Obstoj primitivne funkcije

Naj bo D območje in f holomorfna funkcija na D. Primitivna funkcija F funkcije f, če obstaja, je taka holomorfna funkcija F na D, da je $F'(z)=f(z)$ za vse $z \in D$.

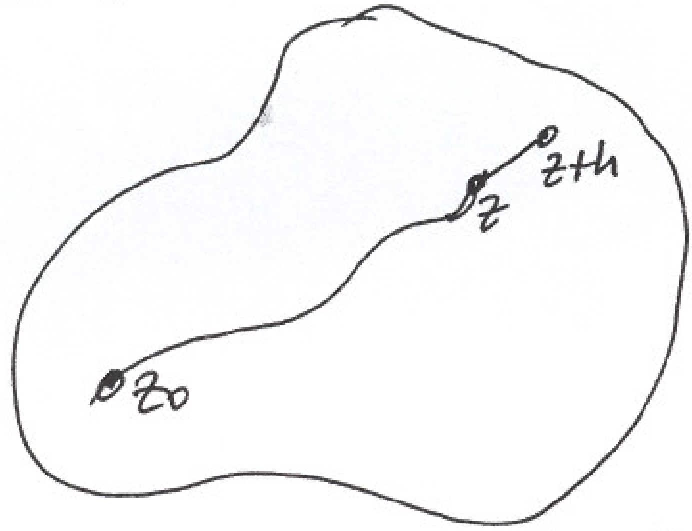
<u>IZREK</u> Naj bo D območje in f holomorfna funkcija na D. Tedaj ima f primitivno funkcijo na D natanko tedaj ko je $\int_\gamma f(z)dz=0$ po vsaki sklenjeni poti γ v D, ali, kar je isto, ko je $\int_\gamma f(z)dz$ neodvisen od poti.

<u>Dokaz.</u> Naj ima f primitivno funkcijo F. Tedaj že vemo, da je $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma F'(z)dz = 0$ po vsaki sklenjeni poti γ v D. Obratno, naj bo $\int_\gamma f(z)dz=0$ po vsaki sklenjeni poti γ v D, t.j. naj bo integral $\int_\gamma f(z)dz$ neodvisen od poti. Fiksirajmo točko $z_0 \in D$. Za $z \in D$ naj bo $\gamma_{z_0 z}$ pot v D z začetkom

točko z_0 in končno točko z. Definiramo

$$F(z) = \int_{\gamma_{z_0 z}} f(\zeta)\, d\zeta$$

Definicija je dobra, integral je zaradi neodvisnosti od poti odvisen le od z.



Naj bo $[z, z+h]$ daljica z začetno točko z in končno točko $z+h$.

Dobimo

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta$$

Kot smo to že naredili (Posledica 1 Cauchy-jevega izreka za trikotnik) vidimo, da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z).$$

Vemo že, da na konveksnem območju primitivna funkcija F holo funkcije f vedno obstaja.

Za splošna območja to ni nujno res:

<u>Primer.</u>

$D=\{z\in\mathbb{C} : \frac{1}{2}<|z|<2\}$ kolobar.

$f(z)=\frac{1}{z}$ je holo na D, a na D nima primitivne funkcije.

Recimo, da bi jo imela. Tedaj bi moralo biti $\int_\gamma f(z)dz=0$ za vsako sklenjeno krivuljo v D. Naj bo ta krivulja

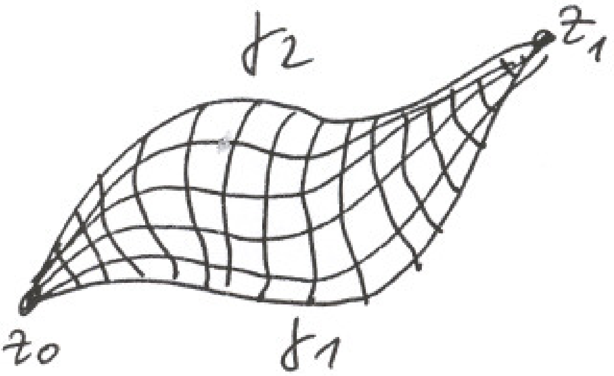
$$\gamma(t)=e^{it} \quad (0\leq t\leq 2\pi)$$

pozitivno orientirana enotska krožnica. Ta je v D

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}\cdot ie^{it}dt=2\pi i\neq 0$$

IZREK Naj bo D enostavno povezano območje. Tedaj ima vsaka holo. funkcija na D primitivno funkcijo

Ideja dokaza: Pokažimo, da je $\int_\gamma f(z)dz$ neodvisen od poti



γ_1 je homotopna γ_2 zaradi enostavne povezanosti

Vsak $\square$ je vsebovan v konveksni podmnožici od Ω, zato je $\int_{\partial\square} f(z)dz=0$.

Seštejemo integrale skupaj in dobimo $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

Ostanek dokaza je isti kot za konveksna območja.

POSLEDICA 4 Naj bo Ω enostavno povezano ~~območje~~ območje in $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ taka, da $f(\zeta) \neq 0$ $(\zeta \in \Omega)$. Tedaj obstaja $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, da je $e^{g(z)} = f(z)$ $(z \in \Omega)$

Dokaz. Ker $f \neq 0$ na Ω, je $\frac{f'}{f}$ holo na Ω. Po posledici 3 zgoraj ima f'/f primitivno funkcijo. Naj bo torej g_1 taka,

$$g_1' = \frac{f'}{f}$$

Naj bo $h = e^{g_1}$ Tedaj je h holo, brez ničel na Ω, torej $\frac{f}{h}$ holo na Ω. $h' = e^{g_1} \cdot g_1' = h g_1'$

$$\left(\frac{f}{h}\right)' = \frac{f'h - h'f}{h^2} = \frac{f'h - f h \cdot g_1'}{h^2} = \frac{f'h - h \cdot f'}{h^2} \equiv 0.$$

$(h' = h \cdot g_1')$

Sledi $\left(\frac{f}{h}\right) = c$ (lokalno, zaradi povezanosti globalno).

$f = c \cdot h = c \cdot e^{g_1} = e^{\log c} \cdot e^{g_1} = e^{g}$, $g = (\log c) \cdot g_1$. $\blacksquare$

LAURENTOV RAZVOJ, IZREK O RESIDUIH

IZREK Naj bo $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ in naj bo f holomorfna v kolobarju $A = \{z : R_1 < |z-a| < R_2\}$. Tedaj je

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \qquad (*)$$

pri čemer prva vrsta konvergira absolutno in enakomerno na $\{|z-a| \geq \rho\}$ za vsak $\rho > R_1$ in druga vrsta konvergira absolutno in enakomerno na $\{|z-a| \leq \rho\}$ za vsak $\rho < R_2$.

Dalje, koeficienti a_n so enaki

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \qquad (**)$$

kjer je $\gamma = \{|\zeta - a| = r\}$ za poljuben r, $R_1 < r < R_2$, torej so enolično določeni s funkcijo f.

Opomba Vrsti $(*)$, t.j. vrsti

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

pravimo Laurentova vrsta za funkcijo f v kolobarju $\{ R_1 < |z-a| < R_2\}$.

Krožnice γ zgoraj morajo biti orientirane v pozit. smislu.

<u>Dokaz</u> Če je $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ ni

$$A(r_1,r_2) = \{\zeta : r_1 < |\zeta - a| < r_2\}$$

je po dokazanem Pomožne trditve 1 $\int_{bA(r_1,r_2)} \varphi(z)\,dz = 0$ za vsako holomorfno funkcijo na A.

Če je torej

$\gamma_1 = \{a + r_1 e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ pozit. orient

$\gamma_2 = \{a + r_2 e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ pozit orient

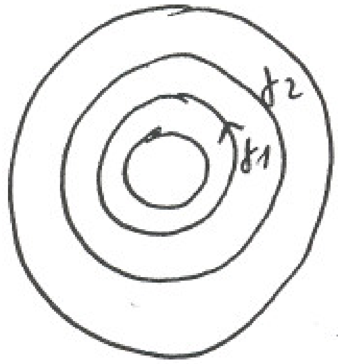
je torej

$$\int_{\gamma_1} + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz = 0,$$

torej

$$\int_{\gamma_1} \varphi(z)\,dz = \int_{\gamma_2} \varphi(z)\,dz,$$

v posebnem, ker je $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$ holo na A, sledi, da (**) ni odvisen od γ.



Po Cauchy-jevi formuli je za vsak $z \in A(r_1, r_2)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bA(r_1, r_2)} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

V prvem integralu pišimo, za $\zeta \in \gamma_2$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a-z}{\zeta - a}} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}}$$

Ker je $\left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| = \frac{|z-a|}{r_2} < 1$ je

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\left[1 + \frac{z-a}{\zeta - a} + \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^2 + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta - a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta - a)^3} + \dots$$

kjer vrsta konvergira enakomerno na $|\zeta - a| = r_2$

Zato je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-a}+\frac{z-a}{(\zeta-a)^2}+\dots\right]d\zeta$$

$$=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta\right]+\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}d\zeta\right](z-a)+\left[\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^3}d\zeta\right](z-a)^2+\dots$$

$$=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\dots$$

Vrsta konvergira za vsak z,
to potenčna vrsta, konvergira za vsak z, $|z-a|<r_2$,
in enakomerno ~~za~~ na $|z-a|\le\rho$ za vsak $\rho<r_2$.

V drugem integralu pišimo, za $\zeta\in\gamma_1$

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a+a-z}=\frac{1}{a-z}\cdot\frac{1}{\frac{\zeta-a}{a-z}+1}=$$

$$=-\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}}$$

Ker je $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| = \frac{r_1}{|z-a|}<1$, je

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{z-a}\left[1+\frac{\zeta-a}{z-a}+\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^2+\dots\right]$$

$$=\frac{1}{z-a}+\frac{\zeta-a}{(z-a)^2}+\frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^3}+\dots$$

kjer vrsta konvergira enakomerno na $|\zeta-a|=r_1$

Zato je

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=+\frac{1}{2\pi i}\int\left[\left(\frac{1}{z-a}\right)+\frac{\zeta-a}{(z-a)^2}+\dots\right]f(\zeta)d\zeta$$

$$=\frac{1}{z-a}\left[\frac{1}{2\pi i}\int f(\zeta)d\zeta\right]+\left(\frac{1}{z-a}\right)^2\left[\frac{1}{2\pi i}\int f(\zeta)(\zeta-a)d\zeta\right]+\dots$$

$$=a_{-1}\frac{1}{z-a}+a_{-2}\frac{1}{(z-a)^2}+a_{-3}\frac{1}{(z-a)^3}+\dots$$

To je potenčna vrsta v $w=\frac{1}{z-a}$ in konvergira v $\frac{1}{r_2}<\left|\frac{1}{z-a}\right|<\frac{1}{r_1}$, zato konvergira enakomerno (če je $\varrho>r_1$) v $\frac{1}{|z-a|}\le\frac{1}{\varrho}<\frac{1}{r_1}$, torej enakomerno v $|z-a|\ge\varrho$. ∎

<u>POSLEDICA</u> Naj bo a izolirana singularnost holomorfne funkcije f in naj bo

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

njen Laurentov razvoj v $D(a,R)'=\{z: 0<|z-a|<R\}$. Tedaj je

(a) $z=a$ odstranljiva singularnost natanko tedaj ko je $a_n=0$ za vse $n\le -1$

(b) $z=a$ je pol reda m natanko tedaj ko je $a_{-m}\neq 0$ in $a_n=0$ za vse $n\le-(m+1)$

(c) $z=a$ je bistvena singularnost če je $a_n\neq 0$ za neskončno mnogo negativnih n.

<u>Dokaz</u> Če je $a_n=0$ $(n\le -1)$ je v $D(a,R)'$ f enaka funkciji, holo na $D(a,R)$. Zato ima f odpr. sing. Če ima f odpr. sing, je znamo mog. razviti f v pot. vrsto, torej $a_n=0$ za vse $n\le -1$.

~~Po znanem obnašanju okoli pola.~~
Če je $a_{-m}\neq 0$ in $a_n=0$ za $n\le-(m+1)$ ima f samo pol v a. Obratno je pa tako res.

Tretja možnost je torej ekvival. pogoju, da ima f b.s. v a.

Izolirana singularnost v ∞

Pravimo, da ima f izolirano singularnost v ∞, če je f holomorfna izven nekega kroga, če torej obstaja $R<\infty$, da je f holomorfna na $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. To je seveda isto kot če rečemo, da je $w \mapsto f(1/w)$ holomorfna na punktiranem disku $D'(0, 1/R)$.

Vrsto singularnosti torej klasificiramo glede na vrsto singularnosti funkcije $w \mapsto f(1/w)$ v točki 0

- f ima v točki ∞ odpravljivo singularnost, če ima $w \mapsto f(1/w)$ odpravljivo singularnost v 0
- f ima v točki ∞ pol ~~reda~~ reda m, če ima $w \mapsto f(1/w)$ ~~odpravljivo sin-~~ pol reda m v 0
- f ima v točki ∞ bistveno singularnost, če ima $w \mapsto f(1/w)$ v točki 0 bistveno singularnost.

Naj bo torej

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k \qquad (|z|>R).$$

$$\left(\text{torej } f\left(\tfrac{1}{w}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k w^{-k} \right.$$
$$\left. =\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{-j} w^{j}.\right)$$

Torej je singularnost v ∞ odpravljiva, če je $b_k=0$ za vse $k>0$, pol, reda m če je $b_k=0$ za vse $k>m$ in $b_m\neq 0$ in bistvena singularnost, če je neskončno mnogo b_k-jev, $k>0$, od 0 različnih.

Naj bo ∞ pol reda m, torej

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{m} b_k z^k. \quad (|z|>R). \quad , \quad b_m\neq 0$$

Tedaj $\sum_{k=1}^{m} b_k z^k$ imenujemo glavni del funkcije f v ∞.

<u>Opomba</u> Polinom stopnje n ima v ∞ pol reda n

<u>Opomba</u> Eksponentna funkcija ima bistveno singularnost v ∞, prav tako $\sin z, \cos z$.

Opomba. Če je funkcija f holomorfna v $|z|>R$ in če ima v ∞ odpravljivo singularnost, bomo rekli, da je holomorfna v ∞.

<u>Definicija</u> Naj ima holomorfna funkcija f izolirano singularnost v točki a in naj bo

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

njen Laurentov razvoj v punktirani okolici točke a.
Koeficient c_{-1} imenujemo <u>residuum funkcije f v točki a</u> in ga označimo z

$$\mathrm{Res}(f,a)=c_{-1}.$$

<u>Opomba</u> Od kod ime poseben pomen ?
Recimo, da je

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{na } D'(a,R)$$

in naj bo γ krožnica $\{z:|z-a|=r\}$,
kjer je $0<r<R$, t.j. $\gamma=\{a+re^{i\theta}:0\le\theta\le 2\pi\}$.
Tedaj je

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \int_\gamma (z-a)^n\,dz \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta}\cdot i r e^{i\theta}\,d\theta \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} r^n e^{i(n+1)\theta}\,d\theta \\ &= c_{-1}\cdot 2\pi i\end{aligned}$$

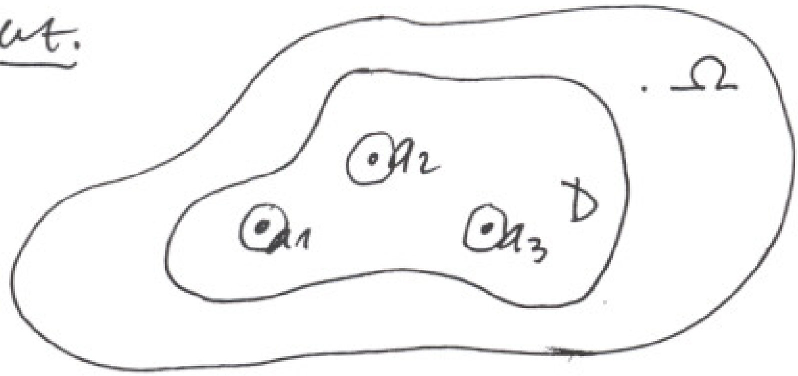
torej

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = c_{-1}.$$

IZREK (O residuih) Naj bo f holomorfna na območju Ω razen v izoliranih singularnih točkah $a_1, a_2, \dots a_n$. Naj bo D omejeno območje z odsekoma gladkim robom, tako da je $D \cup bD \subset \Omega$, in ki vsebuje točke $a_1, a_2, \dots a_n$. Tedaj je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{bD} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f, a_k).$$

Dokaz.



Naj bo $\varepsilon > 0$ tako majhen, da so zaprti krogi $\overline{D(a_k, \varepsilon)}$ vsi vsebovani v D in da so paroma disjunktni.
Naj bo $D_\varepsilon = D \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{D(a_k, \varepsilon)}$. Tedaj je D_ε območje z odsekoma gladkim robom in f je holomorfna v odprti množici, ki vsebuje $D_\varepsilon \cup bD_\varepsilon$.

Po znanem izreku (Pomožni izrek 1)

je
$$\int_{bD_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$$

ker je $bD_\varepsilon = bD + (-bD(a_1,\varepsilon)) + \dots + (-bD(a_n,\varepsilon))$

sledi
$$0 = \int_{bD_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{bD} f(z)\,dz - \int_{bD(a_1,\varepsilon)} f(z)\,dz - \dots - \int_{bD(a_n,\varepsilon)} f(z)\,dz$$

Od prej pa vemo, da je
$$\int_{bD(a_j,\varepsilon)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_j)$$

od tod sledi
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{bD} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k).$$ ///

Opomba - Računanje residuov

(a) če ima f pol prvega reda v točki a je

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

Dokaz $f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$

$$f(z)(z-a) = c_{-1} + c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + \dots$$

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = c_{-1} + \cancel{(z-a)}\underbrace{\lim_{z\to a}(z-a)g(z)}_{=0}.$$

(b) če ima f pol n-tega reda v a je

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]\right]$$

Dokaz

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \dots$$

$$(z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + \dots$$

Primer uporabe izreka o residuih.

Izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

Razstavimo

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}$$

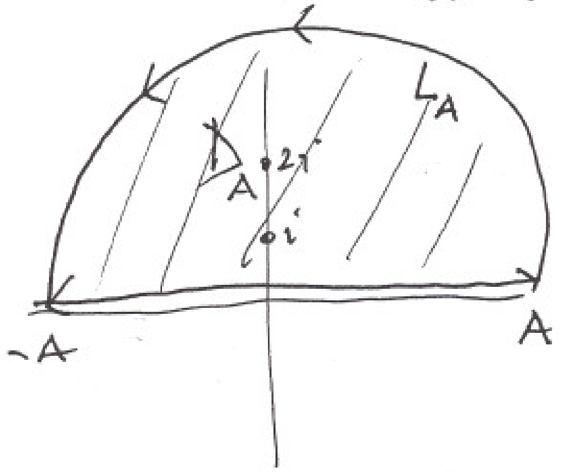
~~Pola~~ v zgornji polravnini sta dva $i, 2i$.

$$\mathrm{Res}(f,i) = \cancel{(z-i)\cdot f(} \lim_{z\to i}(z-i)\cdot f(z)$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{\cancel{(z-i)}}{\cancel{(z-i)}(z+i)(z-2i)(z+2i)} = \frac{1}{(2i)(-i)(3i)} = \frac{1}{6i}$$

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z \to 2i} \frac{\cancel{(z-2i)}}{(z-i)(z+i)\cancel{(z-2i)}(z+2i)}$$

$$= \frac{1}{i(3i)(4i)} = -\frac{1}{12i}$$



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{bD} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{1}{6i} - \frac{1}{12i}$$

$$\int_{bD} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{1}{12\cancel{i}} \cdot 2\pi \cancel{i} = \frac{\pi}{6}$$

$$\left| \int_{L_A} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} \right| = \left| \int_0^\pi \frac{iAe^{i\theta}\,d\theta}{(A^2e^{2i\theta}+1)(A^2e^{2i\theta}+4)} \right| \leq$$

$L_A : Ae^{i\theta}, 0<\theta<\pi$

$$\leq \frac{A}{(A^2-1)(A^2-4)} \int_0^\pi d\theta$$

pri $A\to\infty$ gre to $\to 0$, torej

$$\lim \int_{L_A} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = 0 \text{ in}$$

$$\lim_{A\to\infty} \int_{bD_A} = \lim \int_{-A}^{A} f(z)dz + \lim \int_{L_A} \dots \text{ etc.}$$

do konca.

Princip argumenta

IZREK Naj bo $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (Ω odprta množica) ~~in~~ (a) naj ima f ničlo reda m v točki $a \in \Omega$. Tedaj ima $\frac{f'}{f}$ enostavni pol v a (t.j. pol prvega reda) in

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m.$$

(b) Če pa je $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ in ima f pol reda m v točki a, ima $\frac{f'}{f}$ enostavni pol v a in

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = -m$$

Dokaz. (a). Naj ima f ničlo reda m v a. Tedaj je

$$f(z) = (z-a)^m g(z),$$

$g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g(a) \neq 0$. Za $z \neq a$ je

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-a)^{m-1} \cdot g(z) + (z-a)^m g'(z)}{(z-a)^m \cdot g(z)} =$$

$$= \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$ v okolici točke a (tam je $g(z)$ je $\neq 0$)

Torej je res

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m.$$

(b) Naj ima f pol reda m v a.
Tedaj je

$$f(z) = \frac{c_m}{(z-a)^m} + \frac{c_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_1}{z-a} + g(z)$$

$$\cancel{f'(z) = \frac{-m \cdot c_m}{(z-a)^{m+1}} - \frac{(m-1)c_{m-1}}{(z-a)^m} + \dots - \frac{c_1}{(z-a)^2} + g'(z)}$$

Torej je

$$f(z)\cdot(z-a)^m = h(z)\ ,\ \text{kjer je } h \text{ holomorfna na } \Omega,\ h(a)\neq 0$$

Dalje

$$f'(z)(z-a)^m + f(z)\,m(z-a)^{m-1} = h'(z)$$

torej

$$\frac{f'(z)}{f(z)}(z-a)^m + m(z-a)^{m-1} = \frac{h'(z)}{f(z)}$$

in

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m}{z-a} + \underbrace{\frac{h'(z)\,(z-a)^m}{h(z)}}_{\text{holomorfna v okolici } a}$$

Torej ima res $\frac{f'}{f}$ enostaven pol v a

in $\quad \operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = -m$ ///

<u>Definicija</u> Naj bo Ω območje. Funkcija f je meromorfna na Ω, če obstaja množica $A \subset \Omega$ brez stekališča v Ω, taka, da je f holomorfna na $\Omega \setminus A$, v točkah $a \in A$ pa ima funkcija pole.

<u>POSLEDICA</u> (Princip argumenta).
Naj bo f meromorfna funkcija na območju Ω in naj bo D omejeno območje z odsekoma gladkim robom, $D \cup bD \subset \Omega$, tako, da ni na bD nobenega pola funkcije f in da je $f(z) \neq 0$ $(z \in bD)$ [torej na bD ni niti polov niti ničel funkcije f].
Tedaj je

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_0 - N_p$$

kjer je N_0 število ničel v D, štetih z večkratnostjo in N_p število polov, štetih z večkratnostjo.

Dokaz. Če je v a pol reda m, ima $\frac{f'}{f}$ tam enostavni pol z residuom $-m$. Če pa je v a ničla reda m, ima $\frac{f'}{f}$ v a enostavni pol z residuom $+m$.

Ker A nima stekališča v Ω, je znotraj D končno ničel

a_1 kratnosti m_1
a_2 kratnosti m_2
$\vdots$
a_ℓ kratnosti m_ℓ

in končno polov

b_1 kratnosti n_1
b_2 kratnosti n_2
$\vdots$
b_k kratnosti n_k.

Po izreku o residuih sledi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{bD}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, a_j\right) + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, b_j\right)$$

$$= m_1 + m_2 + \dots + m_\ell + (-n_1) + (-n_2) + \dots + (-n_k).$$

$\square$

POSLEDICA Naj bo f holomorfna na območju, ki vsebuje $\overline{D(a,r)}$ in naj bo $f(z)\neq 0$ $(z\in bD(a,r))$. Tedaj je $\frac{1}{2\pi i}\int_{bD(a,r)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ enako številu ničel funkcije f na $D(a,r)$, štetih z večkratnostjo.

Diskusija. Ker je $(e^z)' = e^z \neq 0$ po izreku o inverzni preslikavi sledi, da ima funkcija $z \mapsto e^z = w$ lokalno vedno inverz, ki ga označimo $z = \log w$.
Vemo $\log w = \log|w| + i\arg w + k\cdot 2\pi i$.

Ker je $e^{\log z} \equiv z$

dobimo $e^{\log z} \cdot \log' z \equiv 1$

torej $(\log z)' = \frac{1}{z}$.

Podobno, če je f holo in $f \neq 0$, je $(\log f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Torej je za majhne koščke poti, od z_0 do z_1

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(z_0 z_1)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \log f(z_1) - \log f(z_0).\\ &= \log|f(z_1)| + i\arg f(z_1) + 2k\pi i\\ &\quad - \log|f(z_0)| - i\arg f(z_0) - 2k\pi i\\ &= \log|f(z_1)| - \log|f(z_0)| + i\arg(f(z_1) - f(z_0))\end{aligned}$$

Sedaj te koščke damo skupaj in integrale seštejemo

$$\int_{bD(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = i\cdot\underbrace{(\text{prirastek argumenta})}_{\substack{\text{mnogokratnik } 2\pi\\ \text{ker je } bD(a,r) \text{ sklenjena.}}}$$

Od tod "princip argumenta"

Diskusija. Ker je $(e^z)' = e^z \neq 0$ po izreku o inverzni preslikavi sledi, da ima funkcija $z \mapsto e^z = w$ lokalno vedno inverz, ki ga označimo $z = \log w$.
Vemo $\log w = \log|w| + i \arg w + k \cdot 2\pi i$.
Ker je $e^{\log z} \equiv z$
dobimo $e^{\log z} \cdot \log' z \equiv 1$

torej $(\log z)' = \frac{1}{z}$.

Podobno, če je f holo in $f \neq 0$, je
$(\log f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Torej je za
majhne koščke poti, od z_0 do z_1

$$\int_{\gamma(z_0 z_1)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \log f(z_1) - \log f(z_0).$$
$$= \log|f(z_1)| + i \arg f(z_1) + 2k\pi i$$
$$- \log|f(z_0)| - i \arg f(z_0) - 2k\pi i$$
$$= \log|f(z_1)| - \log|f(z_0)| + i \arg(f(z_1) - f(z_0))$$

Sedaj te koščke damo skupaj in integrale seštejemo

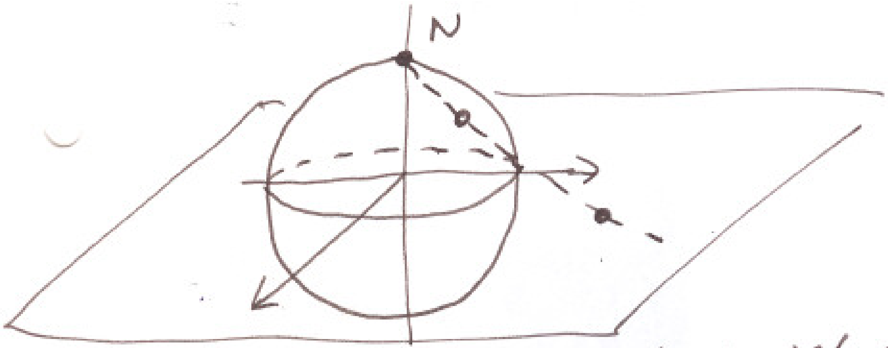
$$\int_{bD(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \cdot \underbrace{(\text{prirastek argumenta})}_{\substack{\text{mnogokratnik } 2\pi \\ \text{ker je } bD(a,r) \text{ sklenjena}}}$$

Od tod "princip argumenta"

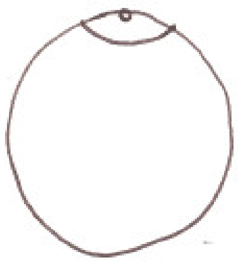
HOLOMORFNE FUNKCIJE KOT PRESLIKAVE

Riemannova sfera

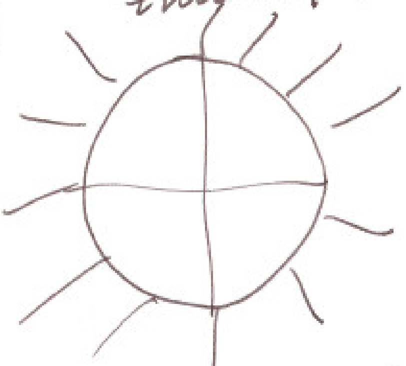
Če ~~[illegible]~~ k kompleksni ravnini dodamo še točko ∞ dobimo t.i. razširjeno ravnino, ki jo označimo s $\mathbb{C}_\infty$ ali s $\overline{\mathbb{C}}$ ali s $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. To je kompaktifikacija $\mathbb{C}$ z eno samo točko



S t.i. stereografsko projekcijo $S\setminus\{N\}$ homeomorfno preslikamo na $\mathbb{C}$. S je kompaktifikacija od $S\setminus\{N\}$. Seveda v projekciji na $\mathbb{C}$ se N nikamor ne projicira. Vendar pa



Okolice točke N brez točke N same se projicirajo na zunanjosti velikih krogov v $\mathbb{C}$,



ki, skupaj s točko ∞, postanejo okolice točke ∞.

Lomljene linearne transformacije

(po Andersonu.)

Definicija Preslikava

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ in $ad - bc \neq 0$ se imenuje lomljena linearna transformacija. (lom. lin. preslikava).

Opomba. Gledamo jo ponavadi kot preslikavo. Točko $-\frac{d}{c}$ preslika v ∞ in ∞ se preslika v $\frac{a}{c}$ če $c \neq 0$.
Tako je vsaka lomljena lin. tf. bijekcija $S^2 \to S^2$. *//.

Propozicija Vsako lomlj. lin. tf. je mogoče zapisati kot kompozicijo preslikav naslednjih tipov

(a) translacija $z \mapsto z + b$
(b) rotacija $z \mapsto az$, $|a| = 1$
(c) homotetija $z \mapsto rz$, $r > 0$
(d) inverzija $z \mapsto 1/z$

Dokaz Če je $c = 0$ je to jasno. Če pa $c \neq 0$ pa zapišemo

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\lambda}{cz+d} \qquad \lambda = \frac{bc - ad}{c} \qquad ///$$

Diskusija (a), (b), (c) slikajo krožnice v krožnice, premice v premice. Za (d) pa to ni res.
Naj bo $\mathcal{F} = \{\text{vse krožnice}\} \cup \{\text{vse premice}\}$.

Pokažemo, da inverzija ohranja družino $\mathcal{F}$.

Krivulje iz družine $\mathcal{F}$ so natanko tiste, ki zadoščajo enačbi

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0, \qquad (*)$$

kjer sta α in γ realna, $\alpha \geq 0$, $\gamma \geq 0$ in β kompleksno število, $\beta\bar{\beta} > \alpha\gamma$.

V primeru, ko je $\alpha = 0$, je enačba $(*)$

$$2\,\mathrm{Re}(\beta z) = -\gamma$$

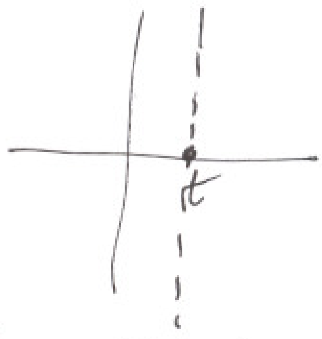
torej $\mathrm{Re}(\beta z) = -\frac{\gamma}{2}$, kjer je $\gamma \geq 0$.

Najprej opazimo, da je

$$\mathrm{Re}\, z = t \qquad , t \geq 0$$

enačba vertikalne premice skozi točko t

$$\mathrm{Re}(e^{i\omega} z) = t$$



pa enačba premice, ki jo dobimo iz prejšnje tako da jo zavrtimo okoli izhodišča za kot $-\omega$.

Jasno je, da je vsako premico mogoče tako zapisati.

Če je dana krožnica

$$|z-\beta| = r$$

je to $(z-\beta)(\bar{z}-\bar{\beta}) = r^2$

torej $z\bar{z} - \beta\bar{z} - \bar{\beta}z + \beta\bar{\beta} = r^2$

zato $z\bar{z} - \beta\bar{z} - \bar{\beta}z + (\beta\bar{\beta} - r^2) = 0$

tu je jasno $\beta\bar{\beta} > \beta\bar{\beta} - r^2$ torej je enačba oblike (*).

Obratno, če v (*) $\alpha \neq 0$, delimo z α in dobimo

$$\left(z - \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\right)\overline{\left(z - \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\right)} - \frac{\beta\bar{\beta}}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

torej

$$\left|z - \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\right|^2 = -\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta\bar{\beta}}{\alpha^2} = \frac{\beta\bar{\beta} - \gamma\alpha}{\alpha^2} > 0$$

kar je enačba krožnice.

če v enačbo damo

$z \mapsto \frac{1}{z}$ dobimo

$$\alpha \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\bar z} + \beta \frac{1}{z} + \bar\beta \frac{1}{\bar z} + \gamma = 0$$

$$\alpha + \beta \bar z + \bar\beta z + \gamma z \bar z = 0$$

kar je seveda enačba istega tipa.
torej inverzija ~~ves~~ ohranja družino $\mathcal{F}$.

Naj bodo a, b, c tri med seboj različna kompleksna števila. Konstruirali bomo lomljeno lin. tf. φ da je

$$\varphi(a) = 0$$
$$\varphi(b) = 1$$
$$\varphi(c) = \infty$$

Ta je

$$\varphi(z) = \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)} \qquad (*)$$

je ena sama, saj če je $\varphi(a) = 0$ mora biti $z-a$ v števcu, če je $\varphi(c) = \infty$ mora biti $z-c$ v imenovalcu. Če pa je $\varphi(b) = 1$ pa dobimo $(*)$.

Tudi inverz take preslikave je en sam (t.j. presl. iz $(0,1,\infty)$ presl. v (a,b,c)). Odtod sledi:

<u>IZREK</u> Za vsake $\{a,b,c\}$, $\{a',b',c'\}$ v Riem. sferi S^2 obstaja natanko ena lomljena lin. tf. φ, da je

$$\varphi(a) = a'$$
$$\varphi(b) = b'$$
$$\varphi(c) = c'$$

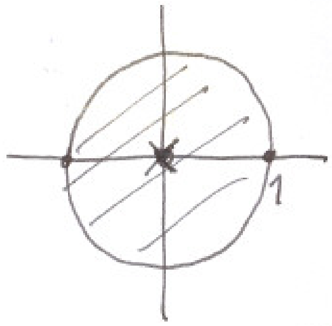
Opomba Seveda privzamemo $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ prav tako za a', b', c'.

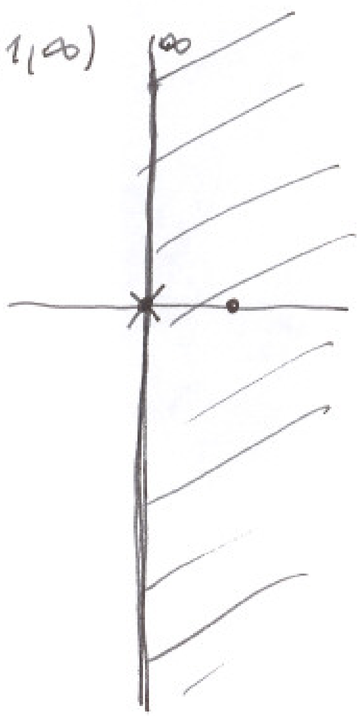
POSLEDICA Vsak odprt krog je mogoče preslikati na vsak drug odprt krog z lomljeno linearno transformacijo. Prav tako je mogoče vsak krog preslikati z lomljeno linearno transformacijo na vsako odprto polravnino.

PRIMER Najdi

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

To preslika $(-1, 0, 1)$ v $(0, 1, \infty)$





$$\varphi(e^{it}) = \frac{1+e^{it}}{1-e^{it}} =$$

$$= \frac{(1+e^{it})(1-e^{-it})}{|1-e^{it}|^2} =$$

$$= \frac{\cancel{1} + e^{it} - e^{-it} - \cancel{1}}{|1-e^{it}|^2}$$

$$= \frac{2i \sin t}{|1-e^{it}|^2}$$