaz. Naj bo $D \subset \Omega$ konveksna množica. Kot v dokazu Cauch. izreka na konveksni množici pokažemo, da ima f na D primitivno funkcijo F, ki je holomorfna. Tedaj je po zgornjem $f' = F$ holomorfna. ⧄

POSLEDICE DEJSTVA, DA SO HOLO. FUNKCIJE LOKALNO VSOTE KONVERG. POTENČNIH VRST

IZREK Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ območje, $f \in H(\Omega)$ in $Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$ množica ničel funkcije f. (ničelna množica).
Tedaj je ali $Z(f) = \Omega$ (ko je $f \equiv 0$) ali pa $Z(f)$ nima stekališča v Ω.
V drugem primeru za vsak $a \in Z(f)$ obstaja natanko eno naravno število $m = m(a)$, da je

$$f(z) = (z-a)^m \cdot g(z) \qquad (z \in \Omega)$$

kjer je $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ in $g(a) \neq 0$.
Množica $Z(f)$ je v tem primeru največ števna.

<u>Opomba.</u> s je stekališče množice S, če je v vsaki okolici $\mathcal{U}$ točke s vsaj ena od s različna točka množice S.

<u>Opomba</u> Število $m=m(a)$ zgoraj se imenuje <u>red</u> <u>ničle</u> a funkcije f.

<u>Dokaz</u> Naj bo A množica stekališč $Z(f)$ v Ω.
Ker je f zvezna, je $A\subset Z(f)$.
Naj $a\in Z(f)$, naj $r>0$ tak, da je $D(a,r)\subset\Omega$.
Po izreku od zadnjič

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \quad (z\in D(a,r))$$

Sedaj sta dve možnosti. Ali so vsi c_n enaki 0, ko je $D(a,r)\subset Z(f)$, zato $D(a,r)\subset A$ ali pa

obstaja najmanjši m, da je $c_m\neq 0$. Jasno je $m>0$, saj je $f(a)=0$. Definirajmo

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{(z-a)^m} & (z\in\Omega\setminus\{a\}\\ c_m & z=a.\end{cases}$$

Tedaj je $f(z)=(z-a)^m\cdot g(z) \quad (z\in\Omega)$
Jasno je $g\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$. Velja tudi

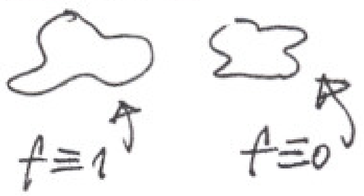
$$g(z)=c_m+c_{m+1}(z-a)+c_{m+2}(z-a)^2+\ldots \quad (z\in D(a,r))$$

Torej je $g\in\mathcal{H}(D(a,r))$. Izven okolice a pa holomorfnost g ni problem. Zato je $g\in\mathcal{H}(\Omega)$.
Dalje $g(a)=c_m\neq 0$. Zaradi zveznosti g obstaja okolica a, kjer je $g(z)\neq 0$.
Torej je a izolirana točka od $Z(f)$.

Če je $a \in A$ mora biti res prav zgoraj.
Torej je A odprta
Naj bo $B = \Omega \setminus A$. Iz definicije A sledi, da mora biti B odprta. Torej je Ω unija dveh disjunktnih odprtih množic, zato mora biti, ker je Ω povezana, ena od teh prazna. Torej je ali $A = \Omega$, ko je $f \equiv 0$, ali pa $A = \emptyset$. Tedaj ima $Z(f)$ v vsaki kompaktni $K \subset \Omega$ največ končno točk (sicer bi bilo tudi stekališče v Ω, kar pa ni, saj $A = \emptyset$). ///

<u>POSLEDICA</u> Če sta f, g holo na <u>območju</u> $\Omega \subset \mathbb{C}$ in $f(z) = g(z)$ za vse z iz neke množice, ki ima stekališče v Ω, je $f(z) = g(z)$ za vse $z \in \Omega$.

<u>Opomba</u> To ni več res, če Ω ni povezano.



taka je holomorfna.

<u>Definicija</u> Če je $a \in \Omega$ in $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ pravimo, da ima f izolirano singularno točko v a (izol. singularnost v a); če ~~je~~ f lahko dodefiniramo v a tako, da je nova funkcija holomorfna v $\mathcal{H}$, pravimo, da je singularnost odpravljiva, a je odpravljiva singularna točka.

<u>IZREK</u> Naj bo $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ in naj bo za neki $r>0$ funkcija f omejena na punktiranem disku $0<|z-a|<r$. Tedaj ima f odstranljivo singularnost v a.

<u>Dokaz</u>. Definirajmo

$$h(z)=\begin{cases}(z-a)^2 f(z) & z \in \Omega \setminus \{a\}\\ 0 & z=a\end{cases}$$

Funkcija h je holomorfna povsod na $\Omega \setminus \{a\}$. V točki a pa je

$$h'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{h(a+h)-h(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2 f(a+h)}{h}=0$$

saj je $|f(z)|\le M$ na $0<|z-a|<r$

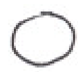
Sledi $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ in (saj je $h(a)=0$, $h'(a)=0$)

$$h(z)= c_2(z-a)^2+c_3(z-a)^3+\dots \qquad (z\in D(a,r))$$

in

$$f(z)= c_2+c_3(z-a)+c_4(z-a)^2+\dots \qquad (z\in D(a,r)\setminus\{a\}).$$

Če torej definiramo $f(a)=c_2$ smo f razširili do holom. funkcije. ///

<u>Oznaka</u> $D(a,r)=\{z : |z-a|<r\}$ 

$D'(a,r)=\{z : 0<|z-a|<r\}$ 

<u>IZREK</u> Naj bo $a\in\Omega$ in $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$. Tedaj velja natanko ena od naslednjih treh možnosti

(a) f ima odstranljivo singularnost v a

(b) obstajajo kompleksna števila $c_1,\dots,c_m$, m ~~je~~ naravno število, $c_m\neq 0$, da ima

$$f(z)-\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{(z-a)^k}$$

odstranljivo singularnost v a

(c) Če je $r>0$ in $D(a,r)\subset\Omega$, tedaj je $f(D'(a,r))$ gosta v $\mathbb{C}$, t.j. vsaka točka $\mathbb{C}$ je stekališče množice $f(D'(a,r))$.

Opomba Če velja (b), pravimo, da ima f pol reda m v a. Polinom $\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{(z-a)^k}$, polinom v $\frac{1}{z-a}$ se imenuje glavni del f v a.
V tem primeru je jasno $|f(z)|\to\infty$ pri $z\to a$
(saj je $(z-a)^k f(z)=c_k+c_{k-1}(z-a)+\dots\to c_k\neq 0$ pri $z\to a$ kar je mogoče le, če je $|f(z)|\to\infty$)
Če velja (c), pravimo da ima f bistveno singularnost v a.

Dokaz. Denimo, da (c) ne velja. Tedaj obstajajo $r>0$ in $\delta>0$ in kompl. število w, da je

$$|f(z)-w|\geq\delta \quad (z\in D'(a,r))$$

Definirajmo

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-w} \quad (z\in D'(a,r)) \qquad (*)$$

Tedaj je $g\in\mathcal{H}(D'(a,r))$ in $|g(z)|<\frac{1}{\delta}$ $(z\in D'(a,r))$.
Po zgornjem izreku je g mogoče razširiti do holo funkcije na $D(a,r)$. ~~Torej velja (a)~~
Če je $g(a)\neq 0$ iz $(*)$ sledi, da je $f(z)=w+\frac{1}{g(z)}$ (izraz iz $(*)$) omejena v $D'(a,\rho)$ za neki $\rho>0$. Torej velja (a).
Če ima g ničlo reda $m\geq 1$ v a, je

$$g(z)=(z-a)^m\cdot g_1(z) \quad (z\in D(a,r))$$

kjer je ~~$g_1(z)$~~ $g_1\in\mathcal{H}(D(a,r))$ in $g_1(a)\neq 0$.
Dalje, ker je

$$g_1(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\frac{1}{f(z)-w}$$

sledi, da $g_1(z) \neq 0$ $(z \in D'(a,r))$. Naj bo $h = \frac{1}{g_1}$ v $D(a,r)$. Tedaj je $h \in \mathcal{H}(D(a,r))$, h nima ničle v $D(a,r)$ in

$$f(z) - w = (z-a)^{-m} h(z) \qquad (z \in D'(a,r))$$

Ker je

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad (z \in D(a,r)), \quad b_0 \neq 0$$

sledi da velja (b)$_p$ saj je

$$(z-a)^{-m}\left[b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_m(z-a)^m + \dots\right]$$

$$= \left[\frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \dots + b_m\right] + b_{m+1}(z-a) + \dots$$

in $f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^m} + \dots + (b_m + w) + b_{m+1}(z-a) + \dots$ III

<u>TRDITEV</u> Naj bo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a,R)).$$

Če je $0 < r < R$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta$$

<u>Dokaz.</u> $f(a+re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$

Če je $0<r<R$, vrsta konvergira enakomerno za $\theta \in [-\pi,\pi]$. Zato je

$$\cancel{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+re^{i\theta})}$$

$$|f(a+re^{i\theta})|^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{c_m} r^m e^{-im\theta}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_n \overline{c_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}$$

Zato

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}. \quad III$$

<u>IZREK</u> (Liouville) Vsaka omejena cela funkcija je konstanta

<u>Opomba</u> cela funkcija = holo v vsej ravnini.

<u>Dokaz</u> Naj bo f omejena cela funkcija

$$|f(z)| \leq M \quad (z \in \mathbb{C})$$

Tedaj je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

Po prejšnjem izreku sledi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta \leq M^2$$

Torej, za vsak n velja, $n \geq 1$

$$|c_n|^2 r^{2n} \leq M^2 \quad \text{za vse } r,$$

kar je mogoče le, če je $c_n = 0$ $(n \geq 1)$ in

$f(z) \equiv c_0$. III

<u>IZREK</u> osnovni izrek algebre + dokaz

<u>IZREK</u> (O MAKSIMUMU MODULA) Naj bo $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ <u>območje</u>. Če obstajata $a \in \Omega$ in disk $D(a,R) \subset \Omega$, $R > 0$, da je $|f(z)| \leq |f(a)|$ $(z \in D(a,R))$, je f konstanta.

<u>Opomba.</u> To pomeni, da pri nekonstantni f, $|f|$ ne more imeti lokalnega maksimuma.

Dokaz Denimo, da je za $R>0$, $D(a,R)\subset\Omega$ in

$$|f(z)|\le|f(a)| \quad (z\in D(a,R)).$$

Naj

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (z\in D(a,R))$$

Po izreku zgoraj je

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\cdot r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(a+re^{i\theta})|^2d\theta \le |f(a)|^2=|c_0|^2$$

Od tod sledi $c_1=c_2=\dots=0$, $f(z)\equiv f(a)$ $(z\in D(a,R))$.

Ker je Ω povezana, sledi da je $f(z)\equiv f(a)$ $(z\in\Omega)$. ///

IZREK (Cauchy-jeve ocene) Če je $f\in\mathcal{H}(D(a,R))$ in $|f(z)|\le M$ $(z\in D(a,R))$ je

$$|f^{(n)}(a)|\le\frac{n!\,M}{R^n} \qquad (n=1,2,\dots)$$

Dokaz. Če je $r<R$ je po zg. izreku

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right|^2\cdot r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(a+re^{i\theta})|^2d\theta \le M$$

torej vsak člen

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}r^n\le M$$

in zato

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\le\frac{M}{r^n} \qquad 0<r<R$$

torej pri $r\to R$

$$|f^{(n)}(a)|\le\frac{n!\,M}{R^n}. \qquad ///$$

<u>Def</u>. Naj bo $\{f_j\}$ zaporedje funkcij na odprti množici Ω. Pravimo, da f_j konvergira enakomerno po kompaktih v Ω k funkciji f če za vsako kompaktno množico $K \subset \Omega$ in za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N = N(K, \varepsilon)$, da je

$$|f_j(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{za vse } z \in K$$
$$\text{za vse } j \geq N.$$

<u>Primer</u> $\{z^n\}$ konvergira k 0 enakomerno po kompaktih v $\Delta = \{z : |z| < 1\}$. Konvergenca <u>ni</u> enakomerna na Δ. (Dokaži oboje doma).

<u>IZREK</u>. Naj bo $f_j \in \mathcal{H}(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots$, Ω odprta množica. Naj $f_j \to f$ enakomerno po kompaktih v Ω. Tedaj je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ in $f_j' \to f'$ enakomerno po kompaktih v Ω.

<u>Dokaz</u> Konvergenca je enakomerna na vsakem zaprtem disku v Ω. Sledi, da je f zvezna (enakomerna limita zveznih funkcij je zvezna – premisli doma). Naj bo Δ zaprt trikotnik, vsebovan v Ω. Tedaj je Δ kompakten in zato

$$\int_{b\Delta} f(z)\,dz = \lim_{j\to\infty} \int_{b\Delta} f_j(z)\,dz \underset{\uparrow}{=} 0$$

zaradi holomorfnosti f_j so vsi integrali enaki 0 po Cauchyjevem izreku.

Torej je $\int_{b\Delta} f(z)\,dz = 0$ za vsak zaprt trikotnik, vsebovan v Ω. Po Morerovem izreku sledi, da je f holomorfna na Ω.

Naj bo $K \subset \Omega$ kompaktna. Za vsak $z \in K$ vzamemo odprt disk $D(z, r_z)$, za katerega $\overline{D(z, 2r_z)}$ še leži v Ω. Zaradi kompaktnosti lahko izberemo končno pokritje s takimi diski $D(z_1, r_{z_1}) \dots D(z_n, r_{z_n})$. Tedaj je $\tilde{K} = \overline{D(z_1, 2r_{z_1})} \cup \dots \cup \overline{D(z_n, 2r_{z_n})}$ kompaktna množica vsebovana v Ω in če je $r = \min\{r_{z_1}, \dots r_{z_n}\}$ je za vsak $z \in K$, $D(z, r) \subset \tilde{K}$.
Uporabimo sedaj Cauchyjeve neenakosti za $f_j - f$ na $D(z, r)$. Dobimo

$$|f_j'(z) - f'(z)| < \frac{1}{r} \cdot \max_{z \in \tilde{K}} |f_j(z) - f(z)|$$

Torej f_j' konvergira proti f' enakomerno na K. ///

<u>POSLEDICA</u> Pri predpostavkah izreka, $f_j^{(n)} \to f^{(n)}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

<u>IZREK</u> Naj bo Ω odprta, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, naj bo $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ in naj velja

$$|f(a)| < \min_{z \in bD(a,r)} |f(z)| \qquad (*)$$

Tedaj ima f ničlo v $D(a,r)$.

<u>Opomba</u> Predpostavka pomeni, da $|f|$ doseže svoj minimum na $\overline{D(a,r)}$ v notranjosti kroga $D(a,r)$. Tedaj je ta minimum enak 0.

<u>Dokaz</u> Denimo, da f nima ničle na $D(a,r)$. Tedaj zaradi $(*)$ nima ničle na $\overline{D(a,r)}$ torej obstaja še malo večji disk $D(a,R)$, $R>r$, v katerem f nima ničle. Naj bo $g = 1/f$. Tedaj je $g \in \mathcal{H}(D(a,R))$. Po principu maksima g v a ne more doseči vrednosti večje od $\max_{z \in bD(a,r)} |g(z)|$ (sicer bi to pomenilo, da doseže svoj maksimum na $\overline{D(a,r)}$ v neki notranji točki $a \in D(a,r)$, torej je konstanta na $D(a,r)$, protislovje)
Torej je

$$\frac{1}{|f(a)|} = |g(a)| \le \max_{z \in bD(a,r)} |g(z)| = \frac{1}{\min_{z \in bD(a,r)} |f(z)|}$$

in $\quad |f(a)| \ge \min_{z \in bD(a,r)} f(z)$, protislovje z $(*)$.

Torej ima f ničlo na $D(a,r)$. ///

<u>Def.</u> Naj bo $U \subset \mathbb{C}$ odprta množica in $f: U \to \mathbb{C}$ funkcija. Pravimo, da je f <u>odprta preslikava</u> če je $f(V)$ odprta množica za vsako odprto $V \subset U$.

<u>Opomba</u> Vemo, da je f zvezna natanko takrat, ko je $f^{-1}(O)$ odprta za vsako odprto $O \subset \mathbb{C}$. Tu zgoraj pa gre za slike odprtih množic in ne ~~odprte slike~~ inverzne slike odprtih množic.

Primer $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2$. Tedaj je $\varphi([-1,1)) = [0,1)$.
Torej φ ni odprta preslikava iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$.

IZREK (O odprti preslikavi) Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ območje in f nekonstantna holomorfna funkcija na Ω. Tedaj je $f: \Omega \to \mathbb{C}$ odprta preslikava.

Dokaz. Naj bo $O \subset \Omega$ odprta, $a \in O$. Pokažemo, da $f(O)$ vsebuje nek krog s središčem v $f(a)$; s tem bo pokazano, da je f odprta.
Brez izgube splošnosti predpostavimo, da je $f(a) = 0$ (sicer f zamenjamo z $f(z) - f(a)$).
Obstaja $r > 0$, $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, da $f(z) \neq 0$ za $z \in bD(a,r)$.
Res: če takega r ni, ima f ničle poljubno blizu a, ki so različne od a; ničle bi morale torej imeti stekališče $a \in \Omega$ in f bi morala biti konstanta 0, kar pa ni po predpostavki.

Naj bo $\delta > 0$ tak, da je $2\delta = \min_{z \in bD(a,r)} |f(z)| > 0$
(zvezna pozitivna funkcija $z \mapsto |f(z)|$ doseže na kompaktni množici svoj minimum, ki je > 0).
Pokažemo, da je $D(0,\delta) \subset f(O)$.
Naj bo $b \in D(0,\delta)$. Tedaj je $|b| < \delta$ in zato

$$|f(z) - b| \geq |f(z)| - |b| > 2\delta - \delta = \delta \qquad z \in bD(a,r)$$

Torej je

$$\min_{z \in bD(a,r)} |f(z) - b| \geq \delta > |b| = |f(a) - b|$$

Po prejšnjem izreku sledi, da ima funkcija $z \mapsto f(z) - b$ ničlo na $D(a,r)$, da je torej $b = f(z')$ za nek $z' \in D(a,r)$. Torej je $b \in f(O)$, torej $D(0,\delta) \subset f(O)$. $\square$

<u>IZREK</u> Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ odprta $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$
$f'(z_0) \neq 0$
Tedaj obstajata okolica V od z_0 in okolica W od $f(z_0)$ da je
(i) $f|V : V \to W$ je bijekcija
(ii) funkcija $\psi : W \to V$ definirana z $\psi(f(z)) \equiv z$ $(z \in V)$ (t.j. inverz od $f|V$) je holomorfna na W.

~

DISKUSIJA

Naj bo $f(z)$ holomorfna v okolici z_0 in $f'(z_0) \neq 0$. Pišimo $z = x + iy$ in $f(z) = u(x,y) + iw(x,y)$. Tedaj f predstavlja preslikavo F

$$\begin{array}{ccccc} z = x+iy = & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u(x,y) \\ w(x,y) \end{pmatrix} & = u(x,y)+iw(x,y) = f(z) \\ \mathbb{C} = & \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 & = \mathbb{C} \end{array}$$

Jasno gre $(x_0,y_0) \mapsto (u(x_0,y_0), w(x_0,y_0))$. Vemo že, da je $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$, torej (ker je f' zvezna) so vsi odvodi $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$ zvezni).
Torej je F preslikava razreda C^1 v okolici (x_0,y_0).
Dalje, $(DF)(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial w}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$

Ker je $f'(z_0) \neq 0$, sledi $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial w}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$, torej vsaj eden od $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial w}{\partial x}(x_0,y_0)$ je različen od 0.

Zaradi Cauchy-Riem. enačb je

$$(DF)(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & -\frac{\partial w}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial w}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^2 \neq 0,$$

torej po izreku o inverzni preslikavi obstaja okolica V od (x_0,y_0) in W od $F(x_0,y_0)$ da F preslika V na W bijektivno in da je $(F|V)^{-1}$ razreda C^1.
Torej $f: V \to W$ je bijekcija in $(f|V)^{-1}$ je zvezna

~

<u>Dokaz točke</u> Diskusija zgoraj da okolici V in W, da velja (i). V še zmanjšamo (in s tem tudi W), da je $f'(z) \neq 0$ ($z \in V$). Naj bo $\varphi = (f|V)^{-1}$.
Izberimo $z_1, z_2 \in V$ $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$, torej $z_1 = \varphi(w_1), z_2 = \varphi(w_2)$. Tedaj je

$$\frac{\varphi(w_2) - \varphi(w_1)}{w_2 - w_1} = \frac{z_2 - z_1}{f(z_2) - f(z_1)}$$

Pri $w_2 \to w_1$ gre zaradi zveznosti $\varphi = (f|V)^{-1}$ tudi $z_2 \to z_1$. Desna stran torej konvergira k $\frac{1}{f'(z_1)}$ leva pa k $\varphi'(w_1)$. Ker je $f'(z_1) \neq 0$ sledi, da je φ odvedljiva v w_1. (za vsak $w_1 \in W$). Torej je φ res holo na W. $\blacksquare$