SCHWARZOVA LEMA, AVTOMORFIZMI KROGA

Označimo z $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ odprt enotski krog.

LEMA (SCHWARZ) Naj bo f holomorfna na Δ in naj bo

(a) $|f(z)| \leq 1 \quad (z \in \Delta)$

(b) $f(0) = 0$

Tedaj je

$$|f(z)| \leq |z| \quad (z \in \Delta) \qquad (1)$$

in

$$|f'(0)| \leq 1 \qquad (2)$$

Če velja v (1) enakost za neki $z \in \Delta \setminus \{0\}$ ali če velja v (2) enakost tedaj obstaja konstanta λ, $|\lambda| = 1$, da je $f(z) = \lambda z$

Opomba geometrijsko to pomeni: Če holomorfna f slika Δ v $\overline{\Delta}$ in $f(0)=0$, tedaj je ali f rotacija, ali pa f preslikava $z \in \Delta \setminus \{0\}$ bliže izhodišču kot je z.

Dokaz. Ker je $f(0) = 0$ ima $\frac{f(z)}{z}$ odstranljivo singularnost v 0 (saj je

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots = z(a_1 + a_2 z + \dots))$$

torej je

$$f(z) = z g(z)$$

kjer je g holomorfna na Δ.

Velja

$$|z g(z)| \leq 1$$

torej

$$|g(z)| \leq \frac{1}{|z|} \quad (z \in \Delta \setminus \{0\})$$

Če je torej $|z| \leq r < 1$ je torej

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r} \quad (|z| = r)$$

in po principu maksima

$|g(z)|\le \frac{1}{r}$ $(|z|\le r)$. Pri $r\to 1$ dobimo

$$|g(z)|\le 1 \quad (z\in\Delta). \qquad (3)$$

t.j. $$|f(z)|\le|z| \quad (z\in\Delta) \qquad (4)$$

Če je v (4) enakost v neki $z\in\Delta\setminus\{0\}$, je v (3) enakost v neki $z\in\Delta$, torej je g konstanta, $g(z)\equiv\lambda$, $|\lambda|=1$.
Ker je $f'(0)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}=g(0)$ sledi tudi zadnja trditev. ///

DEFINICIJA Za $\alpha\in\Delta$ naj bo

$$\varphi_\alpha(z)=\frac{z-\alpha}{1-\bar\alpha z}$$

To preslikavo imenujemo Moebiusova preslikava.

IZREK Naj bo $\alpha\in\Delta$. Tedaj φ_α slika $b\Delta$ na $b\Delta$, Δ na Δ, in α v 0. Inverz od φ_α je $\varphi_{-\alpha}$. Velja

$$\varphi_\alpha'(0)=1-|\alpha|^2, \qquad \varphi_\alpha'(\alpha)=\frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

~~Dokaz. φ_α je holomorfna povsod na $\mathbb{C}$ razen v $z=\frac{1}{\bar\alpha}\notin\bar\Delta$. Oglejmo si torej, kaj se dela na $\bar\Delta$. Ker je~~

Dokaz. Ker je

$$|\varphi_\alpha(e^{i\theta})|=\left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{1-\bar\alpha e^{i\theta}}\right|=\frac{|e^{i\theta}-\alpha|}{|e^{i\theta}(e^{-i\theta}-\bar\alpha)|}=\frac{|e^{i\theta}-\alpha|}{|\overline{e^{i\theta}-\alpha}|}=1$$

torej $\varphi(b\Delta)=b\Delta$.

Ker je $\varphi(\alpha)=0\in\Delta$ sledi, da je $\varphi(\Delta)=\Delta$.

Dalje,

$$\varphi_\alpha'(0)=\frac{1(1-\bar\alpha z)-(z-\alpha)(-\bar\alpha)}{(1-\bar\alpha z)^2}\Big|_{z=0}=\frac{1-\cancel{\bar\alpha z}+\cancel{\bar\alpha z}-|\alpha|^2}{(1-\bar\alpha z)^2}\Big|_{z=0}$$

$$=1-|\alpha|^2.$$

Ostalo doma. III

<u>DEFINICIJA</u> Naj bosta Ω_1, Ω_2 dve območji v $\mathbb{C}$. Če je $f:\Omega_1\to\Omega_2$ bijekcija, ki je holomorfna in za katero je tudi f^{-1} holomorfna, pravimo da je f <u>biholomorfna preslikava</u> Ω_1 na Ω_2.

(*) Če je funkcija g holomorfna v okolici z_0, že vemo, da iz pogoja $g'(z_0)\neq 0$ sledi, da obstajata okolica U od z_0 in okolica W od $g(z_0)$, da je $g|U: U\to W$ biholomorfna preslikava

<u>IZREK</u> Naj bo g holomorfna funkcija na $D(z_0, \ )$ za neki $\ >0$. Če je $g'(z_0)=0$ tedaj ni okolice U od z_0 v kateri bi bila funkcija g injektivna.

<u>Dokaz</u>. Naj bo $g'(z_0)=0$. Recimo, da je g injektivna na $D(z_0,R)$ za neki $R>0$.

Ker je g' holomorfna na $D(z_0,\rho)$ in $g' \not\equiv 0$ na $D(z_0,\rho)$, z_0 ne more biti stekališče ničel funkcije g', torej

obstaja neka okolica $D(z_0,r)$, $r<R$, da je z_0 edina ničla od g' v $D(z_0,r)$. Dalje, ker g ni konstanta, si lahko izberemo r nekoliko manjši tako, da je $g(z) \neq g(z_0)$ $(|z-z_0|=r)$. Ker ima funkcija $g(z)-g(z_0)$ vsaj dvojno ničlo v z_0 (saj je $g(z)-g(z_0) = 0\cdot(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots$) je po principu argumenta

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{bD(z_0,r)} \frac{g'(z)\,dz}{g(z)-g(z_0)} \geq 2$$

Integral je celo število (število ničel funkcije $g(z)-g(z_0)$ v $D(z_0,r)$). Ker $g(z)\neq g(z_0)$ $(|z-z_0|=r)$ t.j. $|g(z)-g(z_0)|\neq 0$ $(|z-z_0|=r)$ zaradi kompaktnosti $|z-z_0|=r$ velja $|g(z)-g(z_0)|\geq \delta>0$ za neki $\delta>0$. Če je torej α poljubno število, $|\alpha-g(z_0)|<\delta/2$ je $|g(z)-\alpha| \geq |g(z)-g(z_0)|-|g(z_0)-\alpha| \geq \delta/2$ $(|z-z_0|=r)$. Tako ima integral smisel. Je tudi zvezno odvisen od α, ~~Torej je za~~ in ves čas enak celemu številu. Torej mora biti za vse α integral enak istemu številu. Sledi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{bD(z_0,r)} \frac{g'(z)\,dz}{g(z)-\alpha} \geq 2 \qquad |\alpha-g(z_0)|<\delta/2.$$

To pa pomeni, da ~~je vsak tak α vsaj dvo~~ funkcija $g(z)$ zavzame α vsaj dvakrat v $D(z_0,r)$ (šteto z večkratnostjo). Če je $\alpha \neq g(z_0)$, funkcija g zavzame α v dveh razl. točkah v $D(z_0,r)$, saj če bi n.pr. imela $g(z)-\alpha$ vsaj dvojno ničlo v neki točki (ki je $\neq z_0$) bi moral biti tam $[g(z)-\alpha]'$ enak 0, kar pa ni. g torej zavzame isto vrednost α v dveh različnih točkah $D(z_0,r)$. ///

POSLEDICA Če je $f:\Omega_1\to\Omega_2$ holomorfna preslikava, ki je bijektivna, je tudi f^{-1} holomorfna.

Dokaz. Iz injektivnosti sledi $f'(z)\neq 0$ za vse $z\in\Omega_1$, torej je po (*) f^{-1} res holomorfna. ∴ ☒

~~DEFINICIJA Če je $\alpha\in\Delta$ naj bo~~

$$\varphi_\alpha(z)=\frac{z-\alpha}{1-\bar\alpha z}$$

~~Taki preslikavi pravimo Möbiusova transformacija.~~

~~IZREK Naj bo $\alpha\in\Delta$. Tedaj je φ_α injektivna holo. preslikava, ki $b\Delta$ preslika na $b\Delta$, Δ na Δ.~~

IZREK (O avtomorfizmih kroga).
Naj bo f holomorfna na Δ, f injektivna, $f(\Delta)=\Delta$.
Naj bo α točka, ki jo f preslika v 0.
Tedaj obstaja konstanta λ, $|\lambda|=1$, da je

$$f(z)=\lambda\frac{z-\alpha}{1-\bar\alpha z}\qquad (z\in\Delta).$$

Opomba Torej je f enak φ_α komponiran z rotacijo.

~~Dokaz. Naj bo $g=f^{-1}$, torej $g(f(z))=z$ $(z\in\Delta)$. Ker je f injektivna, f' nima ničel po zgoraj dokazanem izreku. Torej je~~
Po zgoraj dokazanem izreku je tudi ~~f~~ g holomorfna.

Dokaz Naj bo $F = f \circ \varphi_{-\alpha}$

Tedaj je $F : \Delta \to \Delta$ bihol., $F(0) = 0$.

Schw. lemma za F da $|F'(0)| \le 1$

— " — za F^{-1} da $|(F^{-1})'(0)| \le 1$

t.j. $\dfrac{1}{|F'(0)|} \le 1$

sled $|F'(0)| = 1 \Rightarrow F(z) \equiv \lambda z$

t.j. $f(\varphi_{-\alpha}(w)) = \lambda w$

t.j. $F(z) \equiv \lambda \varphi_\alpha(z)$ ∎

KONFORMNE PRESLIKAVE

Naj bo f preslikava z $D(a,r) \to \mathbb{C}$.

Naj bo $f(z) \neq f(a)$ $(z \in D(a,r), z \neq a)$.

Rekli bomo da v točki a f ohranja kote, če bo

$$\frac{\dfrac{f(a+re^{i\theta_2}) - f(a)}{|f(a+re^{i\theta_2}) - f(a)|}}{\dfrac{f(a+re^{i\theta_1}) - f(a)}{|f(a+re^{i\theta_1}) - f(a)|}} \xrightarrow[\text{pri } r \to 0]{} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \quad (*)$$

<u>IZREK</u> Naj bo preslikava $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$.
Če $f'(a)$ obstaja in $f'(a) \neq 0$, tedaj f va ohranja kote.
Obratno, če je f kot preslikava iz $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciabilna v a in če $(Df)(a) \neq 0$, in če f ohranja kote v a, tedaj $f'(a)$ obstaja in je $\neq 0$.

<u>Dokaz</u> Zaradi enostavnosti $a = f(a) = 0$ predpostavimo.
Če je $f'(0) = \alpha \neq 0$ je

$$\lim_{r \to 0} \frac{f(a+re^{i\theta}) - f(a)}{|f(a+re^{i\theta}) - f(a)|} = \lim_{r \to 0} \frac{\frac{f(a+re^{i\theta}) - f(a)}{re^{i\theta}}}{\left|\frac{f(a+re^{i\theta}) - f(a)}{re^{i\theta}}\right|} \cdot e^{i\theta}$$

$$= e^{i\theta} \cdot \frac{f'(a)}{|f'(a)|}$$

in zato res velja (*)

Obratno, naj bo f diferenciabilna in naj $(Df)(0) \neq 0$.
Tedaj je
$$f(z) = \alpha z + \beta \bar{z} + o(|z|)$$
kjer vsaj eden od α ali $\beta \neq 0$.
Če f ohranja kote je

$$\frac{\alpha r e^{i\theta_2} + \beta r e^{-i\theta_2} + o(r)}{|\alpha r e^{i\theta_2} + \beta r e^{-i\theta_2} + o(r)|} \cdot \frac{|\alpha r e^{i\theta_1} + \beta r e^{-i\theta_1} + o(r)|}{\alpha r e^{i\theta_1} + \beta r e^{-i\theta_1} + o(r)} \to e^{i(\theta_2 - \theta_1)}$$

%. →

mora namreč biti

$$u(x,y) = px + qy + \sigma(x,y)$$
$$w(x,y) = rx + sy + \sigma(x,y)$$

$z = x + iy$

torej

$$f(z) = u(x,y) + iw(x,y) =$$
$$= px + qy + \sigma(x,y) + i[rx + sy + \sigma(x,y)]$$
$$= p\frac{z+\bar{z}}{2} + q\frac{z-\bar{z}}{2i} + ir\frac{z+\bar{z}}{2} + is\frac{z-\bar{z}}{2i} + \sigma(|z|)$$
$$= z\left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2i} + \frac{ir}{2} + \frac{s}{2}\right)$$
$$+ \bar{z}\left(\frac{p}{2} - \frac{q}{2i} + \frac{ir}{2} - \frac{s}{2}\right) + \sigma(|z|)$$
$$= \alpha z + \beta\bar{z}$$

Tu $\alpha = \beta = 0$ pomeni

$$\frac{p}{2} + \frac{q}{2i} + \frac{ir}{2} + \frac{s}{2} = 0 \qquad + \quad -$$
$$\frac{p}{2} - \frac{q}{2i} + \frac{ir}{2} - \frac{s}{2} = 0$$

sledi $\left.\begin{array}{l} \frac{p}{2} + \frac{ir}{2} = 0 \\ \frac{q}{2i} + s = 0 \end{array}\right\}$ $p = q = r = s = 0$, protislovje.

To pomeni

$$\frac{\alpha r+\beta r e^{-2i\theta_2}+o(r)}{|\alpha r+\beta r e^{-2i\theta_2}+o(r)|}\cdot\frac{|\alpha r+\beta r e^{-2i\theta_1}+o(r)|}{(\alpha r+\beta r e^{-2i\theta_1}+o(r))}\to 1$$

torej je

$$\frac{\alpha+\beta e^{-2i\theta_2}}{|\alpha+\beta e^{-2i\theta_2}|}\cdot\frac{|\alpha+\beta e^{-2i\theta_1}|}{\alpha+\beta e^{-2i\theta_1}}\equiv 1$$

Fiksirajmo θ_1. Dobimo

$$\frac{\alpha+\beta e^{-2i\theta_2}}{|\alpha+\beta e^{-2i\theta_2}|}\equiv A \quad , A \text{ kompleksno}$$

število. Ker α, β nista oba 0, $A \neq 0$. Sledi, da je $\beta = 0$, saj mora biti argument od leve strani ves čas enak argumentu od A.

Sledi $\alpha \neq 0$ in

$$f(z) = \alpha z + o(z)$$

kar pomeni

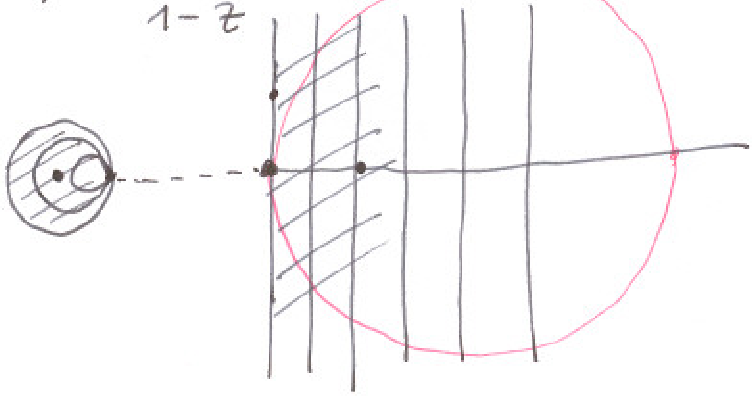
$$f'(0) = \lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\alpha z}{z}+\frac{o(z)}{z} = \alpha \neq 0. \quad ///.$$

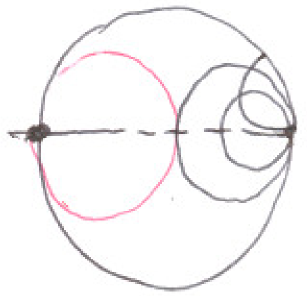
Opomba Ohranjanje kotov (in smisla vrtenja) v vsaki točki je karakteristično za holomorfne preslikave, katerih odvod je $\neq 0$.

Def. Holo preslikave (funkcije) na obm Ω, katerih odvod je v vsaki točki Ω od 0 različen, imenujemo konformne preslikave.

Primer 1 Oglejmo si

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$



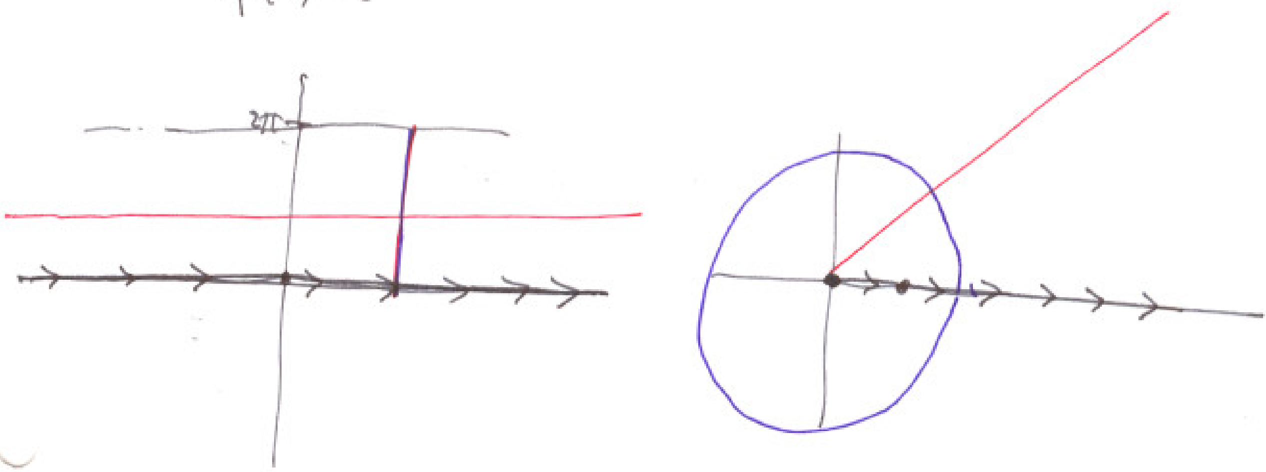


različne premice, različne krožnice.

$$f(\bar{z}) = \left(\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\right) = \overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = \overline{f(z)}$$

Primer 2 Podrobno

$f(z)=e^z$



etc.

Primer 3

$f(z)=z^2$

<u>IZREK</u> (Riemannov upodobitveni izrek)

Vsako enostavno povezano območje v $\mathbb{C}$, ki ni enako celi ravnini je holomorfno ekvivalentno krogu.

<u>Opomba</u>

To pomeni naslednje:
Če je Ω tako območje, obstaja holomorfna preslikava $F: \Omega \to \Delta$.

Če je $\Omega = \mathbb{C}$, take preslikave ne more biti (Liouville-ov izrek).

<u>Diskusija</u> Tega, kako izredno močan je Riemannov izrek.

O FOURIEROVIH VRSTAH

Def. Kompleksna Fourierova vrsta je dvostranska vrsta oblike

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta} = \ldots + c_{-2}e^{-2i\theta} + c_{-1}e^{-i\theta} + c_0 + c_1 e^{i\theta} + c_2 e^{2i\theta} + \ldots .$$

Opomba Laurentova vrsta je povezana s Fourierovo vrsto: Naj bo $r_1 < 1 < r_2$ in naj bo f holomorfna na $A = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$. Tedaj vemo, da Laurentova vrsta

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

konvergira enakomerno na vsakem strogo manjšem kolobarju, vsebovanem v A. Torej vrsta enakomerno konvergira na $\{z : |z| = 1\}$ in je

torej za $|z| = 1$, torej za $z = e^{i\theta}$

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta} \quad ($$

Denimo sedaj, da f ni nujno holomorfna, da pa velja

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

kjer je vrsta na desni enakomerno konvergentna.

Fiksirajmo $m \in \mathbb{Z}$ in obe strani pomnožimo z $e^{-im\theta}$

$$e^{-im\theta} f(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta} e^{-im\theta}$$

Vrsta na desni je vedno enakomerno konvergira na $[0, 2\pi]$, zato lahko členoma integriramo. Dobimo

$$\frac{1}{2\pi} \int^{\pi} e^{-im\theta} f(e^{i\theta}) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int^{\pi} \Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta} e^{-im\theta}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} e^{-im\theta} d\theta$$

Ker je

$$\int^{\pi} e^{ik\theta} e^{-im\theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)(\theta)} d\theta = \begin{cases} 2\pi & (k = m) \\ 0 & (k \neq m) \end{cases}$$

Torej je

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta = c_m \qquad (m\in\mathbb{Z})$$

Seveda pa take integrale lahko vedno izračunamo za vsako odsekoma zvezno funkcijo na

$\{z : |z| = 1\}$

<u>Def</u>. Naj bo f odsekoma zvezna funkcija na enotski krožnici $\{z : |z| = 1\}$. Števila

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta \qquad (m\in\mathbb{Z})$$

imenujemo Fourierovi koeficienti funkcije f in vrsto

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$$

funkciji f prirejeno Fourierovo vrsto.

Pojavita se dve vprašanji v splošnem

(a) Ali Fourierova vrsta konvergira

(b) če konvergira, kaj je vsota Fourierove vrste (t.j. v kakšnem sorodstvu je s funkcijo f.

Pišemo

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$$

da označimo, da je desna stran Fourierova vrsta funkcije f.

Primer.

Naj bo $f(e^{i\theta}) = \begin{cases} -1 & -\pi < \theta \le 0 \\ 1 & 0 < \theta \le \pi \end{cases}$

Če je $k \neq 0$, je

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-ik\theta}\cdot(-1)\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-ik\theta}(+1)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (\cancel{-\cos k\theta} + i\sin k\theta)\,d\theta\right]$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (\cancel{\cos k\theta} - i\sin k\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{i}{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{k}\cos k\theta\right]\Big|_{-\pi}^{0}$$

$$+ \frac{i}{2\pi}\left[+\frac{1}{k}\cos k\theta\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{i}{2\pi}\left[-\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\cos k\pi\right]$$

$$+ \frac{i}{2\pi}\left[\frac{1}{k}\cdot\cos k\pi - \frac{1}{k}\right]$$

$$= \frac{i}{\cancel{2}\pi k}(-1 + \cos k\pi) =$$

$$= \frac{1}{\pi i k}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$= \begin{cases} 2/\pi i k & k \text{ lih} \\ 0 & k \text{ sod.} \end{cases}$$

Torej je

$$\boxed{\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &\sim \frac{2}{\pi i}\sum_{k \text{ lih}} \frac{1}{k} e^{ik\theta} \\ &= \dots \left(-\frac{2}{3\pi i}\right)e^{-3i\theta} + \left(\frac{-2}{\pi i}\right)e^{-i\theta} \\ &\quad + \left(\frac{2}{\pi i}\right)e^{i\theta} + \left(\frac{2}{3\pi i}\right)e^{3i\theta} + \dots \end{aligned}}$$

Ker je

$$\underline{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}} = 2i \sin k\theta$$

dobimo

$$f(e^{i\theta}) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \dots\right)$$

Vsi členi so enaki 0 pri $\theta = 0$

Videli bomo, da vrsta konvergira k $f(e^{i\theta})$ na $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

IZREK Naj bo f odsekoma zvezna na $\{|z|=1\}$ in naj bo

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$$

Tedaj za poljubna $m, n \geq 0$ velja

$$\sum_{k=-m}^{n} |c_k|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big|f(e^{i\theta}) - \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{ik\theta}\Big|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

Dokaz

$$\Big|f(e^{i\theta}) - \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{ik\theta}\Big|^2 =$$

$$= \Big(f(e^{i\theta}) - \sum_{j=-m}^{m} c_j e^{ij\theta}\Big)\Big(\overline{f(e^{i\theta})} - \sum_{k=-m}^{m} \overline{c_k}\, e^{-ik\theta}\Big)$$

$$= |f(e^{i\theta})|^2 - \overline{f(e^{i\theta})} \sum_{j=-m}^{m} c_j e^{ij\theta}$$

$$- f(e^{i\theta}) \sum_{k=-m}^{n} \overline{c_k} e^{-ik\theta} + \sum_{j=-m}^{m} \sum_{k=-m}^{m} c_j \overline{c_k} e^{i(j-k)\theta}$$

Sedaj pa integriramo

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$ na obeh straneh pa dobimo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|f(e^{i\theta})-\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ik\theta}\Big|^2 d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^2 d\theta-\sum \overline{c_k}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\theta})e^{-ik\theta}$$

$$-\sum c_j\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(e^{i\theta})e^{-ij\theta}}\,d\theta}_{\substack{=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\theta})e^{-ij\theta}d\theta} \\ =\overline{c_j}}}+\sum|c_j|^2$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^2 d\theta-\sum|c_k|^2-\cancel{\sum|c_j|^2+|c_j|^2}\quad \text{III.}$$

Posledica je, da so delne vsote vrste $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2$ omejene in v limiti dobimo

<u>IZREK</u> (Besselova neenakost) Če je f odsekoma zvezna na $|z|=1$ s Fourierovo vrsto

$$f(e^{i\theta})\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ik\theta},$$

tedaj velja

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

<u>Opomba.</u> Od tod sledi, da je $c_k \to 0$ pri $k \to -\infty$, $k \to +\infty$.

<u>IZREK</u> Naj bo f odsekoma zvezna na $|z|=1$ s Four. vrsto

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum c_k e^{ik\theta}$$

Če je $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ diferenciabilna v θ_0, tedaj Fourierova vrsta od $f(e^{i\theta})$ konvergira k $f(e^{i\theta_0})$ pri $\theta = \theta_0$, to je

$$f(e^{i\theta_0}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta_0} = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{ik\theta_0}.$$

<u>Dokaz.</u> Naj bo najprej $\theta_0 = 0$, torej $e^{i\theta_0} = 1$. Definirajmo

$$g(e^{i\theta}) = \frac{f(e^{i\theta}) - f(1)}{e^{i\theta} - 1}$$

Ker je

$$\lim_{\theta\to 0} g(e^{i\theta}) = \lim \underbrace{\frac{f(e^{i\theta}) - f(1)}{\theta}}_{\text{obstaja}} \cdot \frac{\theta}{e^{i\theta} - 1}$$

$$\frac{e^{i\theta}-1}{\theta} = \frac{\cos\theta - 1 + i\sin\theta}{\theta} \to i$$
pri $\theta \to 0$

sledi, da je g odsekoma zvezna na $b\Delta$. Najbodo b_k Four. koeficienti od $g(e^{i\theta})$ tako $g(e^{i\theta}) \sim \sum b_k e^{ik\theta}$.

Besselova neenakost za g da, da $b_k \to 0$ pri $k \to \pm\infty$. Izrazimo c_k-je z b_k-ji:

Ker je
$$f(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta})(e^{i\theta}-1) + f(1)$$
je tako
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})(e^{i\theta}-1)e^{-ik\theta}\,d\theta$$
$$+ f(1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\,d\theta$$

Sledi
$$c_k = b_{k-1} - b_k \qquad \text{pri } k \neq 0$$
$$c_0 = b_{-1} - b_0 + f(1)$$

Torej je
$$\sum_{k=-m}^{n} c_k = f(1) + \sum_{k=-m}^{n}(b_{k-1} - b_k) =$$
$$= f(1) + b_{-m-1} - b_n$$

Ker vemo, da je $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

$\lim_{m\to+\infty} b_{-m-1} = 0$,

sledi, da je

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k = f(1)$$

torej $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}\Big|_{\theta=0} = f(1)$.

Torej smo dokazali pri $\theta_0 = 0$.

Za splošen θ_0 uvedemo novo spremenljivko.

Oglejmo si

$$h(e^{i\theta}) = f(e^{i(\theta+\theta_0)}) \sim \sum a_k e^{ik\theta},$$

ki je spet absolutno zvezna in diferenciabilna pri $\theta = 0$. (ker je bila f dif pri θ_0)

Four. ~~vrsta~~ koef. a_k so

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(e^{i(\theta+\theta_0)})\,d\theta =$$

$$\theta+\theta_0 = \varphi$$
$$d\theta = d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\theta_0}^{\pi+\theta_0} e^{-ik(\varphi-\theta_0)} \cdot f(e^{i\varphi})\,d\varphi$$

$$\underset{\text{(periodičnost)}}{=} e^{ik\theta_0}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\varphi} f(e^{i\varphi})\,d\varphi = c_k e^{ik\theta_0}$$

To pomeni, da je Four. vrsta od f, pri $\theta=\theta_0$

$$\sum c_k e^{ik\theta_0} = \sum a_k$$

torej Four. vrsta funkcije h pri $\theta=0$, za katero smo dokazali, da konvergira k $h(1)=f(e^{i\theta_0})$.

<u>Opomba</u> V zgornjem primeru torej vrsta

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta+\dots\right)$$

konvergira k $+1$ za $0<\theta<\pi$
k -1 za $-\pi<\theta<0$.

<u>IZREK</u> Naj bo $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ dvakrat zvezno odvedljiva na $[-\pi,\pi]$. Tedaj Fourierova vrsta funkcije f konvergira k $f(e^{i\theta})$ enakomerno na $[-\pi,\pi]$.

<u>Dokaz</u>. Vemo že, da Four. vrsta konvergira k f v vsaki točki. Dokazati moramo, da je Four. vrsta enakomerno konvergentna.

Naj bo

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum c_k e^{ik\theta}$$

torej

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta$$

Integriramo per partes

$$f(e^{i\theta}) = u(\theta)$$

$$e^{-ik\theta}d\theta = dv \qquad -\frac{1}{ik}e^{-ik\theta} = v$$

Dobimo

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{ik}e^{-ik\theta}\cdot u(\theta)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\frac{1}{ik}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}u'(\theta)\,d\theta$$

$$= 0 + \frac{1}{ik}\cdot\left[\frac{1}{ik}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\cdot u''(\theta)\,d\theta\right]$$

Ker je $\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}u''(\theta)\,d\theta\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}|u''(\theta)|\,d\theta \qquad L$

sledi

$$|c_k| \leq \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot L = \frac{M}{k^2}$$

in je zato vrsta

$$\sum c_k e^{ik\theta}$$

majorizirana s konvergentno vrsto $\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{M}{k^2}$. Po Weierstrassove ~~~ trditvi (M-test) vrsta $\sum_{-\infty} c_k e^{ik\theta}$

konwergia ewaluowana na $[-\pi, \pi]$.